目录

第4章 轨道数值积分方法

4.1 轨道动力学方程与变分方程

卫星运动满足二阶微分方程组

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{P}\right)$$

以上是一个空间上三个维度，每个维度上的二阶微分。根据初值问题求解卫星运动状态则需要计算以上微分方程，通常包括解析方法和数值方法。

在轨道改进过程中，通常需要求解状态关于初始状态的偏导数，而这些偏导数本身是变分方程的解。

4.2 单步法

4.2.1 RK 方法与 RKN 方法

4.2.2 变步长策略与 RKF 方法

4.3 线性多步法

4.3.1 Adams-Bashforth 显式方法

对于一阶方程组，采用函数和的形式为

$$\boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{X}_n + h\sum_{l=0}^{k-1}\beta_{kl}\boldsymbol{F}_{n-l}, k = 1, 2, \cdots$$

$$\begin{aligned}\beta_{kl} &= \left(-1\right)^l \sum_{m=l}^{k-1}\binom{m}{l}\gamma_m \\ &= \left(-1\right)^l \left[\binom{l}{l}\gamma_l + \binom{l+1}{l}\gamma_{l+1} + \cdots + \binom{k-1}{l}\gamma_{k-1}\right]\end{aligned}$$

γ_m 满足以下递推式

$$\gamma_m + \frac{1}{2}\gamma_{m-1} + \frac{1}{3}\gamma_{m-2} + \cdots + \frac{1}{m+1}\gamma_0 = 1$$

即

$$\begin{cases} \nu_0 = 1 \\ \nu_m = 1 - \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{n+1}\nu_{m-n} \end{cases}$$

4.3.2 Adams-Moulton 隐式方法

隐式方法写成函数和的形式为

$$\boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{X}_n + h\sum_{l=0}^{k-1}\beta_{kl}^{*}\boldsymbol{F}_{n+1-l}$$

$$\begin{aligned}\beta_{kl}^{*} &= (-1)^l \sum_{m=l}^{k-1}\binom{m}{l}\gamma_m^{*} \\ &= (-1)^l\left[\binom{l}{l}\gamma_l^{*} + \binom{l+1}{l}\gamma_{l+1}^{*} + \cdots + \binom{k-1}{l}\gamma_{k-1}^{*}\right]\end{aligned}$$

$$\gamma_m^{*} + \frac{1}{2}\gamma_{m-1}^{*} + \frac{1}{3}\gamma_{m-2}^{*} + \cdots + \frac{1}{m+1}\gamma_0^{*} = \begin{cases} 1, m = 0 \\ 0, m \neq 0 \end{cases}$$

4.3.3 预估校正 PECE 方法

在工程中，通常采用显式和隐式联合的方法，进行迭代处理微分方程。其基本步骤有 4 步，如下：

P: 采用显式方法计算状态预估值

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{n+1} = \boldsymbol{X}_n + h\sum_{l=0}^{k-1}\beta_{kl} f_{n-l}, k = 1, 2, \cdots$$

E：计算力函数的近似值

$$\hat{\boldsymbol{F}}_{n+1} = \boldsymbol{F}\left(\hat{\boldsymbol{X}}_{n+1}, t_{n+1}\right)$$

C：用隐式方法计算状态改正值

$\boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{X}_n + h\beta_{k0}^* \hat{\boldsymbol{F}}_{n+1} + h\sum_{l=1}^{k-1} \beta_{kl}^* \boldsymbol{F}_{n+1-l}$，即其中 t_{n+1} 时刻的力函数用 $\hat{\boldsymbol{F}}_{n+1}$ 代替。

E：计算力函数

$\boldsymbol{F}_{n+1} = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{X}_{n+1}, t_{n+1}\right)$

以上是最常用的计算过程，通常称为 PECE。在实际计算中也可以进行多次迭代，但是由于 PECE 精度一般已经较高，因此大多数情况下没必要进行多次迭代处理。

4.4 Störmor-Cowell 积分器

4.4.1 二阶微分方程组

对于二阶微分方程组

$$\begin{cases} \ddot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{X}, t\right) \\ \boldsymbol{X}\left(t_0\right) = \boldsymbol{X}_0 \\ \dot{\boldsymbol{X}}\left(t_0\right) = \dot{\boldsymbol{X}}_0 \end{cases} \tag{4-1}$$

4.4.2 显式 Störmer 方法

差分形式的 Störmer 方法为

$$\boldsymbol{X}_{n+1} - 2\boldsymbol{X}_n + \boldsymbol{X}_{n-1} = h^2 \sum_{l=0}^{k-1} \sigma_m \nabla^m \boldsymbol{F}_n \tag{4-2}$$

其中

$$\begin{cases} \sigma_0 = 1 \\ \sigma_m = 1 - \dfrac{2}{3} h_2 \sigma_{m-1} - \dfrac{2}{4} h_3 \sigma_{m-2} - \cdots - \dfrac{2}{m+2} h_{m+1} \sigma_0 \\ \quad = 1 - \sum_{i=1}^{m} \left(\dfrac{2}{i+2} h_{i+1} \right) \sigma_{m-i}, m = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{4-3}$$

h_i 是调和级数的部分和，即

$$h_i = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{i} \tag{4-4}$$

将差分形式的 Störmer 写成函数和形式为

$$\boldsymbol{X}_{n+1}-2\boldsymbol{X}_{n}+\boldsymbol{X}_{n-1}=h^{2}\sum_{l=0}^{k-1}\alpha_{kl}\boldsymbol{F}_{n-l},k=1,2,\cdots \tag{4-5}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{kl}&=(-1)^{l}\sum_{m=l}^{k-1}\binom{m}{l}\sigma_{m}\\&=(-1)^{l}\left[\binom{l}{l}\sigma_{l}+\binom{l+1}{l}\sigma_{l+1}+\cdots+\binom{k-1}{l}\sigma_{k-1}\right]\end{aligned} \tag{4-6}$$

4.4.3 隐式 Störmer 方法

与 Adams 类型方法类似，Störmer 也有隐式方法。其差分形式为

$$\boldsymbol{X}_{n}-2\boldsymbol{X}_{n-1}+\boldsymbol{X}_{n-2}=h^{2}\sum_{l=0}^{k-1}\sigma_{m}^{*}\nabla^{m}\boldsymbol{F}_{n} \tag{4-7}$$

$$\begin{cases}\sigma_{0}^{*}=1\\ \sigma_{m}^{*}=-\dfrac{2}{3}h_{2}\sigma_{m-1}^{*}-\dfrac{2}{4}h_{3}\sigma_{m-2}^{*}-\cdots-\dfrac{2}{m+2}h_{m+1}\sigma_{0}^{*}\\ \quad=1-\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left(\dfrac{2}{i+2}h_{i+1}\right)\sigma_{m-i}^{*},m=1,2,\cdots\end{cases} \tag{4-8}$$

写成函数和形式为

$$\boldsymbol{X}_{n+1}-2\boldsymbol{X}_{n}+\boldsymbol{X}_{n-1}=h^{2}\sum_{l=0}^{k-1}\alpha_{kl}^{*}\boldsymbol{F}_{n+1-l},k=1,2,\cdots \tag{4-9}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{kl}^{*}=\alpha_{kl}&=(-1)^{l}\sum_{m=l}^{k-1}\binom{m}{l}\sigma_{m}^{*}\\&=(-1)^{l}\left[\binom{l}{l}\sigma_{l}^{*}+\binom{l+1}{l}\sigma_{l+1}^{*}+\cdots+\binom{k-1}{l}\sigma_{k-1}^{*}\right]\end{aligned} \tag{4-10}$$

4.4.4 Adams-Cowell 混合积分器

在卫星动力学中，常把 Adams 方法和 Cowell 类型积分器进行联合使用，利用 Adams 方法进行卫星速度计算。而卫星的受力函数为位置和速度的函数，利用卫星的加速度采用 Cowell 方法计算卫星的位置。这种方法就是 Adams-Cowell 积分器。

Adams-Cowell 积分器是卫星动力学中比较常用的一种方法，而后又有不少学者对其进行了改进或变形。下一节介绍其中一种典型的改进方法 KSG 积分器。

4.4.5 KSG 积分器

Adams-Cowell 积分器是卫星轨道计算中常用的方法。在此基础上，又有不少积分方法对其进行了改进。其中 Krogh-Shampine-Gordon 是一种精度较高且使用较为方便的方法。对于卫星轨道初值问题，相应的预报公式为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{X}_n + h\dot{\boldsymbol{X}}_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{j+1} \left(\nabla^j \boldsymbol{F}_n \right) \\ \dot{\boldsymbol{X}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{X}}_n + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{j+1} \left(\nabla^j \boldsymbol{F}_n \right) \end{cases} \tag{4-11}$$

系数计算公式为

$$\alpha_j = g_{j,2}, \beta_j = g_{j,1}, \left(j = 1, 2, \cdots, k \right) \tag{4-12}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = g_{1,2} = \dfrac{1}{2}, \beta_1 = g_{1,1} = 1 \\ \alpha_j = g_{j,2}, \beta_j = g_{j,1}, \left(j = 2, 3, \cdots, k \right) \end{cases} \tag{4-13}$$

$$\begin{cases} g_{1,q} = \dfrac{1}{q!}, \left(q = 1, 2, \cdots, k+1 \right) \\ g_{j,q} = g_{j-1} - \left(\dfrac{q}{j-1} \right) g_{j-1,q+1}, \left(j = 2, 3, \cdots, k+1 \right) \end{cases} \tag{4-14}$$

引入后差分的公式，上面可以用右函数形式表达：

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{X}_n + h\dot{\boldsymbol{X}}_n + h^2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{l+1}^{*} \boldsymbol{F}_{n-l} \\ \dot{\boldsymbol{X}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{X}}_n + h \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{j+1}^{*} \boldsymbol{F}_{n-l} \end{cases} \tag{4-15}$$

$$\begin{cases} \alpha_{l+1}^{*} = (-1)^{l} \sum_{j=l+1}^{k} \binom{j-1}{l} \alpha_{j} \\ \quad = (-1)^{l} \left[\binom{l}{l} \alpha_{l+1} + \binom{l+1}{l} \alpha_{l+2} + \cdots + \binom{l-k}{l} \alpha_{k} \right] \\ \beta_{l+1}^{*} = (-1)^{l} \sum_{j=l+1}^{k} \binom{j-1}{l} \beta_{j} \\ \quad = (-1)^{l} \left[\binom{l}{l} \beta_{l+1} + \binom{l+1}{l} \beta_{l+2} + \cdots + \binom{l-k}{l} \beta_{k} \right] \end{cases} \tag{4-16}$$

校正公式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{X}_{n+1}^{p} + h^{2} \alpha_{k+1} \left(\nabla^{k} \boldsymbol{F}_{n+1}^{p} \right) \\ \dot{\boldsymbol{X}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{X}}_{n} + h^{2} \beta_{k+1} \left(\nabla^{k} \boldsymbol{F}_{n+1}^{p} \right) \end{cases} \tag{4-17}$$

即

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{X}_{n+1}^{p} + h^{2} \alpha_{k+1} \left(\boldsymbol{F}_{n+1}^{p} - d_{1} \right) \\ \dot{\boldsymbol{X}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{X}}_{n} + h^{2} \beta_{k+1} \left(\boldsymbol{F}_{n+1}^{p} - d_{1} \right) \end{cases} \tag{4-18}$$

其中

$$d_{1} = \sum_{l=0}^{k-1} \gamma_{l+1}^{*} \boldsymbol{F}_{n-l}$$

$$\boldsymbol{F}_{n+1}^{p} = \boldsymbol{F} \left(\boldsymbol{X}_{n+1}^{p}, \dot{\boldsymbol{X}}_{n+1}^{p}, t_{n+1} \right)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{l+1}^{*} &= (-1)^{l} \sum_{j=l+1}^{k} \binom{j-1}{l} \\ &= (-1)^{l} \left[\binom{l}{l} + \binom{l+1}{l} + \cdots + \binom{l-k}{l} \right] \end{aligned}$$

KSG 积分方法对 Adams-Cowell 类型的积分器进行改进，在计算中可以直接输出卫星的位置速度。因此，可以作为卫星轨道计算的一种常用方法。

参考文献：

刘林. 航天器轨道理论，国防工业出版社 2000.

Oliver Montenbruck ,Eberhard Gill，Satellite Orbits, Springer 2000.

E. Hairer, Solving Ordinary Differential Equations I,Springer 1993