



中国科学院上海天文台

Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Science



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences

轨道确定中的时间 与空间系统

宋叶志
2020年秋季

作业邮箱: song.yz@foxmail.com

课件地址: <http://202.127.29.4/astrodynamics/course.php>

时间与空间系统

时间系统

- 原子时
- 地球质心坐标时
- 太阳系质心坐标时间
- 儒略日
- 世界时
- GNSS时间系统

空间系统

- 参考系与参考框架
- 正则质心度规
- 天体运动方程
- 天球参考系
- 地球参考系
- 从CTRS到ITRS
- 太阳系质心动力学参考系
- 全球卫星导航系统中的时间与坐标系统

TCG

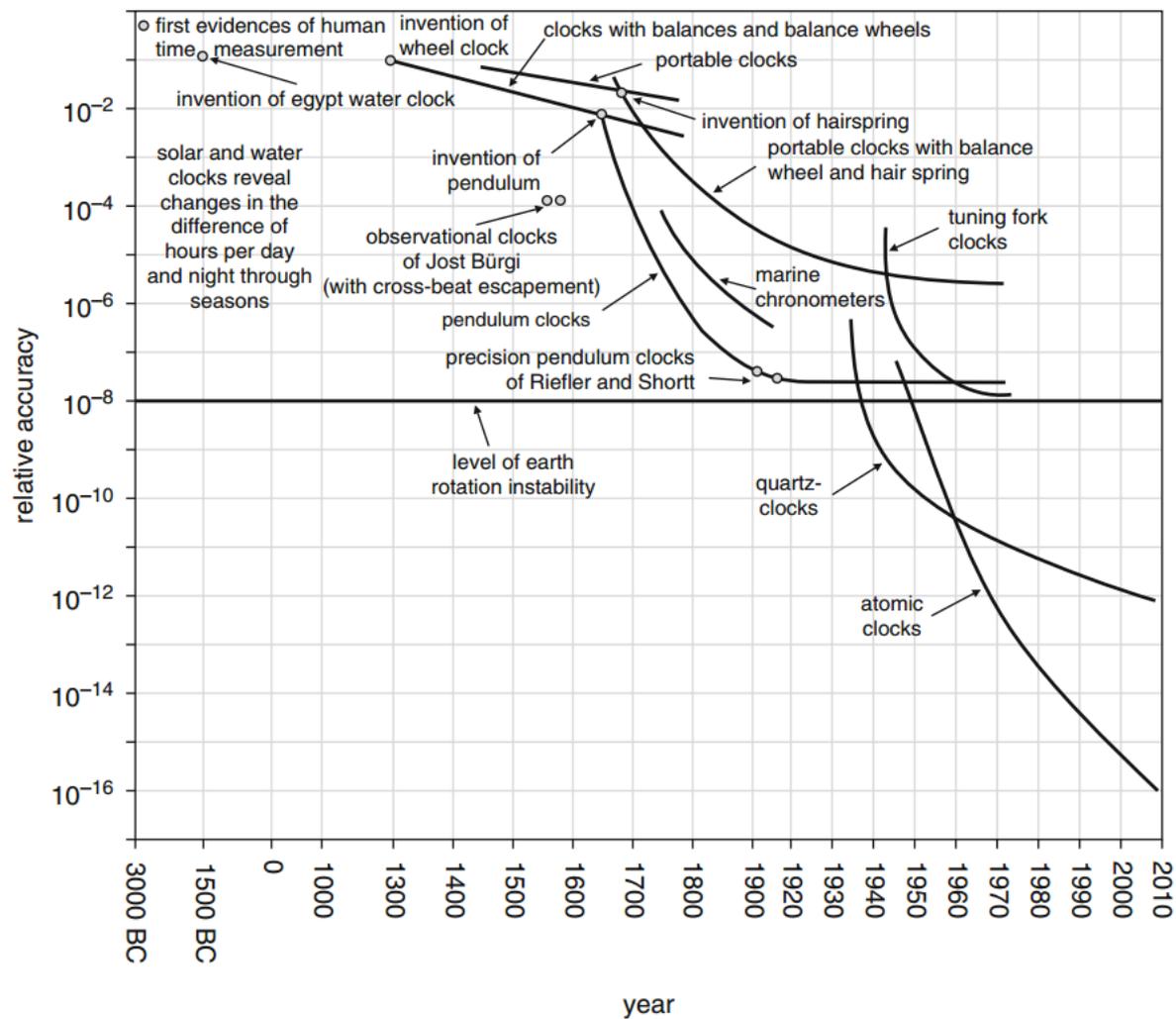
“What is time? If no one ask of me, I know; if I wish to explain to him who asks, I know not.” --- St. Augustine

Due to relativity, one has in particular to distinguish geocentric from barycentric (the barycenter of the solar system) timescales. The basic geocentric timescale is geocentric coordinate time (TCG). TCG is the time coordinate of the geocentric celestial reference system (GCRS). Its practical realization is achieved through certain formulae that relate the proper times of atomic clocks and their spatial GCRS coordinates X to TCG. TCG is an important tool for the synchronization of clocks: two clocks showing proper time 1 and 2 are called synchronous if their corresponding TCG values agree. Terrestrial time (TT) differs from TCG only by a constant rate that was chosen such that TT approximates proper time of a clock on the geoid. Finally, international atomic time (TAI) agrees with TT except for a constant offset that is there only for historical reasons. From a practical point of view, it is TAI that is directly derived from the readings of a large number of atomic clocks distributed around the globe, and from TAI the timescales TT and TCG are generated. In this sense, a practically useful timescale is generated by the readings of actual clocks (this is the essential difference from a pure mathematical time coordinate).

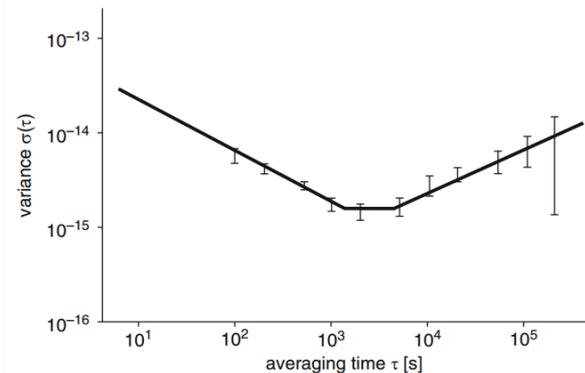
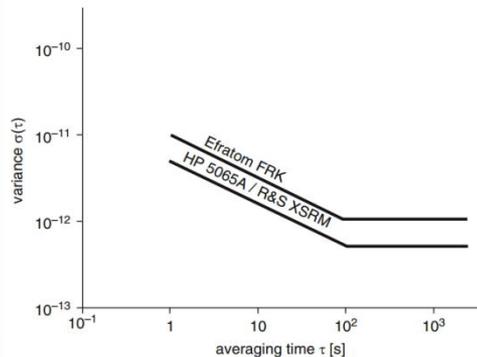
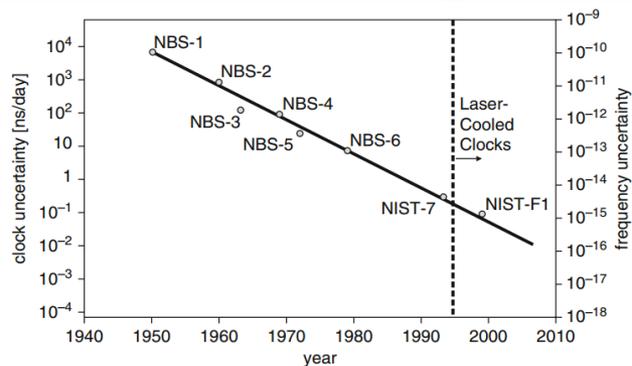
TCB

Especially for interplanetary spacecraft navigation, barycentric timescales are needed. Barycentric coordinate time (TCB) plays a similar role as TCG but in the barycentric celestial reference system (BCRS). Meanwhile, barycentric dynamical time (TDB) used in certain planetary ephemerides has been defined to differ from TCB essentially only by a constant rate that was fixed by IAU 2006 Resolution B3. The relation between barycentric and geocentric timescales such as TCB and TCG involves complicated 4-dimensional space-time transformations (generalizations of the special relativistic Lorentz transformations).

钟表制造技艺发展



铯钟、铷钟、氢钟及时频系统



典型铯钟频率稳定度

典型铷钟频率稳定度

典型氢钟频率稳定度



Allan方差与噪声类型

$$\langle \sigma_y^2(N, \Delta t, \tau) \rangle \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sigma_{y_i}^2(N, \Delta t, \tau).$$

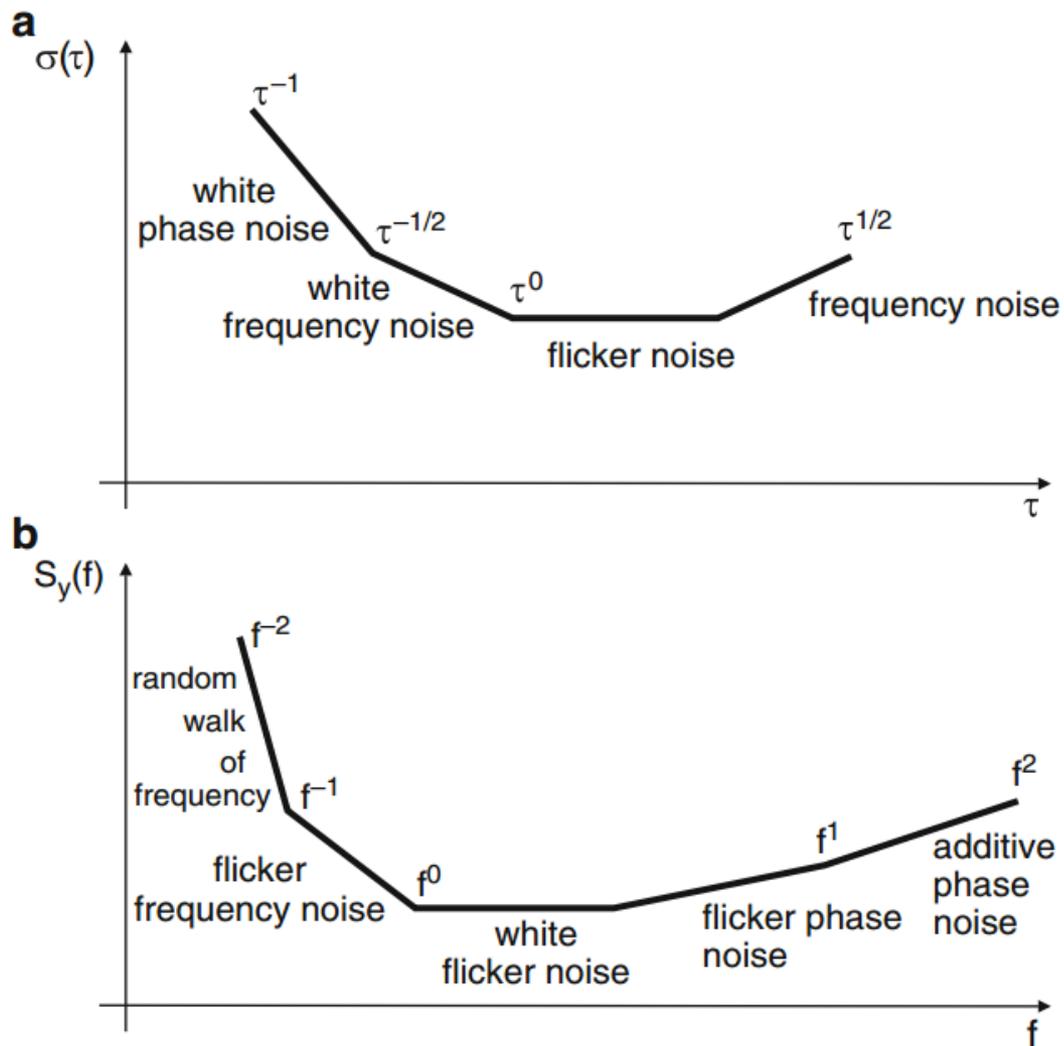
In most cases the spectral power density $S_y(f)$ of an oscillator can be represented in the form

$$S_y(f) = h_{-2}f^{-2} + h_{-1}f^{-1} + h_0 + h_1f + h_2f^2$$

and the various f^s -terms can be related with different kinds of noises:

- h_{-2} : random walk in frequency (y).
- h_{-1} : flicker noise in frequency (y), caused, e.g., by fluctuations in the power supply unit.
- h_0 : white frequency noise corresponding to random walk in phase.
- h_1 : flicker phase noise caused by certain electronic devices.
- h_2 : white phase noise caused by additive noise in the electronics.

时间域与频率域不同类型噪声



时空度规与坐标时

根据IAU2000决议B1.3,质心天球坐标系度规张量形式为

$$g_{00} = -1 + \frac{2w}{c^2} - \frac{2w^2}{c^4} + \mathcal{O}(c^{-5}),$$
$$g_{0i} = g_{i0} = -\frac{4}{c^3} w^i + \mathcal{O}(c^{-5})$$
$$g_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + \frac{2}{c^2} w \right) + \mathcal{O}(c^{-4}).$$

相应的后牛顿近似归化为

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta \right) w = -4\pi G \sigma$$

太阳系内满足边界条件的解为

$$w(t, \mathbf{x}) = G \int d^3x' \frac{\sigma(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{2c^2} G \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3x' \sigma(t, \mathbf{x}') |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|.$$
$$w^i(t, \mathbf{x}) = G \int d^3x' \frac{\sigma^i(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.$$

天文时间系统

- 地球质心坐标时间 $T = \text{TCG}$
- 地球附近实际时钟现实的时间并非 TCG，而是本征时间。忽略高 $1/c$ 的阶项，有

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dT^2 \left[1 - \frac{2U}{c^2} - 2 \frac{(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X}}{c^2 dT} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{X}}{dT} \right)^2 \right]$$

$$\text{TCG} - \text{TT} = \left(\frac{L_G}{1 - L_G} \right) \times (\text{JD}_{\text{TT}} - T_0) \times 86400 \text{ s}$$

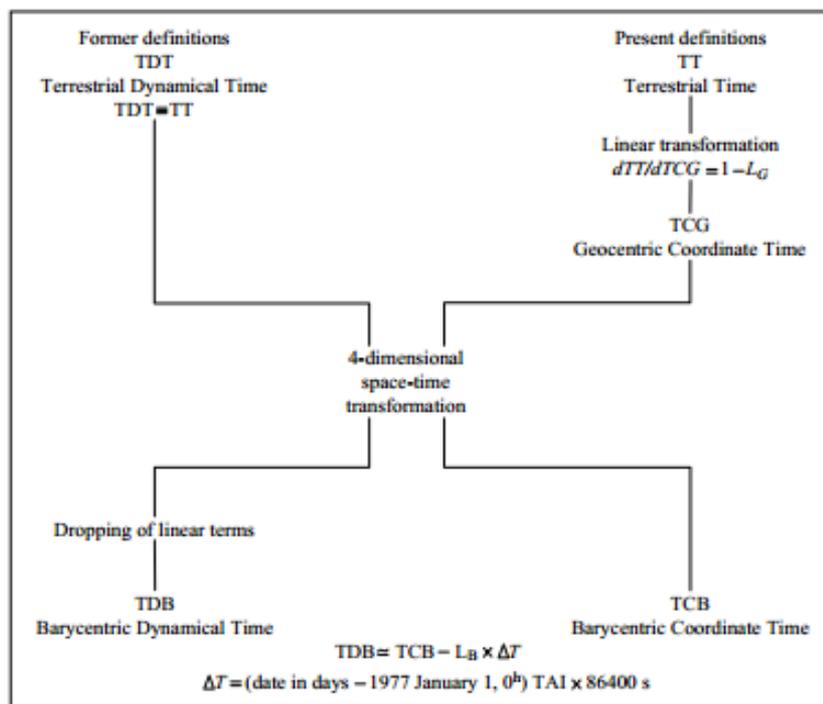


Fig. 10.1 Relations between time scales.

天文时间系统

- ▶ 地球附近时间系统使用TCG\TT\TAI，其他地方使用太阳系质心坐标时TCB。
- ▶ TCB和TCG一阶后牛顿关系

$$\text{TCB} - \text{TCG} = c^{-2} \left[\int_{t_0}^t \left(U_{\text{ext}}(\mathbf{z}_E) + \frac{1}{2} \mathbf{v}_E^2 \right) dt' + \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{z}_E) \right].$$

$$\text{TDB} = \text{TCB} - L_B \times (\text{JD}_{\text{TCB}} - T_0) \times 86,400 \text{ s} + \text{TDB}_0$$

儒略日与简约儒略日

儒略日描述时间已成惯例，可以用于任何持续的时间系统，如TCG或TT。在精度要求高的情况下需要将JD（TT）与JD（TCG）等区分开。

1. For $M > 2$, Y and M are left unchanged. For $M = 1$ or 2 , Y is replaced by $Y - 1$ and M by $M + 12$.
2. In the Gregorian calendar, one computes

$$A = \text{INT}(Y/100); \quad B = 2 - A + \text{INT}(A/4),$$

where INT denotes the integer part of the number (e.g., $\text{INT}(3.92) = 3$). In the Julian calendar, $B = 0$.

3. JD is then given by

$$\text{JD} = \text{INT}(365.25 \cdot (Y + 4716)) + \text{INT}(30.6001 \cdot (M + 1)) \\ + D + B - 1524.5.$$

```
[syz@Host1 ~]$ cal2jd 2019 9 23
58749.0000000000
[syz@Host1 ~]$ jd2cal 58749.0
2019 9 23 0.0000
[syz@Host1 ~]$
```

在天文库sofa中iau_JD2CAL与iau_CAL2JD给出了JD与格里高利日期之间的换算。天文中还常用MJD表示时间，起算点为1858年11月17日0时。比较常用的还有JD2000。

世界时、恒星时和地球自转角

$$UT1 = UTC + dUT1$$

$$ERA(T_u) = 2\pi(0.779\,057\,273\,264\,0 + 1.002\,737\,811\,911\,354\,48 T_u),$$

对地球的岁差-章动模型并不敏感，因此，即使岁差-章动模型有所改进，地球自转角的表达式也不必进行修正。

$$GST = ERA(UT1) - EO$$

$$EO = -0''.014\,506 - 4\,612''.156\,534 t - 1''.391\,581\,7 t^2 + 0''.000\,000\,44 t^3 - \Delta\psi \cos \epsilon_A + \sum_k C'_k \sin \alpha_k,$$

$$GMST = ERA(UT1) + 0''.014\,506 + 4\,612''.156\,534 t + 1''.391\,581\,7 t^2 - 0''.000\,000\,44 t^3 - 0''.000\,029\,956 t^4 - 0''.000\,000\,036\,8 t^5.$$

协调世界时UTC与跳秒

UTC is obtained from about 250 caesium clocks and hydrogen masers located in about 65 different laboratories, distributed around the world, and applying a set of algorithms to ensure a uniform time. It is not determined in real time, but generated with a delay of about half a month. Real-time estimates of UTC are computed and provided by different centres, such as UTC(USNO), from the United States Naval Observatory (USNO); UTC(NIST), from the National Institute of Standards and Technology (NIST); and UTC(SU) from Russia. In general, UTC(k) is a realisation of UTC by a given laboratory k .

The following relations are met

$$\text{TAI} = \text{UTC} + 1^s \times n, \quad \text{TAI} = \text{TDT} - 32^s.184$$

$$\text{UTC} = \text{UT1} + d\text{UT1}, \quad |d\text{UT1}| < 0^s.9$$

跳秒的未来可能性：

1. 继续保留
2. 取消跳秒
3. 改用更大的leap单位，如跳小时，这样很多年才需要改一次

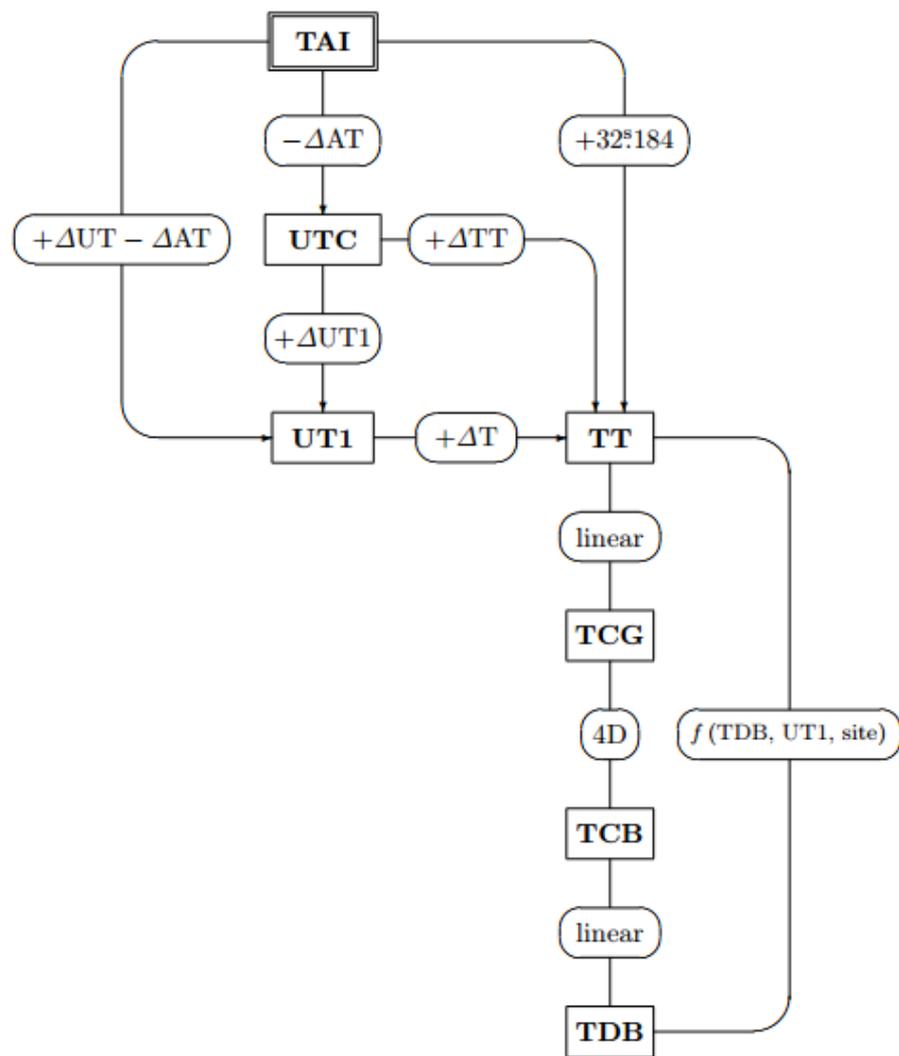
未来决议的讨论可以关注国际电信联盟相关会议。

	0	10	20	30
1	39887.0	9	1968-02-01	
2	41317.0	10	1972-01-01	
3	41499.0	11	1972-07-01	
4	41683.0	12	1973-01-01	
5	42048.0	13	1974-01-01	
6	42413.0	14	1975-01-01	
7	42778.0	15	1976-01-01	
8	43144.0	16	1977-01-01	
9	43509.0	17	1978-01-01	
10	43874.0	18	1979-01-01	
11	44239.0	19	1980-01-01	
12	44786.0	20	1981-07-01	
13	45151.0	21	1982-07-01	
14	45516.0	22	1983-07-01	
15	46247.0	23	1985-07-01	
16	47161.0	24	1988-01-01	
17	47892.0	25	1990-01-01	
18	48257.0	26	1991-01-01	
19	48804.0	27	1992-07-01	
20	49169.0	28	1993-07-01	
21	49534.0	29	1994-07-01	
22	50083.0	30	1996-01-01	
23	50449.0	31	1997-01-01	
24	51179.0	32	1999-01-01	
25	53736.0	33	2006-01-01	
26	54832.0	34	2009-01-01	
27	56109.0	35	2012-07-01	
28	57204.0	36	2015-07-01	
29	57754.0	37	2017-07-01	
30	59999.0	38	2xxx-xx-xx	
31				

UT1-UTC

```
#
# FORMAT(I4, I3, I3, I6, 2F10. 6, 2F11. 7, 4F10. 6, I4)
#-----
#   Date      MJD      x      y      UT1-UTC      LOD      dPsi      dEpsilon      dX      dY      DAT
# (0h UTC)      "      "      "      s      s      "      "      "      "      "      s
#-----
# y4 mm dd nnnnn +n. nnnnnn +n. nnnnnn +n. nnnnnnn +n. nnnnnnn +n. nnnnnn +n. nnnnnn +n. nnnnnn +n. nnnnnn nnn
#-----
#
NUM_OBSERVED_POINTS 2086
BEGIN OBSERVED
2014 01 01 56658 0.038625 0.318929 -0.0970337 0.0011952 -0.081301 -0.009486 0.000008 0.000163 35
2014 01 02 56659 0.038411 0.319622 -0.0982274 0.0012339 -0.081407 -0.009496 -0.000016 0.000175 35
2014 01 03 56660 0.037804 0.320458 -0.0995076 0.0013011 -0.081579 -0.009268 -0.000041 0.000188 35
2014 01 04 56661 0.037059 0.320811 -0.1008557 0.0013803 -0.081547 -0.009064 -0.000026 0.000192 35
2014 01 05 56662 0.036698 0.321223 -0.1022601 0.0014192 -0.081318 -0.008993 0.000004 0.000193 35
2014 01 06 56663 0.036122 0.321908 -0.1036685 0.0013885 -0.081132 -0.008947 0.000034 0.000195 35
2014 01 07 56664 0.035263 0.322840 -0.1049943 0.0012674 -0.081189 -0.008865 0.000064 0.000196 35
2014 01 08 56665 0.034235 0.323974 -0.1061704 0.0010994 -0.081351 -0.008877 0.000102 0.000178 35
2014 01 09 56666 0.033904 0.324984 -0.1071902 0.0009721 -0.081372 -0.009063 0.000142 0.000155 35
2014 01 10 56667 0.033577 0.326468 -0.1080927 0.0008292 -0.081506 -0.009228 0.000068 0.000232 35
2014 01 11 56668 0.032842 0.327905 -0.1088467 0.0006654 -0.081499 -0.009345 0.000049 0.000258 35
2014 01 12 56669 0.031625 0.328991 -0.1094693 0.0005909 -0.081491 -0.009341 0.000064 0.000252 35
2014 01 13 56670 0.030240 0.330037 -0.1100268 0.0005450 -0.081485 -0.009271 0.000079 0.000247 35
2014 01 14 56671 0.029382 0.330675 -0.1105795 0.0005509 -0.081392 -0.009230 0.000095 0.000241 35
2014 01 15 56672 0.028560 0.331788 -0.1111660 0.0006293 -0.081195 -0.009245 0.000123 0.000207 35
2014 01 16 56673 0.027405 0.332652 -0.1118310 0.0007043 -0.080967 -0.009258 0.000155 0.000165 35
2014 01 17 56674 0.026898 0.333377 -0.1124660 0.0007897 -0.080717 -0.009275 0.000190 0.000125 35
```

时间转换关系图



全球卫星导航系统时间

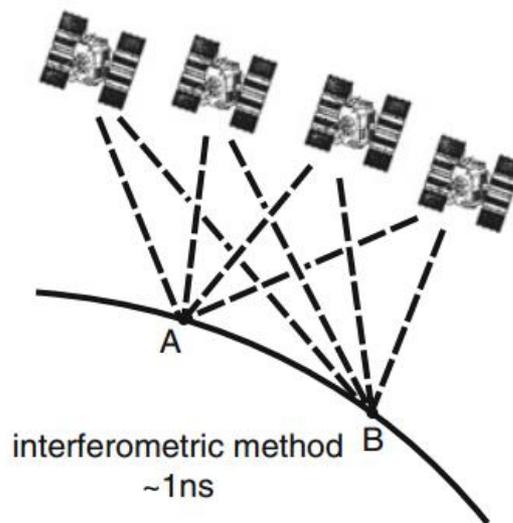
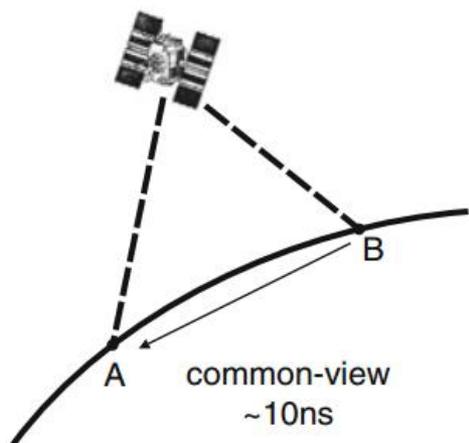
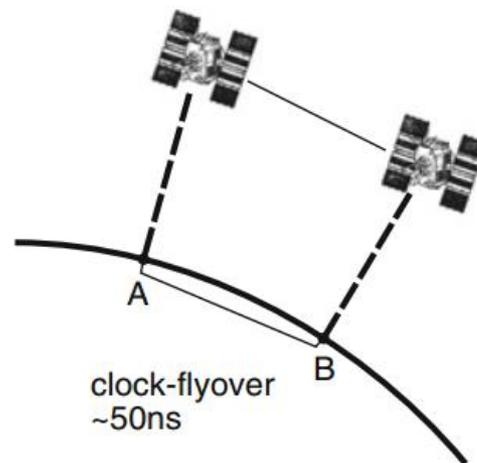
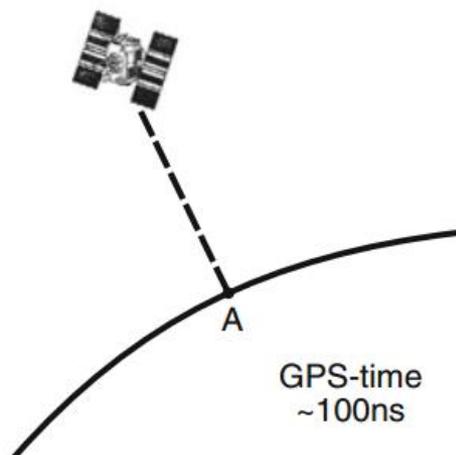
GPS Time (GPST) is a continuous time scale (no leap seconds) defined by the GPS control segment on the basis of a set of atomic clocks at the MCS and onboard the satellites. It starts at 0^h UTC (midnight) of 5–6 January 1980 (6^d0). At that epoch, the difference TAI–UTC was 19 s, hence $\text{GPS} - \text{UTC} = n - 19^{\text{s}}$. GPST is synchronised with UTC(USNO) at the 1 ms level (modulo 1 s), but actually kept within 25 ns.

Glonass Time (GLNT) is generated by the Glonass Central Synchroniser. The difference between UTC(SU) and GLNT should not exceed 1 ms plus 3 h⁴ (i.e., $t_{\text{Glonass}} = \text{UTC}(\text{SU}) + 3^{\text{h}} - \tau$, where $|\tau| < 1 \text{ ms}$), but τ is typically better than 1 μs . Note that, unlike GPS, Galileo or Beidou, the Glonass time scale implements leap seconds, like UTC.

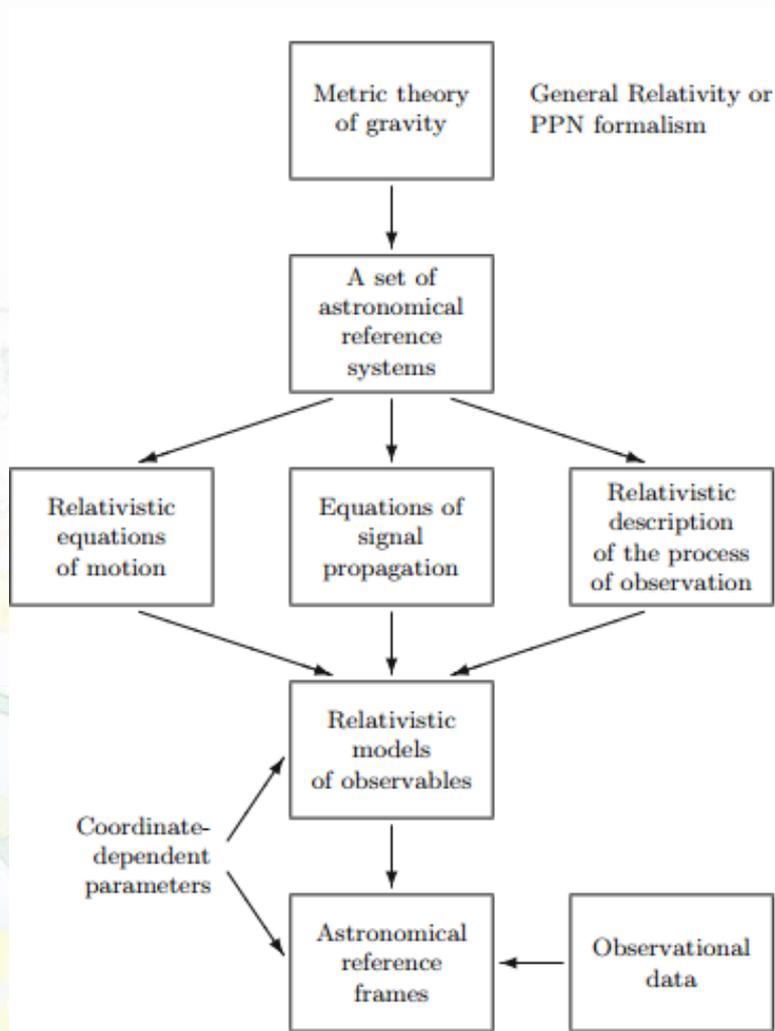
Galileo System Time (GST) is a continuous time scale maintained by the Galileo central segment and synchronised to TAI with a nominal offset below 50 ns. The GST start epoch is 0^h UTC on Sunday, 22 August 1999.

BeiDou Time (BDT) is a continuous time scale starting at 0^h UTC on 1 January 2006, and is synchronised to UTC within 100 ns (modulo 1 s).

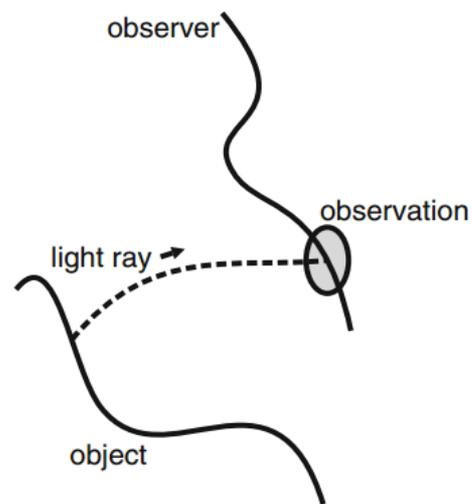
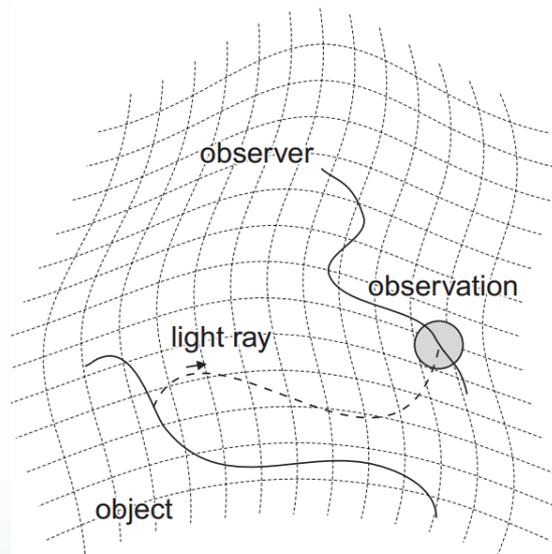
GNSS卫星授时



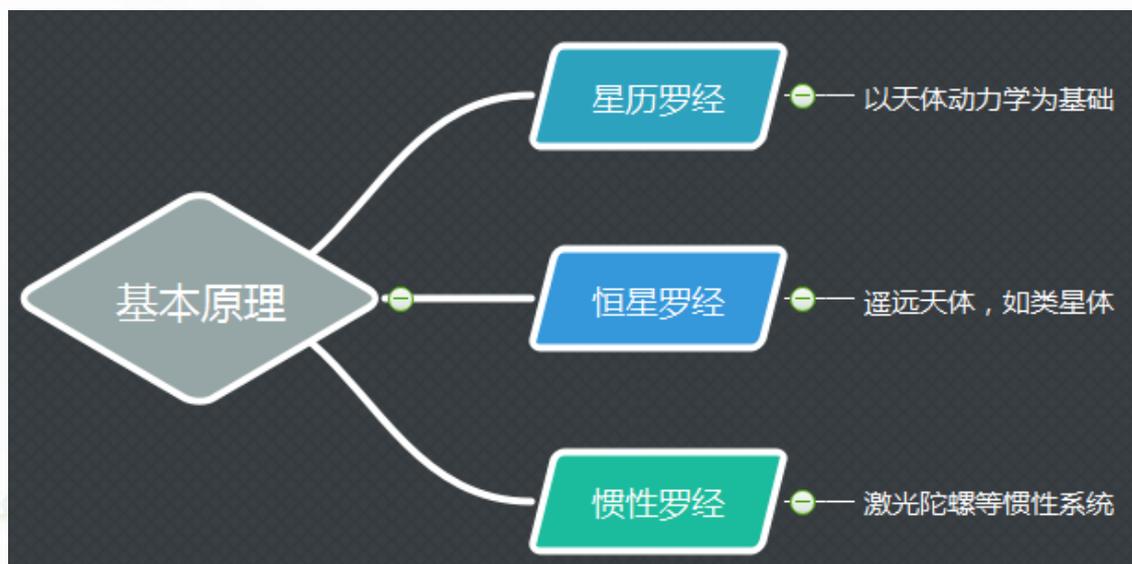
天文参考系可依据的基本原理



General principles of relativistic modeling of astronomical observations (



建立天文参考系依据的基本原理



- 其中国际天球参考框架ICRF的实现主要依靠恒星罗经实现，星表就是天文参考系的实现形式，给出了相应的参考框架的基础。星表又分别可以通过射电天文观测和光学观测实现。
- 基于大质量太阳系天体观测建立的天球参考系称为动力学参考系（BDRS），是借助于星历罗经的方法实现，当前由太阳系数值历表实现。
- 不同于天体的运动，如激光陀螺等惯性系统可以定义一个参考系，可以直接构建一个动力学非旋转参考系。但是随着天体测量精度的提升，惯性系统在建立天球参考系方面已经没有优势。

正则质心度规与太阳系质心天球参考系

- ▶ IAU2000决议B1.3, BCRS度规张量形式为 (Soffel. et al.,2003) :

$$g_{00} = -1 + \frac{2w}{c^2} - \frac{2w^2}{c^4} + \mathcal{O}(c^{-5}),$$
$$g_{0i} = g_{i0} = -\frac{4}{c^3} w^i + \mathcal{O}(c^{-5})$$
$$g_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + \frac{2}{c^2} w \right) + \mathcal{O}(c^{-4}).$$

正则质心度规仅考虑太阳系天体，忽略其他所有恒星、星系和暗物质及暗能量。

- ▶ IAU2000决议B1.3,太阳系质心天球参考系定义的度规张量在形式上与质心坐标系是一致的

$$\lim_{r \rightarrow \infty} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

地心天球参考系（GCRS）

- ▶ IAU2000决议B1.3定义了地心天球参考系（GCRS），其空间坐标相对于BCRS的空间坐标在运动学上无旋转。采用不同的度规位使得GCRS与BCRS的度规张量在形式上保持一致。

$$G_{00} = -1 + \frac{2W}{c^2} - \frac{2W^2}{c^4} + O(c^{-5})$$

$$G_{0a} = -\frac{4}{3}W^a + O(c^{-5})$$

$$G_{ab} = \delta_{ab} \left(1 + \frac{2}{c^2}W \right) + O(c^{-4})$$

W为度规位，分为外部，内部和旋转。

国际天球参考系ICRS

▶ 国际天文学联合会（IAU）在1997年8月举行的第23届大会上决定，自1998年1月1日起，国际天文学联合会天体参考系统应成为国际天体参考系统（ICRS），以取代FK5。

ICRS符合1991年IAU建议书规定的条件。它的原点于太阳系质心，通过在广义相对论的框架内对VLBI观测进行适当的建模。它的极点是由传统的IAU进动模型（Lieske等人1977）和章动（Seidelmann 1982）定义的方向。

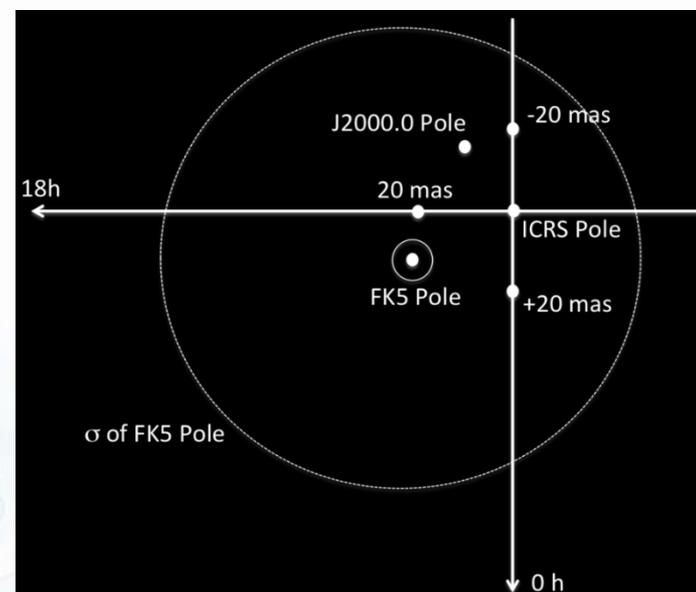
ICRS极轴和ox方向相对于类星体保持固定在 ± 20 微弧秒（ μas ）内。ICRS可通过VLBI估计一组河外星系紧凑型无线电源的赤道坐标，国际天体参考框架（ICRF）来实现。



ICRS可以通过使用IERS地球定向参数（EOP）连接到国际地球参考系。

ICRS坐标轴定义

- ▶ ICRS原点定义在太阳系质心。为了保持连续性，ICRS尽量靠近J2000平极平春分点。
- ▶ ICRS天极与FK5天极一致。VLBI观测表明J2000.0平天极与ICRS天极约18mas差异。
- ▶ ICRS的Ox轴在IERS天体参考系的初始实现中被明确定义采用一组VLBI目录中的23个射电电源的平均J2000.0位置确定。LLR观测表明J2000.0与ICRS在赤经上约有15mas差异。



天球参考框架ICRF

- ▶ 以前天球参考系的实现基于特定的星表以及相关的岁差章动模型、天体自行、光行差与视差等。
- ▶ 1998年引入ICRS直接由遥远射电源来定义。这个射电源表就是国际天球参考框架（ICRF），主要包含类星体、蝎虎天体、活动星系核等河外射电源。
- ▶ 除了VLBI测量射电源实现的ICRF外，还有光学和动力学实现的ICRF。



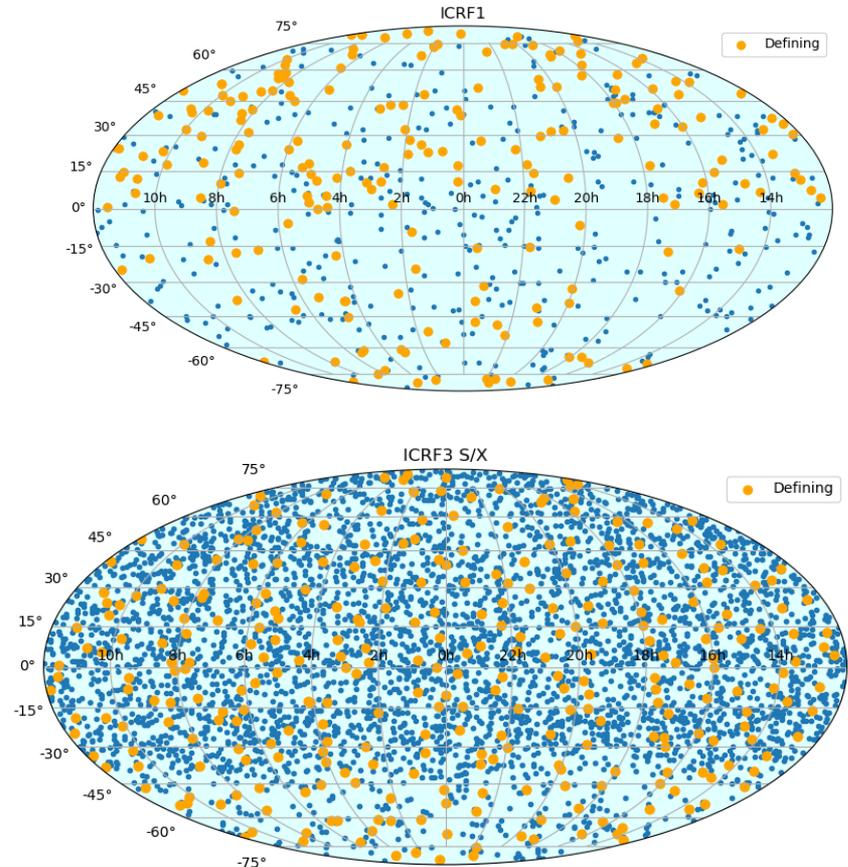
国际天球参考框架ICRF1、ICRF2、ICRF3

- ICRF由VLBI观测得到河外射电源精确坐标实现。于1998年被IAU接受。IERS及IAU联合工作组和IVS共同负责维护协议天球参考系和参考框架及其与其他框架的联系。

ICRF1：包含了608个均匀分布在天空的银河系外无线电源的J2000.0VLBI坐标。

ICRF2：IAU在第二十七届大会（2009年8月）通过的ICRF2包含3414个致密射电天文源的精确位置，是ICRF1的五倍多。此外，发现ICRF2的噪声底限仅为40微弧秒（ μas ），轴稳定性为 $10\mu\text{s}$ 。

ICRF3：IAU 2018第13届大会决议，自2019年1月1日起ICRF3取代ICRF2作为新的国际天球参考框架。



ICRF的光学实现

- ▶ 1997年IAU决定用依巴谷星表代替FK5。
- ▶ 依巴谷星表可以作为ICRS的光学实现，包含了118218颗恒星位置与自行数据，位置精度为几毫角秒，自行精度为几毫角秒每年。
- ▶ 24届IAU大会接受了依巴谷实现的天球参考框架HCRF（Hipparcos Celestial Reference Frame）

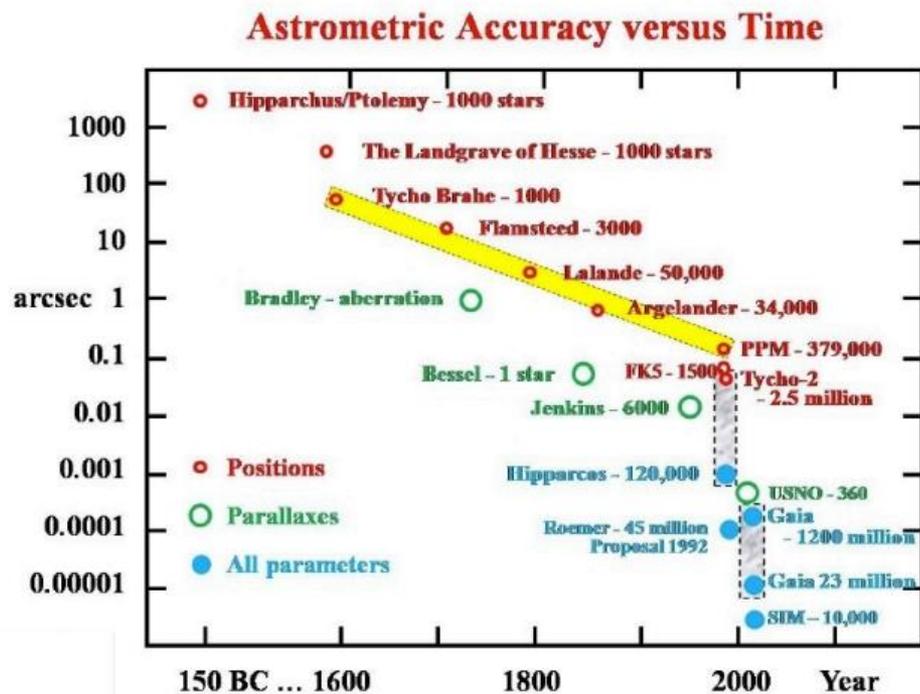


图 1.1: 近 2000 年天体测量精度的演变 [38]。

从依巴谷到GAIA卫星天体测量

- ▶ 作为 Hipparcos 卫星的后续任务，Gaia 卫星将在恒星位置精度上提高 50 至 100 倍，在观测目标的数量上提高 10,000 倍。
- ▶ GAIA 目标通过对银河系 1000 亿颗目标的百分之一进行前所未有的高精度观测来建立一个迄今为止最大、精度最高的三维银河系地图。

	Hipparcos	Gaia
星等极限	12	20
完备星等	7.3-9.0	~20
亮星极限	~0	~5-7
目标数量	1.2×10^5	2.6×10^7 to V=15 2.5×10^8 to V=18 1×10^9 to V=20
有效距离	1 kpc	0.1 Mpc
类星体	无	~ 5×10^5
星系	无	$10^6 - 10^7$
观测精度	~1 mas	7 μ as at V=10 10-20-25 μ as at V=15 130-600 μ as at V=20
宽谱	2-colour (B and V)	3-colour to V=20 & 1-colour to V=17
分光观测	无	2 bands to V=20
径向速度	无	1-15 km/s to V=16-17
观测计划	预选	完全观测

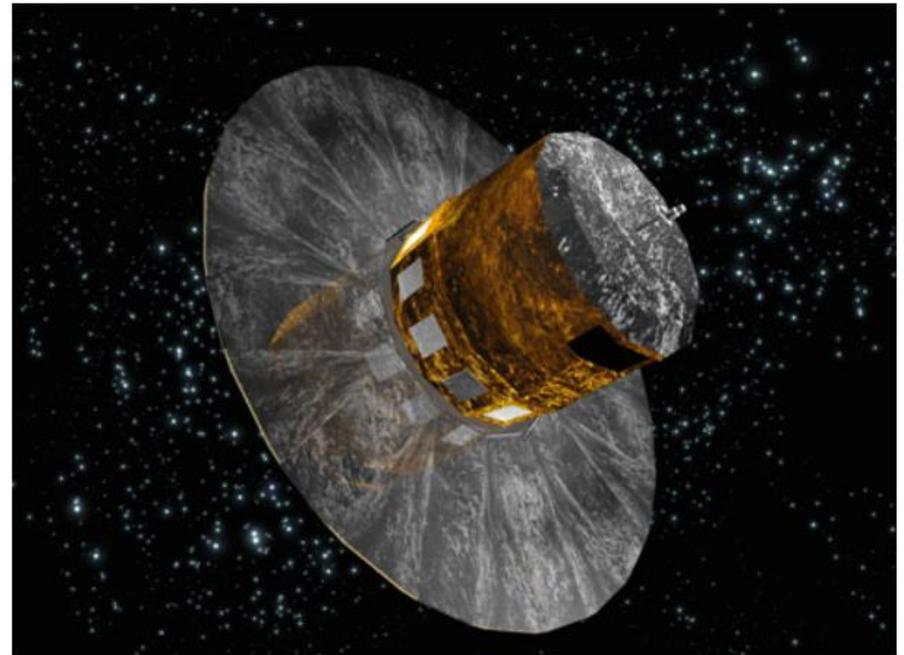


Illustration of the Gaia satellite; from ESA, C. Carreau. Credit: ESA

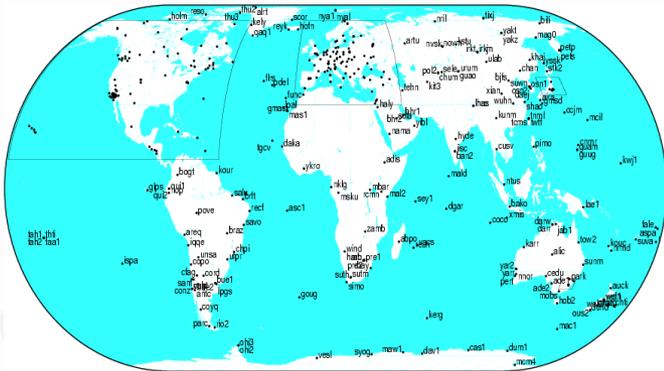
协议地球参考系 (TRS)

- ▶ TRS是随地球一起转动的参考系，又叫地心地固 (ECEF) 参考系。
- ▶ 国际地球自转服务 (IERS) 定义了国际协议地球参考系 (ITRS) (原点、尺度、定向、整体无旋转)。
- ▶ ITRS的一个实现叫协议地球参考框架 (ITRF)，ITRF 由一组地球上的参考点坐标确定，并定期进行更新。
- ▶ 各导航系统对应的坐标系原则上需要对齐到ITRF。WGS-84, PZ-90, GTRF, BDCS。

国际地球参考系（ITRS）与参考框架（ITRF）

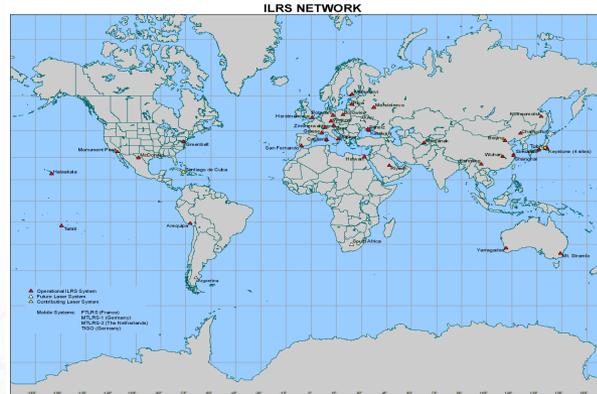
- ▶ ITRS由1991年IUGG2号决议定义。由VLBI、SLR、GPS和DORIS等技术予以实现和维持。ITRS原点位于包括海洋与大气在内的地球质量中心，时间变量为地球坐标时TCG。
- ▶ ITRS的坐标轴的时间变化满足考虑全球水平构造运动的无整体旋转条件。在ITRS中地壳运动的总角动量为零。

国际地球参考框架 ITRF



IGS 2009 Feb 4 10:48:30

GNSS



SLR



VLBI



DORIS

国际地球参考框架 ITRF

多技术基准站网的建立和维护

基准站网的观测，解算基准站历元坐标

多技术数据融合处理，解算国际地球参考框架解

基准站网：空间基准的重要基础设施，是位置服务等工程的重要支撑

数据中心：数据和产品存储；
分析中心：观测数据处理，生成产品

综合中心：多技术多分析中心的多网数据产品融合处理

目前ITRS的实现有ITRF-92, 93, 94, 96, 2000, 2005, 2008与2014.不同的实现可以由7参数的Helmert变换联系。

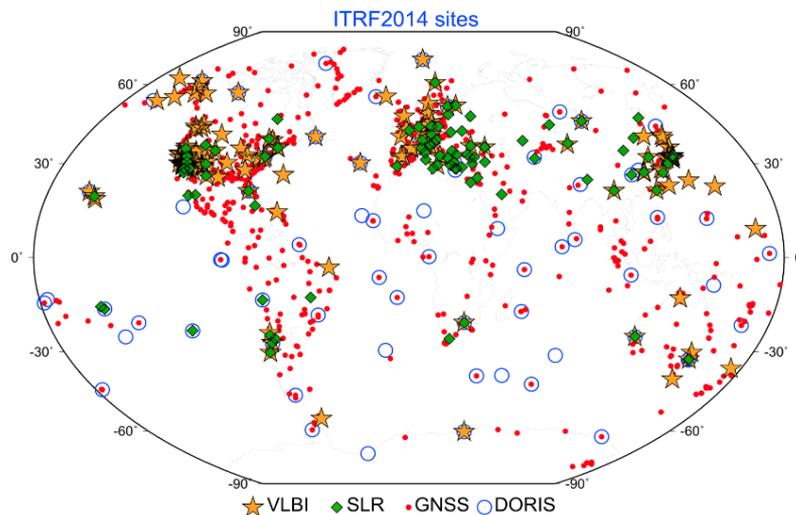
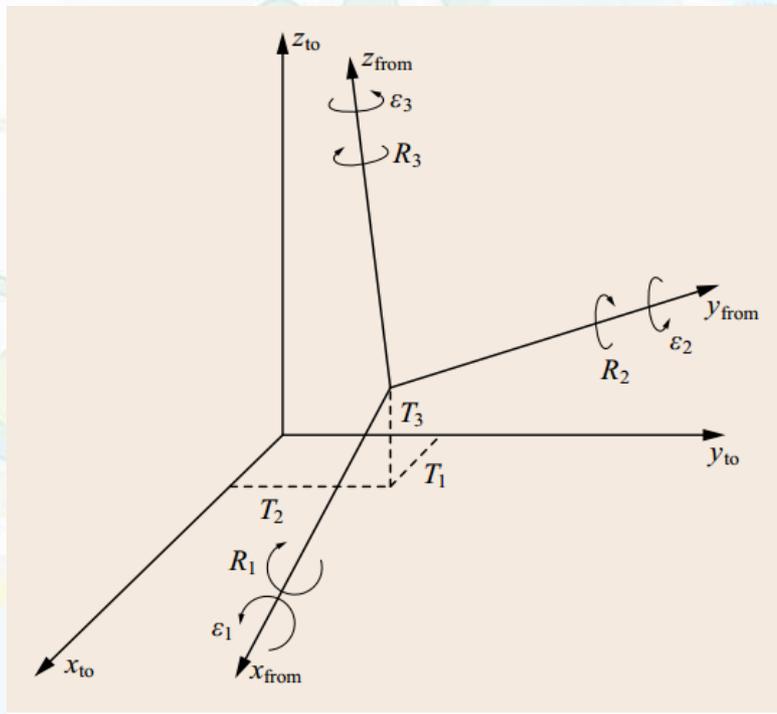


Figure 1. ITRF2014 network highlighting VLBI, SLR, and DORIS sites collocated with GNSS.

大地参考框架转换

- ▶ 不同大地参考框架可以通过以下方式实现转换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{TRF2}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{TRF1}} + \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & -R_3 & R_2 \\ R_3 & D & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{TRF1}}$$



3个平移
3个旋转
1个尺度因子

根据多台站数据求解转换参数

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & 0 & -z_1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_1 & z_1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 0 & 1 & z_1 & -y_1 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ D \\ \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

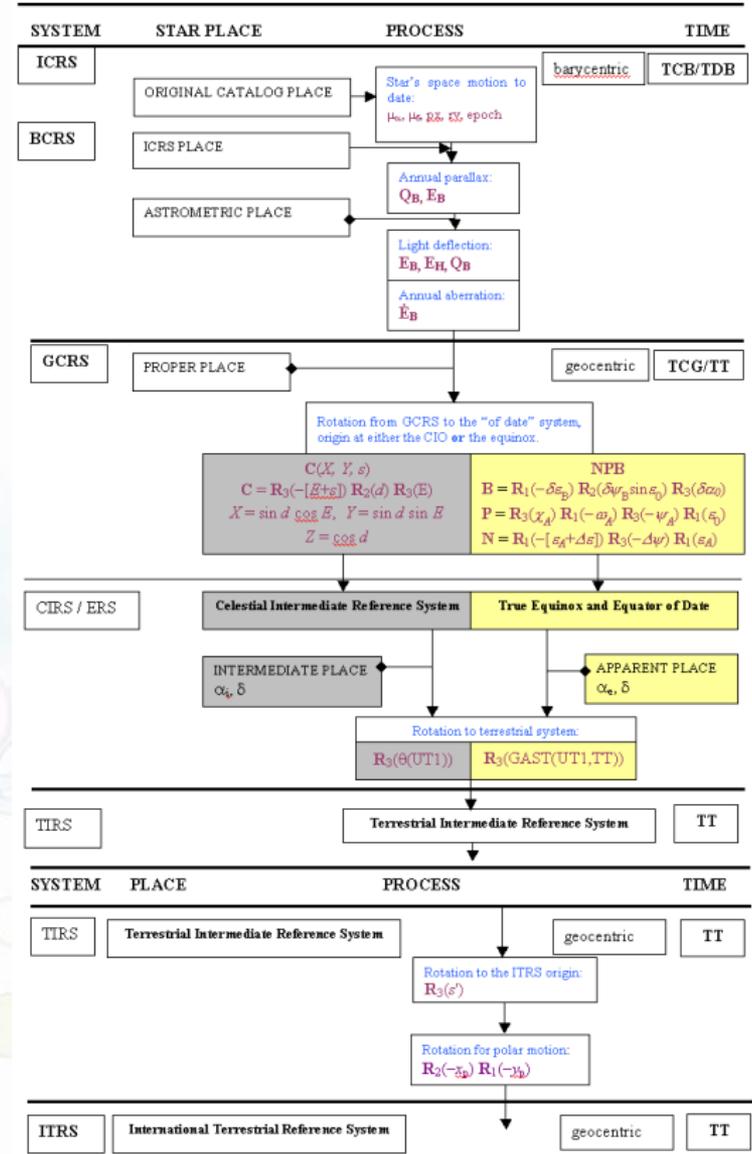
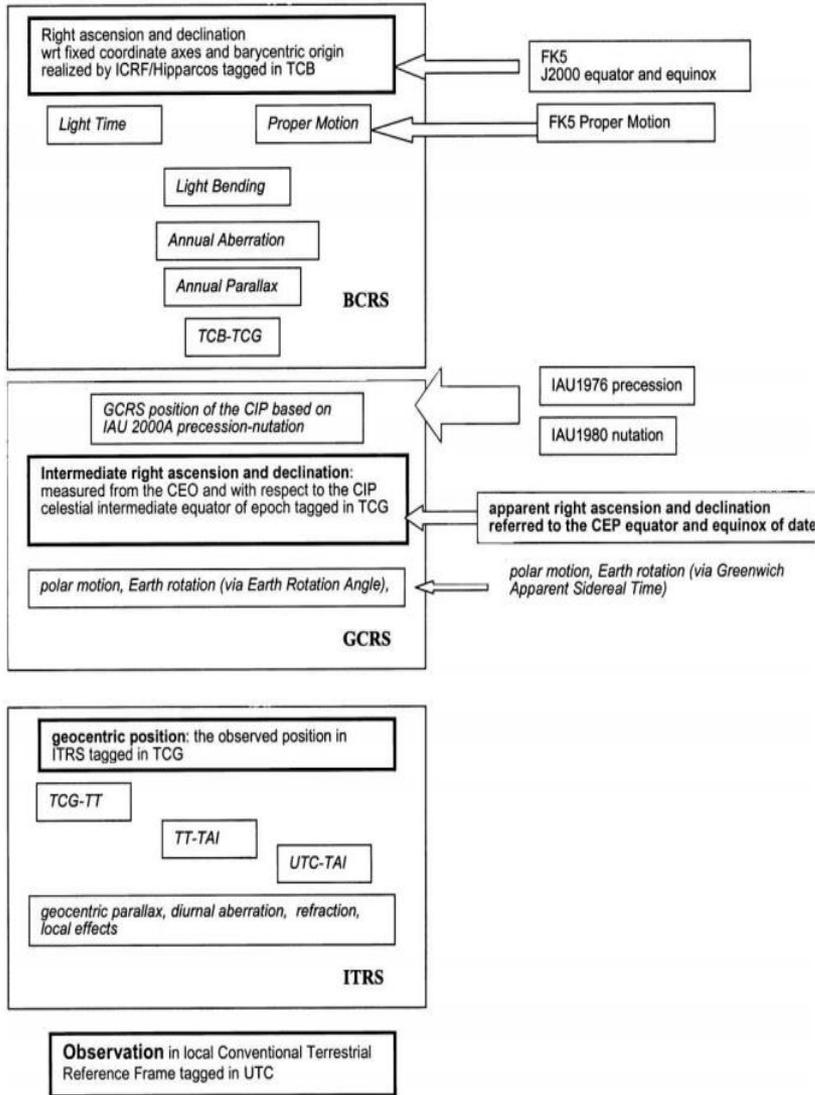
若有n个台站，则可由最小二乘拟合求出。

常见大地参考框架之间的转换参数

From	To	$T_1 \dot{T}_1$ (cm) (cm/y)	$T_2 \dot{T}_2$ (cm) (cm/y)	$T_3 \dot{T}_3$ (cm) (cm/y)	$R_1 \dot{R}_1$ (0.001") (0.001"/y)	$R_2 \dot{R}_2$ (0.001") (0.001"/y)	$R_3 \dot{R}_3$ (0.001") (0.001"/y)	$D \dot{D}$ (10^{-8}) (10^{-8} /y)	t_0
BTS84	BTS85	+5.4	+2.1	+4.2	-0.9	-2.5	-3.1	-0.5	1984
BTS85	BTS86	+3.1	-6.0	-5.0	-1.8	-1.8	-5.81	-1.7	1984
BTS86	BTS87	-3.8	+0.3	-1.3	-0.4	+2.5	+7.5	-0.2	1984
BTS87	ITRF0	+0.4	-0.1	+0.2	0.0	0.0	-0.2	-0.1	1984
ITRF0	ITRF88	+0.7	-0.3	-0.7	-0.3	-0.2	-0.1	+0.1	1988
ITRF88	ITRF89	+0.5	+3.6	+2.4	-0.1	0.0	0.0	-0.31	1988
ITRF89	ITRF90	-0.5	-2.4	+3.8	0.0	0.0	0.0	-0.3	1988
ITRF90	ITRF91	+0.2	+0.4	+1.6	0.0	0.0	0.0	-0.03	1988
ITRF91	ITRF92	-1.1	-1.4	+0.6	0.0	0.0	0.0	-0.14	1988
ITRF92	ITRF93	-0.2	-0.7	-0.7	-0.39	+0.80	-0.96	+0.12	1988
		-0.29	+0.04	+0.08	-0.11	-0.19	+0.05	0.0	
ITRF93	ITRF94	-0.6	+0.5	+1.5	+0.39	-0.80	+0.96	-0.04	1988
		0.29	-0.04	-0.08	+0.11	+0.19	-0.05	0.0	
ITRF94	ITRF96	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1997
		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
ITRF96	ITRF97	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1997
		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	
ITRF2000	ITRF2005	-0.01	+0.08	+0.58	0.0	0.0	0.0	-0.040	2000
		+0.02	-0.01	+0.18	0.0	0.0	0.0	-0.008	
ITRF2005	ITRF2008	+0.05	+0.09	+0.47	0.0	0.0	0.0	-0.094	2005
		-0.03	0.00	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	

From	To	$T_1 \dot{T}_1$ (cm) (cm/y)	$T_2 \dot{T}_2$ (cm) (cm/y)	$T_3 \dot{T}_3$ (cm) (cm/y)	$\epsilon_1 \dot{\epsilon}_1$ (0.001") (0.001"/y)	$\epsilon_2 \dot{\epsilon}_2$ (0.001") (0.001"/y)	$\epsilon_3 \dot{\epsilon}_3$ (0.001") (0.001"/y)	$D \dot{D}$ (10^{-8}) (10^{-8} /y)	t_0
WGS72	ITRF90	-6.0	+51.7	+472.3	+18.3	-0.3	-547.0	+23.1	1984
WGS84 ^a	ITRF90	-6.0	+51.7	+22.3	+18.3	-0.3	+7.0	+1.1	1984
PZ-90	PZ-90.02	-107	-3	+2	0	0	-130	-22	2002
PZ-90.02	WGS-84(1150)	-36	+8	+18	0	0	0	0	2002
PZ-90.11	ITRF2008	-0.3	-0.1	0.0	+0.019	-0.042	+0.002	0.0	2010
ITRF96	NAD83(CORS96)	+99.1	-190.7	-51.3	+25.8	+9.7	+11.7	0.0	1997
		0.0	0.0	0.0	+0.053	-0.742	-0.032	0.0	
ITRF97	NAD83(CORS96)	+98.9	-190.7	-50.3	+25.9	+9.4	+11.6	-0.09	1997
		+0.07	-0.01	+0.19	+0.067	-0.757	-0.031	-0.02	
ITRF2000	NAD83(CORS96)	+99.6	-190.1	-52.2	+25.9	+9.4	+11.6	+0.06	1997
		+0.07	-0.07	+0.05	+0.067	-0.757	-0.051	-0.02	

ICRS到ITRS转换步骤



BCRS与GCRS坐标转换

$$T = t - \frac{1}{c^2} [A(t) + \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{r}_E] \\ + \frac{1}{c^4} [B(t) + B^i(t)r_E^i + B^{ij}(t)r_E^i r_E^j + C(t, \mathbf{x})] + \mathcal{O}(c^{-5}), \\ X^a = \delta_{ai} \left[r_E^i + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} v_E^i \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{r}_E + w_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E) r_E^i + r_E \mathbf{a}_E \cdot \mathbf{r}_E - \frac{1}{2} a_E^i r_E^2 \right) \right] \\ + \mathcal{O}(c^{-4}),$$

$$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{1}{2} v_E^2 + w_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E),$$

$$\frac{d}{dt} B(t) = -\frac{1}{8} v_E^4 - \frac{3}{2} v_E^2 w_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E) + 4v_E^i w_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E) + \frac{1}{2} w_{\text{ext}}^2(\mathbf{x}_E),$$

$$B^i(t) = -\frac{1}{2} v_E^2 v_E^i + 4w_{\text{ext}}^i(\mathbf{x}_E) - 3v_E^i w_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E),$$

$$B^{ij} = -v_E^i \delta_{ai} Q^a + 2 \frac{\partial}{\partial x^j} w_{\text{ext}}^i(\mathbf{x}_E) - v_E^i \frac{\partial}{\partial x^j} w_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E) + \frac{1}{2} \delta^{ij} \dot{w}_{\text{ext}}(\mathbf{x}_E),$$

$$C(t, \mathbf{x}) = -\frac{1}{10} r_E^2 (\dot{\mathbf{a}}_E \cdot \mathbf{r}_E).$$

$\mathbf{x}_e(t), \mathbf{v}_e(t), \mathbf{a}_e(t)$

分别表示地心
在BCRS中的
位置速度和加
速度

GCRS到ITRS转换

$$[\text{ITRS}] = \mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{M}(t) \cdot [\text{GCRS}]$$

$\mathbf{M}(t)$, $\mathbf{R}(t)$ 和 $\mathbf{W}(t)$ 分别是由于 CIP 在天球参考系中的运动 (岁差-章动)、地球的自转以及 CIP 在地球参考系中的运动 (极移) 引起的旋转矩阵。

$$t = (\text{TT} - 2000 \text{ January } 1\text{d } 12\text{h TT}) / 36\,525.$$

天球中间参考系 (CIRS), Z 轴是 CIP, X 轴是 CIO;
地球中间参考系 (TIRS), Z 轴是 CIP, X 轴是 TIO;
真赤道参考系, Z 轴是 CIP, X 轴是 t 时刻的真春分点。

IAU2000岁差-章动模型

- ▶ 2003年1月1日起，IAU2000A岁差-章动模型正式代替IAU1976岁差与IAU1980章动模型。新的模型考虑了海洋和大气潮汐、地幔的滞弹性及缔合与地幔之间的耦合影响。

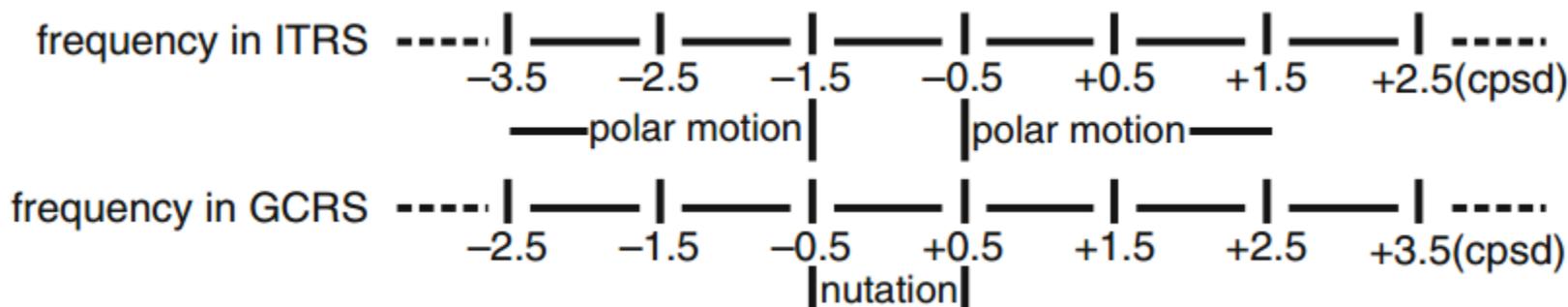
- ▶ 框架偏差矩阵

CIP在GCRS中的位置可以由一下矩阵获得

$M = NPB$ ，其中B为框架偏差矩阵

天球中间极

IAU 2000 决议以前，瞬时自转轴是由天球历书极 (CEP) 来实现的； CEP 定义要求在天球和地球参考系中没有准周日运动。但是考虑到目前的观测精度和短于 1 d 的观测分辨率，发现明显存在高频的章动和极移 (短于 1 d)，这使得 CEP 的定义不再成立。因此重新定义了天球中间极 (CIP)，规定它在天球参考系中的周期运动只包含周期大于 2 d 的项，而其他的高频项都归于极移运动。

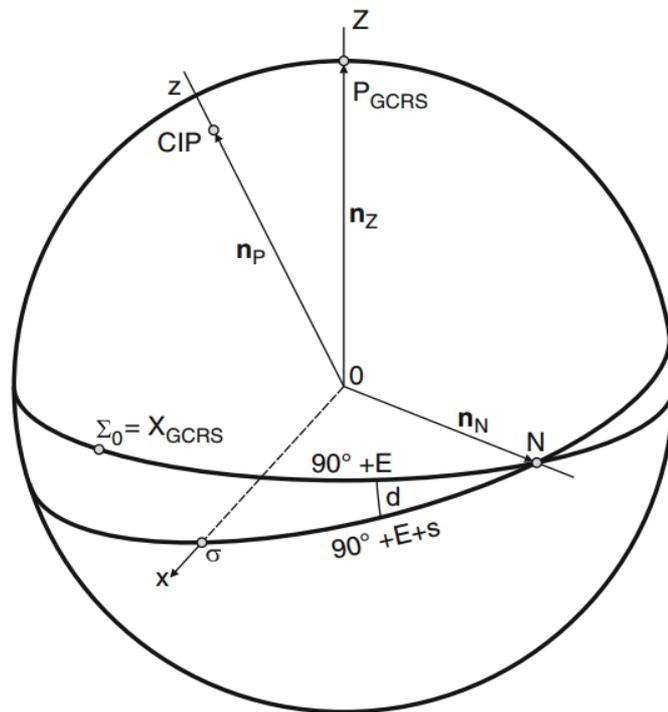


天球中间零点、地球中间零点

新的坐标系的x轴，即天球中间零点CIO，是运动学定义的与黄道无关的一个点。

在CIP赤道上的x轴用sigma表示，如右图。

类似于GCRS中的CIO，同样可以在ITRS中定义地球中间零点TIO。



$$s' = (1/2) \int_{t_0}^t (x_p \dot{y}_p - \dot{x}_p y_p) dt.$$

岁差章动的CIO转换

$$M_{\text{CIO}} = R_3(-s) \cdot M_{\Sigma}$$

$$M_{\Sigma} = R_3(-E) \cdot R_2(d) \cdot R_3(E) = \begin{pmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & -X \\ -aXY & 1 - aY^2 & -Y \\ X & Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{pmatrix}$$

IAU 2006/2000 岁差-章动模型中， X 和 Y 的表达式为

X 和 Y 包含了参考架偏差、岁差和章动的影响，并直接给出了CIP在GCRS中的位置。CIO的位置为

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t) = -0''.016\,617 + 2004''.191\,898\,t - 0''.429\,782\,9\,t^2 - \\ \quad 0''.198\,618\,34\,t^3 + 0''.000\,007\,5\,t^4 + 0''.000\,005\,928\,5\,t^5 + \\ \quad \sum_i [(a_{s,0})_i \sin(\text{ARGUMENT}) + (a_{c,0})_i \sin(\text{ARGUMENT})] + \\ \quad \sum_{k,i} [(a_{s,k})_i \sin(\text{ARGUMENT}) + (a_{c,k})_i \sin(\text{ARGUMENT})] t^k \\ Y(t) = -0''.006\,951 - 0''.025\,896\,t - 22''.407\,274\,7\,t^2 + \\ \quad 0''.001\,900\,59\,t^3 + 0''.001\,112\,526\,t^4 + 0''.000\,000\,135\,8\,t^5 + \\ \quad \sum_i [(b_{s,0})_i \sin(\text{ARGUMENT}) + (b_{c,0})_i \sin(\text{ARGUMENT})] + \\ \quad \sum_{k,i} [(b_{s,k})_i \sin(\text{ARGUMENT}) + (b_{c,k})_i \sin(\text{ARGUMENT})] t^k, \end{array} \right.$$

$$s(t) + XY/2 = 94.0 + 3\,808.65\,t - 122.68\,t^2 - 72\,574.11\,t^3 + 27.98\,t^4 + \\ 15.62\,t^5 + \sum_i [(c_{s,0})_i \sin(\text{ARGUMENT}) + (c_{c,0})_i \sin(\text{ARGUMENT})] + \\ \sum_{k,i} [(c_{s,k})_i \sin(\text{ARGUMENT}) + (c_{c,k})_i \sin(\text{ARGUMENT})] t^k.$$

岁差章动的经典春分点转换方式

$$M_{\text{eqx}} = N \cdot P \cdot B$$

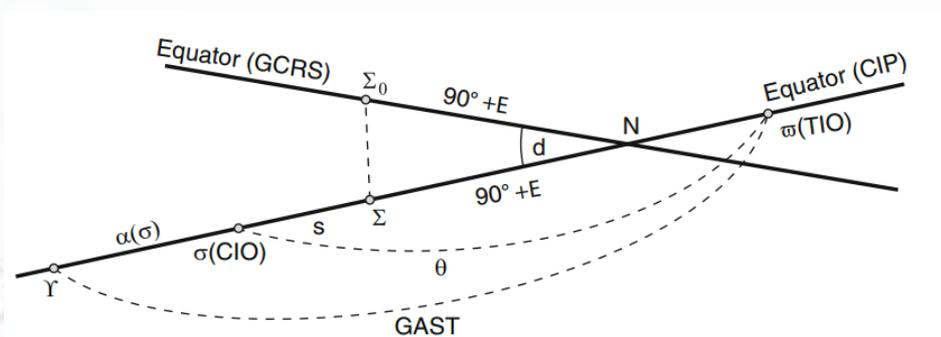
$$\begin{cases} B = R_1(-\eta_0) \cdot R_2(\xi_0) \cdot R_3(d\alpha_0) \\ P = R_3(\chi_A) \cdot R_1(-\omega_A) \cdot R_3(-\psi_A) \cdot R_1(\epsilon_0) \\ N = R_1(-[\epsilon_A + \Delta\epsilon]) \cdot R_3(-\Delta\psi) \cdot R_1(\epsilon_A) \end{cases}$$

Fukushima-
Williams 岁差角

$$\begin{cases} \bar{\gamma} = \gamma_{J2000.0} + d\gamma_0 \\ = -0''.052\,928 + 10''.556\,378\,t + 0''.493\,204\,4\,t^2 - \\ 0''.003\,123\,8\,t^3 - 0''.000\,002\,788\,t^4 + 0''.000\,000\,026\,0\,t^5 \\ \bar{\phi} = \phi_{J2000.0} + \eta_0 \\ = 84\,381''.412\,819 - 46''.811\,016\,t + 0''.511\,268\,t^2 + \\ 0''.000\,532\,89\,t^3 - 0''.000\,000\,440\,t^4 - 0''.000\,000\,014\,8\,t^5 \\ \bar{\psi} = \psi_{J2000.0} + \xi_0 / \sin \epsilon_0 \\ = -0''.041\,775 + 5038''.481\,484\,t + 1''.558\,417\,4\,t^2 - \\ 0''.000\,185\,22\,t^3 - 0''.000\,026\,452\,t^4 - 0''.000\,000\,014\,8\,t^5 \\ \epsilon_A = +84\,381''.406 - 46''.836\,769\,t - 0''.000\,183\,1\,t^2 + \\ 0''.002\,003\,40\,t^3 - 0''.000\,000\,576\,t^4 - 0''.000\,000\,043\,4\,t^5, \end{cases}$$

地球自转角与GAST

地球自转角ERA是T时刻在CIP赤道上CIO与TIO之间的角度。经典坐标系中相应的量为GAST，是春分点与TIO之间的角度。



与IAU2000A岁差章动模型相符合的GAST的表达式为，其中CT是对经典运动学春分点表达式的微小修正，使得其精度达到微角秒量级。

$$GAST = GMST + \Delta\psi \cos \epsilon_A + CT,$$

$$CT = \sum_{s,k} (C'_{s,k} \sin \alpha_k + C'_{c,k} \cos \alpha_k) - 0''.00000087 t \sin \Omega$$

地球自转矩阵

基于CIO转换

$$\mathbf{R}_{\text{CIO}}(t) = \mathbf{R}_3(\text{ERA}(\text{UT1}))$$

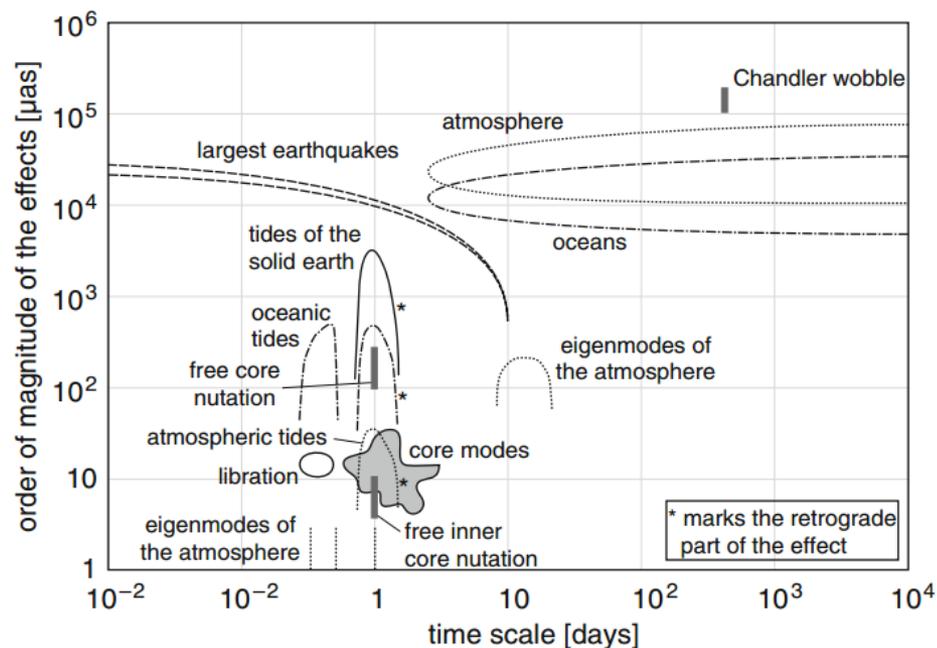
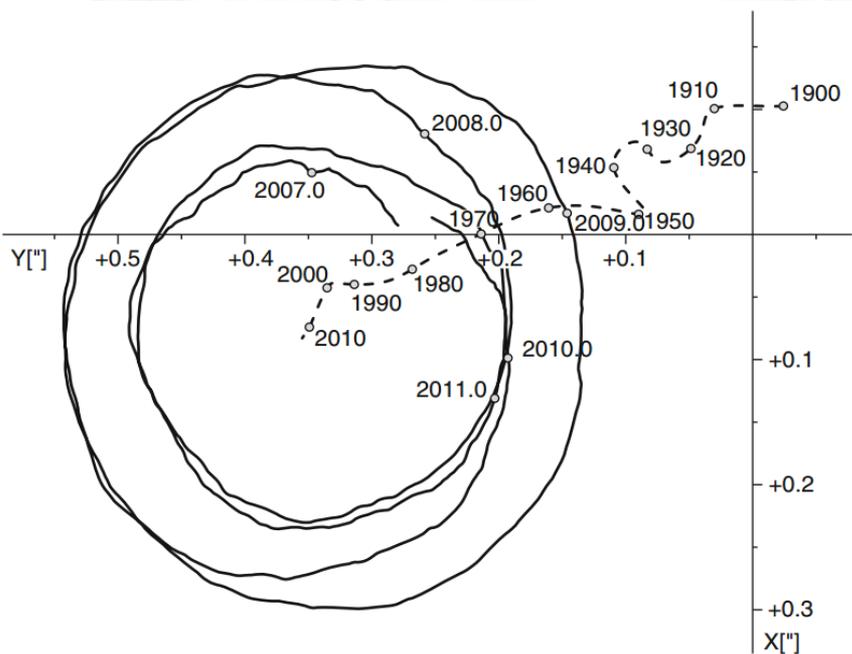
基于春分点

$$\mathbf{R}_{\text{eqx}}(t) = \mathbf{R}_3(\text{GST})$$

$$\text{GST} = dT_0 + \text{ERA}(\text{UT1}) + \int_{t_0}^t (\dot{\psi}_A + \Delta\dot{\psi}_1) \cos(\omega_A + \Delta\epsilon_1) dt - \chi_A + \Delta\psi \cos \epsilon_A + \Delta\psi_1 \cos \omega_A,$$

极移

极移是地球的自转轴相对于地球表面发生的移动显现。欧拉在1765年首次对极移产生的原因进行了说明。现在地球自转轴的概念已经被协议中间极代替，地极移动是指中间极的运动。



极移矩阵

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{R}_1(-y_p) \cdot \mathbf{R}_2(-x_p) \cdot \mathbf{R}_3(s')$$

s' 提供 TIO 在 CIP 赤道上的位置, 是 x_p 和 y_p 的函数

$$s'(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (x_p \dot{y}_p - \dot{x}_p y_p) dt$$

GCRS到ITRS转换（春分点和CIO方式）

- ▶ 基于春分点的经典转换。从处理框架偏差开始，然后利用IAU2000A进行岁差章动改正，使用GAST处理地球自转再进行极移改正。

$$X_T = W(t) R_3(GAST, t, UT1) N(t) P(t) B X_I$$

- ▶ 利用CIP的坐标直接处理框架偏差、岁差与章动，然后确定CIO的位置，最后处理地球自转和极移。

$$X_T = W(t) R_3(\theta, UT1) Q(t) X_I$$

$$Q_{CIO} = R_3(-s) \begin{pmatrix} 1 - aX^2 & -aXY & -X \\ -aXY & 1 - aY^2 & -Y \\ X & Y & 1 - a(X^2 + Y^2) \end{pmatrix} \quad R_{CIO}(t) = R_3(\Phi_{ERA})$$

国际天球参考系的动力学实现

- ▶ 太阳系质心动力学参考系（BDRS，正式场合称为ICRS的协议动力学实现），是基于大质量太阳系天体观测建立的坐标系。由太阳系的现代数值星历实现。
- ▶ IERS推荐由JPL的DE405和月球历表LE405作为计算行星和月球星历。



建立行星历表的观测方法

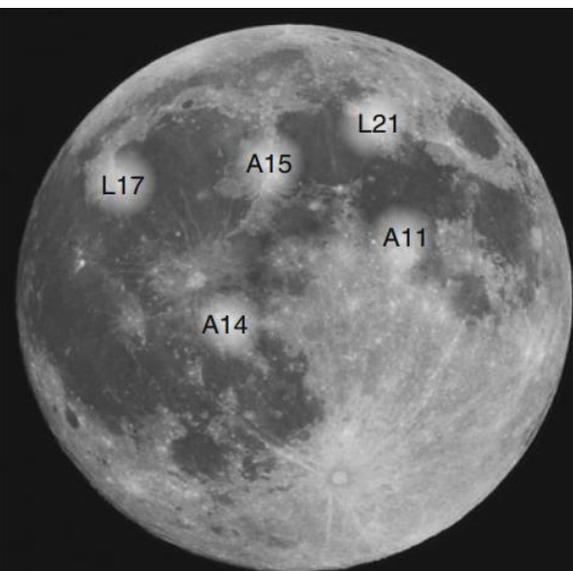
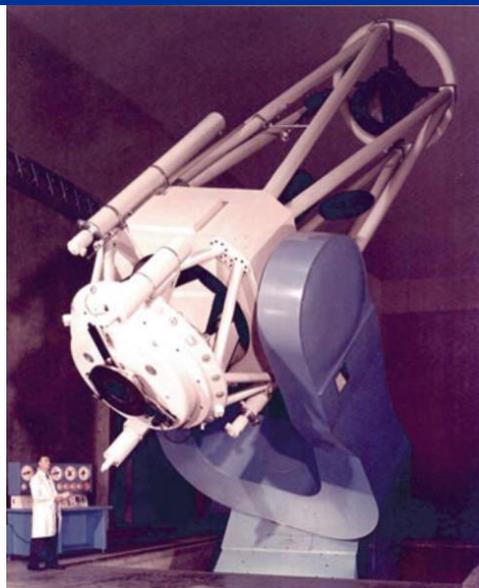
观测方法

地基光学天体测量

月球激光测距

行星雷达观测

航天器雷达跟踪



JPL行星历表

- ▶ JPL 星历是由美国喷气推进实验室研制，目前是为太空导航，行星探测以及精密天文观测的分析和归算提供精密数据，目前JPL的主要星历有DE200、DE403、DE405、DE430。

如DE405，覆盖了从1600年到2170年大约600年时间段。

所有星历都基于各自运动方程进行严格数值积分。除了月球、行星、和太阳的点质量相互作用外，部分小行星的摄动和运动方程的相对论后牛顿修正也要考虑。另外，日月扭矩对地球形状的影响，以及地球和太阳扭矩对月球形状的影响都精细了考虑

Mass parameters from DE421 expressed as ratios and as TDB-compatible values.

	GM_{\odot}/GM_i	$GM_i/\text{km}^3\text{s}^{-2}$
Mercury	6023597.400017	22032.090000
Venus	408523.718655	324858.592000
Earth	332946.048166	398600.436233
Moon	27068703.185436	4902.800076
Mars	3098703.590267	42828.375214
Jupiter	1047.348625	126712764.800000
Saturn	3497.901768	37940585.200000
Uranus	22902.981613	5794548.600000
Neptune	19412.237346	6836535.000000
Pluto	135836683.767599	977.000000

	GM_{\oplus}/GM_i
Earth-Moon mass ratio	81.3005690699

天体动力学方程 (IERS2003\2010)

把质量单极子的度规位带入到测地线方程中得到EIH方程，
该方程是天体动力学方程，是太阳系历表的基础。

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_i = & -k^2 \sum_{j=0, j \neq i}^n m_j \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \left\{ 1 - \frac{2k^2(\beta + \gamma)}{c^2} \sum_{k=0, k \neq i}^n \frac{m_k}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|} \right. \\ & - \frac{k^2(2\beta - 1)}{c^2} \sum_{k=0, k \neq j}^n \frac{m_k}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|} + \gamma \frac{\dot{\mathbf{x}}_i^2}{c^2} + (1 + \gamma) \frac{\dot{\mathbf{x}}_j^2}{c^2} \\ & \left. - \frac{2(1 + \gamma)}{c^2} \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_j - \frac{3}{2c^2} \left[\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \dot{\mathbf{x}}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \right]^2 - \frac{1}{2c^2} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \cdot \ddot{\mathbf{x}}_j \right\} \\ & + \frac{k^2}{c^2} \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \left\{ (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) [(2 + 2\gamma) \dot{\mathbf{x}}_i \right. \\ & \left. - (1 + 2\gamma) \dot{\mathbf{x}}_j] \right\} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) + \frac{k^2(3 + 4\gamma)}{2c^2} \sum_{j=0, j \neq i}^n m_j \frac{\ddot{\mathbf{x}}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}, \end{aligned}$$

太阳系自然天体历表初步工作

A&A 641, A108 (2020)
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/202038556>
© ESO 2020

**Astronomy
&
Astrophysics**

The orbit of Triton with new precise observations and the INPOP19a ephemeris

K. Tang (唐凯)¹, Y. Z. Song (宋叶志)¹, K. X. Shen (沈凯先)², R. C. Qiao (乔荣川)², Z. H. Tang (唐正宏)^{1,3},
Y. Yu (于涌)^{1,3}, H. Y. Zhang (张会彦)⁴, and D. Yan (严丹)⁵

¹ Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, 80 Nandan Road, Shanghai 200030, PR China
e-mail: tangkai@shao.ac.cn

² National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, No.3 East Shuyuan Road, Lintong, Shaanxi 710600, PR China

³ School of Astronomy and Space Science, University of Chinese Academy of Sciences, No.19(A) Yuquan Road, Shijingshan District, Beijing 100049, PR China

⁴ School of Fundamental Studies, Shanghai University of Engineering Science, 333 Long Teng Road, Shanghai 201620, PR China

⁵ School of Physics and Electronic Information, Huanggang Normal University, 146 Xingang Second Road, Huanggang, Hubei 438000, PR China

Received 2 June 2020 / Accepted 30 June 2020

ABSTRACT

Aims. The *Gaia* catalogue brings new opportunities and challenges to high-precision astronomy and astrometry. The precision of data reduction is therefore improved by a large number of reference stars with high-precision positions and proper motions. Numerous precise positions for Triton are obtained from the latest observations using the *Gaia* catalogue. Furthermore, the new INPOP19a planetary ephemeris, which also fits the observations from the *Gaia* Data Release 2, has recently become available. In this paper, a new orbit of Triton is calculated using the latest precise charge-coupled device (CCD) observations and the INPOP19a ephemeris.

Methods. Triton's orbital solution is calculated using a numerical integrator, while the orientation of Neptune's pole in particular is obtained by integrating the simplified Euler's equations of motion. We determine the orbit of Triton over 170 yr based on 11 040 Earth-based observations made between 1847 and 2016 and on Voyager 2 data. The positions of the Sun and planets are provided by the INPOP19a ephemeris. We compare our results to those from other previous works to check the influences on Triton's orbit from different planetary ephemerides.

Results. A new orbit of Triton is provided here. The root-mean-square of the residuals for the Earth-based CCD absolute observations are 0.102'' in right ascension and 0.142'' in declination. Although most different planetary ephemerides have large differences in Neptune's position, the orbits of Triton using different planetary ephemerides are still close, under similar dynamical models. The Voyager 2 data add a constraint on Triton's orbit here.

Key words. astrometry – celestial mechanics – ephemerides – planets and satellites: individual: Neptune – planets and satellites: individual: Triton

轨道计算中坐标系简化问题

- 在一些特殊条件下，可能需要考虑坐标系计算简化问题。
- 适当舍去计算岁差章动量的高阶多项式。
- 对岁差章动量提前计算，并进行不同阶数的插值处理。
- 采取不同的插值阶数对EOP插值。
- 是否考虑海潮修正。

Angle	Maximum allowed error			X, Y, s Representation	EOPs	EOP Interpolation	Ocean tide corrections
	Surf/LEO	GPS	GEO				
0.7 deg	90 km	330 km	520 km	None (GMST Only to 2050)	None	–	–
0.37 deg	46 km	170 km	270 km	None (GMST Only to 2025)	None	–	–
10 asec	350 m	1.3 km	2.1 km	4-term $X, Y, No s$	None	–	–
1.3 asec	46 m	170 m	270 m	4-term $X, Y, No s$	$\Delta UT1$	Nearest	No
0.8 asec	28 m	110 m	170 m	6-term $X, Y, No s$	$\Delta UT1$	Nearest	No
0.66 asec	23 m	85 m	140 m	15-term $X, Y, No s$	$\Delta UT1$	Nearest	No
0.14 asec	4.7 m	18 m	28 m	15-term $X, Y, No s$	$x_p, y_p, \Delta UT1$	Nearest	No
23 mas	0.80 m	3.0 m	4.7 m	Interp, Lagr 7, No s	$x_p, y_p, \Delta UT1$	Linear	No
2.3 mas	7.9 cm	29 cm	46 cm	Interp, Lagr 7, Simple s	$x_p, y_p, \Delta UT1$	Linear	No
0.19 mas	6.5 mm	2.4 cm	3.9 cm	Interp, Lagr 7, Simple s	All EOPs	Lagr 3	Yes
71 μ as	2.5 mm	9.1 mm	15 mm	Interp, Lagr 7, Simple s	All EOPs	Lagr 5	Yes
37 μ as	1.3 mm	4.8 mm	7.5 mm	Interp, Lagr 7, Simple s	All EOPs	Lagr 7	Yes
5.0 μ as	0.18 mm	0.64 mm	1.1 mm	Interp, Lagr 9, Simple s	All EOPs	Cubic Spline	Yes
1.2 μ as	39 μ m	0.15 mm	0.23 mm	Interp, Lagr 9, Simple s	All EOPs	Cubic Spline*	Yes
0.34 μ as	12 μ m	43 μ m	68 μ m	Interp, Lagr 11, Simple s	All EOPs	Cubic Spline*	Yes

大地坐标与笛卡尔坐标

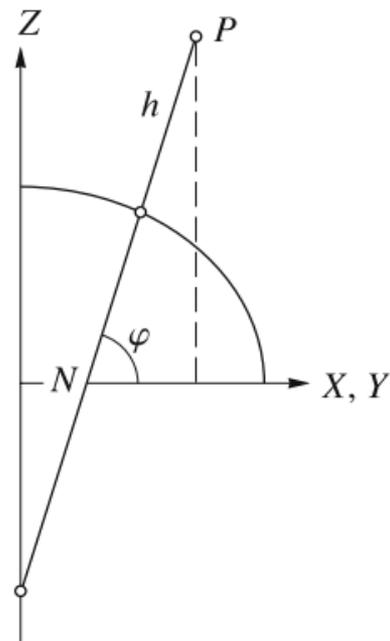
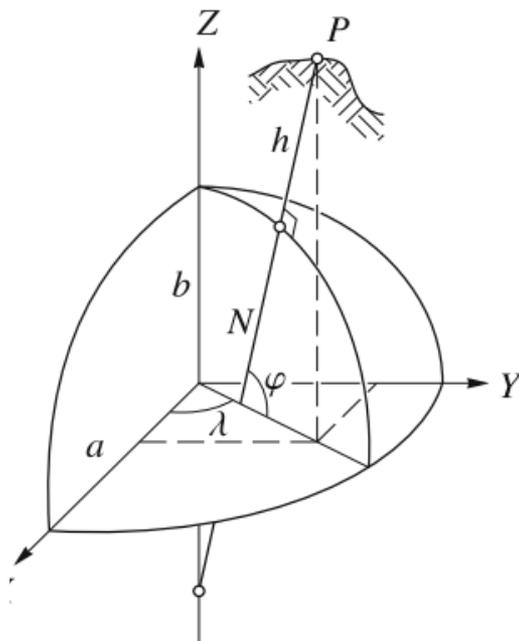
$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\bar{N} + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (\bar{N} + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ ((1 - e^2) \bar{N} + h) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\bar{N} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a}{\sqrt{1 - f(2 - f) \sin^2 \varphi}}$$

$$h = \frac{\sqrt{\bar{X}^2 + \bar{Y}^2}}{\cos \varphi} - \bar{N}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\bar{Z}}{\sqrt{\bar{X}^2 + \bar{Y}^2}} \left(1 - e^2 \frac{\bar{N}}{\bar{N} + h} \right)^{-1}, \quad \lambda = \arctan \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$$

迭代处理



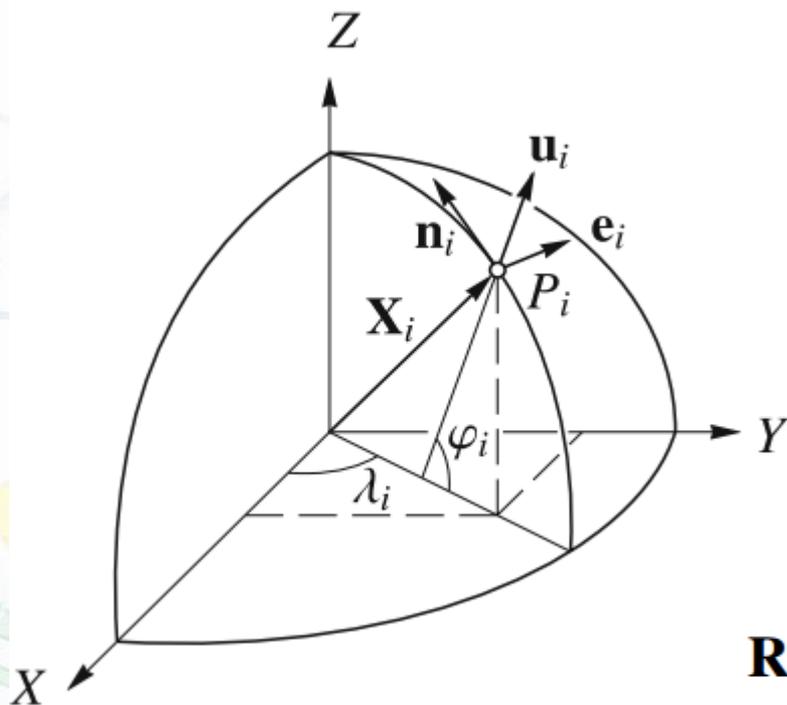
$$\begin{pmatrix} d\varphi \\ d\lambda \\ dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin \varphi \cos \lambda}{\bar{M} + h} & \frac{-\sin \varphi \sin \lambda}{\bar{M} + h} & \frac{\cos \varphi}{\bar{M} + h} \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ \frac{(\bar{N} + h) \cos \varphi}{\cos \varphi \cos \lambda} & \frac{(\bar{N} + h) \cos \varphi}{\cos \varphi \sin \lambda} & \sin \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}$$

$$dX = -(\bar{M} + h) \sin \varphi \cos \lambda d\varphi - (\bar{N} + h) \cos \varphi \sin \lambda d\lambda + \cos \varphi \cos \lambda dh$$

$$dY = -(\bar{M} + h) \sin \varphi \sin \lambda d\varphi + (\bar{N} + h) \cos \varphi \cos \lambda d\lambda + \cos \varphi \sin \lambda dh$$

$$dZ = (\bar{M} + h) \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi dh$$

局域坐标系（北、东、天）



$$\mathbf{x}_{ij} = \begin{bmatrix} n_{ij} \\ e_{ij} \\ u_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{X}_{ij} \\ \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{X}_{ij} \\ \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{X}_{ij} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_i \cos \lambda_i & -\sin \lambda_i & \cos \varphi_i \cos \lambda_i \\ -\sin \varphi_i \sin \lambda_i & \cos \lambda_i & \cos \varphi_i \sin \lambda_i \\ \cos \varphi_i & 0 & \sin \varphi_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_i \cos \lambda_i \\ -\sin \varphi_i \sin \lambda_i \\ \cos \varphi_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_i \\ \cos \lambda_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \cos \lambda_i \\ \cos \varphi_i \sin \lambda_i \\ \sin \varphi_i \end{bmatrix}$$

惯性坐标系到RTN坐标系

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\text{RTN}} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}_{\text{ECI}}$$

$$[\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}]_{\text{RTN}} = \psi [\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}]_{\text{ECI}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_R \\ \mathbf{u}_T \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_X & \epsilon_Y & \epsilon_Z \\ \delta_X & \delta_Y & \delta_Z \\ \alpha_X & \alpha_Y & \alpha_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

$$\psi = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}] = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r} \\ \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_R = \frac{\mathbf{r}^*}{|\mathbf{r}^*|} = \epsilon_X \mathbf{i} + \epsilon_Y \mathbf{j} + \epsilon_Z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_T = \mathbf{u}_N \times \mathbf{u}_R = \delta_X \mathbf{i} + \delta_Y \mathbf{j} + \delta_Z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_N = \frac{\mathbf{r}^* \times \mathbf{v}^*}{|\mathbf{r}^* \times \mathbf{v}^*|} = \alpha_X \mathbf{i} + \alpha_Y \mathbf{j} + \alpha_Z \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{RTN}} &= E [(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T]_{\text{RTN}} \\ &= \psi E [(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T]_{\text{ECI}} \psi^T \end{aligned}$$

GNSS坐标系及参考框架

ITRF
(GPS/VLBI/SLR/DORIS)

提供基准 (原点、定向和尺度)

其他空间大地测量技术的框架

国家级或区域级框架

GNSS广播星历框架

CGCS2000

WGS84

PZ-90

GTRF

BDS

GPS

GLONASS

Galileo

GPS参考框架 WGS-84

- ▶ GPS广播星历在WGS-84框架下播发。
- ▶ WGS-84的首次实现是1987年，通过1000多个台站数据解算实现，主要观测是由当时的多普勒技术。精度约在1-2 m。
- ▶ 随后采用更精确的坐标进行精度提升。WGS-84(730)采用全球分布的多个GPS台站数据解算，与ITRF92对应，精度达到约20 cm。
- ▶ WGS-84 (G873)、WGS-84(G1150)、WGS-84(G1674)分别与ITRF94、ITRF2000和ITRF2008对应，符合精度在10、2、1 cm。

Ellipsoidal parameters of WGS-84 (revised in 1997).

Ellipsoid		
Semi-major axis of the ellipse	a	6 378 137.0 m
Flattening factor	f	1/298.257 223 563
Earth's angular velocity	ω_E	$7\,292\,115.0 \cdot 10^{-11}$ rad/s
Gravitational constant	μ	$3\,986\,004.418 \cdot 10^8$ m ³ /s ²
Speed of light in vacuum	c	$2.997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s

GLONASS 参考框架PZ-90

- ▶ GLONASS广播电文星历参数在PZ-90参考框架下给出。
- ▶ 确定PZ-90与ITRF97转换参数是一个国际GLONASS试验IGEX-98的任务。
- ▶ 根据IGEX的结论，建议一个米级的PZ-90(x' , y' , z')与WGS-84的转换为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \text{ ppb} & -353 \text{ mas} & -4 \text{ mas} \\ 353 \text{ mas} & -3 \text{ ppb} & 19 \text{ mas} \\ 4 \text{ mas} & -19 \text{ mas} & -3 \text{ ppb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.07 \text{ m} \\ -0.0 \text{ m} \\ -0.77 \text{ m} \end{bmatrix}$$

GLONASS参考框架PZ-90.02

- ▶ 根据GLONASS现代化的要求，从2007年9月20日起。其广播星历在PZ-90.02框架下播发。该框架是PZ-90的升级版，更靠近ITRF2000。
- ▶ PZ-90.02与ITRF差异仅有原点平移；无尺度变化和旋转。两者关系为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{ITRF2000}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{\text{PZ-90.02}} + \begin{bmatrix} -0.36 \text{ m} \\ 0.08 \text{ m} \\ 0.18 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Ellipsoidal parameters of PZ-90 and PZ-90.02.

Ellipsoid		
Semi-major axis of the ellipse	a	6 378 136.0 m
Flattening factor	f	1/298.257 839 303
Earth's angular velocity	ω_E	$7\,292\,115.0 \cdot 10^{-11}$ rad/s
Gravitational constant	μ	$3\,986\,004.4 \cdot 10^8$ m ³ /s ²
Speed of light in a vacuum	c	$2.997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s
Second zonal harmonic coefficient	J_2^0	$1\,082\,625.75 \cdot 10^{-9}$

北斗参考框架(BDCS、CGCS2000)

- ▶ 北斗系统采用的坐标系为BDCS，其定义与CGCS2000一致（具有相同的参考椭球参数）。[北斗导航系统空间信号接口控制文件公开服务信号B3I（1.0版）]
- ▶ CGCS2000与ITRF97在历元2000.0保持一致，由国家GPS控制网2000与国家天文大地网联合平差得到。
- ▶ GNSS CORS维持CGCS2000的基础设施。

表 3-1 BDCS 参考椭球的基本常数

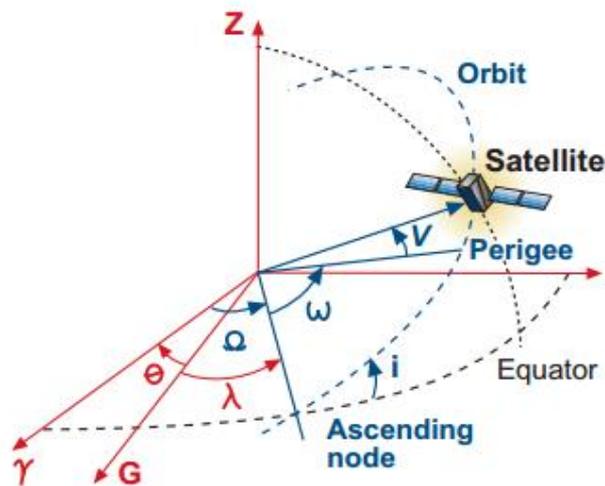
序号	参 数	定 义
1	长半轴	$a=6378137.0 \text{ m}$
2	地心引力常数（包含大气层）	$\mu=3.986004418 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$
3	扁率	$f=1/298.257222101$
4	地球自转角速度	$\dot{\Omega}_e=7.2921150 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$

GALILEO参考框架 (GTRF)

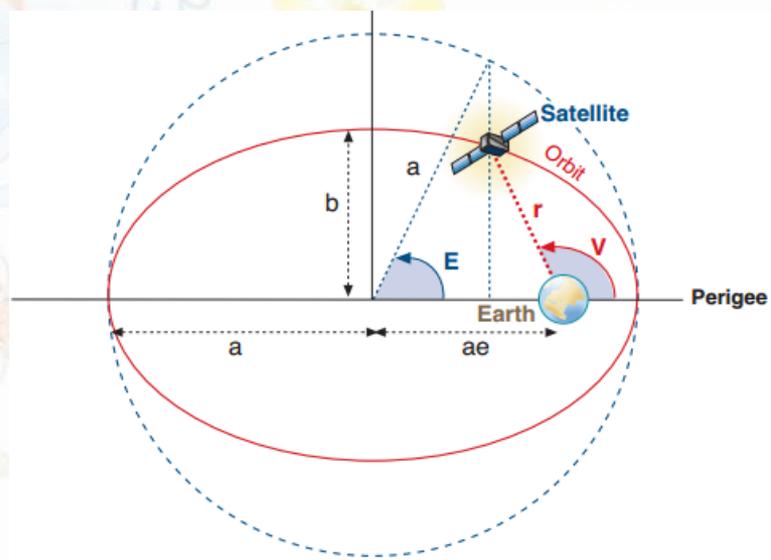
- ▶ 早期GTRF坐标系由GPS数据处理提供。现GTRF由在轨的GPS和Galileo共同维持。数据处理周解用于长期其坐标系统的长期维持。
- ▶ GTRF要求与最新的ITRF符合度在 3cm (2sigma)以内。主要有GGSP（由GFZ领头的7个研究所的组织）负责维护。GTRF与ITRF的连接通过IGS站坐标实现。
- ▶ 伽利略的广播电文轨道在GTRF框架下。

卫星轨道根数及精密定轨坐标系

- ▶ 现代定轨方法基于牛顿力学体系（相对论作为摄动项）
- ▶ 牛顿力学方程要求卫星在惯性坐标系下建立。
- ▶ 因此卫星轨道根数针对惯性坐标系而言。
- ▶ 地心天球坐标系的实现就是要使其尽可能接近惯性坐标系，因此卫星轨道计算通常在此坐标系下进行。



- i inclination
- ω argument of perigee
- Ω arg. ascending node (Aries)
- λ arg. ascending node (Greenwich)
- ν true anomaly
- θ sidereal time
- γ vernal equinox
- G Greenwich meridian



GNSS广播星历对应的坐标系

GPS、BDS、Galileo均采用16或18参导航电文用来表示卫星位置。利用ICD提供算法可计算卫星在各导航系统参考框架下的卫星位置。**注意电文发播的单个参数，如Omega, I等参数，其对应的坐标系既非地固系也非惯性系，而只是为拟合卫星地固系中位置而选取的参数。**

由于WGS84、GTRF、BDCS、PZ-90均在厘米或毫米精度对齐到ITRF，因此在实时应用中直接联合定位，不需要再进行7参数转换。

从三位直角坐标转换为大地坐标（大地经纬度、大地高）时，由于各导航系统选用的参考椭球参数有差异，用户根据应用需要选择相应的椭球参数

GPS/Galileo/Beidou broadcast ephemeris and clock message parameters.

Parameter	Explanation
t_{oe}	Ephemerides reference epoch in seconds within the week
\sqrt{a}	Square root of semi-major axis
e	Eccentricity
M_0	Mean anomaly at reference epoch
ω	Argument of perigee
i_0	Inclination at reference epoch
Ω_0	Longitude of ascending node at the beginning of the week
Δn	Mean motion difference
\dot{i}	Rate of inclination angle
$\dot{\Omega}$	Rate of node's right ascension
C_{UC}, C_{US}	Latitude argument correction
C_{RC}, C_{RS}	Orbital radius correction
C_{IC}, C_{IS}	Inclination correction
a_0	Satellite clock offset
a_1	Satellite clock drift
a_2	Satellite clock drift rate

Glonass broadcast ephemeris and clock message parameters.

Parameter	Explanation
t_e	Ephemerides reference epoch
$x(t_e)$	Coordinate at t_e in PZ-90
$y(t_e)$	Coordinate at t_e in PZ-90
$z(t_e)$	Coordinate at t_e in PZ-90
$v_x(t_e)$	Velocity component at t_e in PZ-90
$v_y(t_e)$	Velocity component at t_e in PZ-90
$v_z(t_e)$	Velocity component at t_e in PZ-90
$X''(t_e)$	Moon and Sun acceleration at t_e
$Y''(t_e)$	Moon and Sun acceleration at t_e
$Z''(t_e)$	Moon and Sun acceleration at t_e
$\tau_n(t_e)$	Satellite clock offset
$\gamma_n(t_e)$	Satellite relative frequency offset

GNSS精密星历坐标系

- ▶ IGS提供GNSS的精密星历和钟差。
- ▶ IGS建立了自己的坐标系，并在毫米级精度对齐ITRF，与ITRF同步更新，其提供的精密星历是在IGS坐标系下。
- ▶ 一些分析中心也提供轨道和钟差产品，如CODE，因此其轨道和钟差必须配套使用。

Products	Broadcast	Ultra-rapid		Rapid	Final
		Predicted	Observed		
(delay)	(real time)	(real time)	(3–9 h)	(17–41 h)	(12–18 d)
Orbit GPS (sampling)	~100 cm (~2 h)	~5 cm (15 min)	~3 cm (15 min)	~2.5cm (15 min)	~ 2.5 cm (15 min)
Glonass (sampling)					~5 cm (15 min)
Clock GPS (sampling)	~5 ns (daily)	~3 ns (15 min)	~150 ps (15 min)	~75 ps (5 min)	~75 ps (30 s)
Glonass (sampling)					~ TBD (15 min)

作业：

地球到天球坐标系转换是卫星测控中基本要求。 计算地球到天球坐标系转换矩阵M

Celestial coordinates (X Y Z) = M x Terrestrial coordinates (x y z)

时间：2019年10月14日13:30。

现在有不同的岁差章动理论，在IERS与IAU中有相对应的关系。选择一个自己能实现的，允许模型简化。

参考资料：《航天器轨道理论》、《参考坐标系及航天应用》（黄城、刘林）、《天体测量学导论》、IERS规范、IAU相关决议等。可以自己编写程序，也可以调用一些软件库，如sofa, novas等。

要求写出计算方法及计算结果，不要求交程序。

交作业时间：两周内。

