

目录

第 5 章	三体问题及应用	2
5.1	N 体问题概述	2
5.2	圆形限制性三体问题	2
5.3	平动点附近轨道动力学	2
5.4	Hill 限制性三体问题及 DRO 轨道动力学	2
5.4.1	Hill 限制性三体问题	2
5.4.2	周期轨道族	3
5.4.3	周期轨道搜索	8

第5章 三体问题及应用

5.1 N 体问题概述

5.2 圆形限制性三体问题

5.3 平动点附近轨道动力学

5.4 Hill 限制性三体问题及 DRO 轨道动力学

5.4.1 Hill 限制性三体问题

记 $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ 表示质点 P 相对于小质量天体 m 的空间位置, \mathbf{R} 为小质量天体相对于大质量天体 M 的位置, $\boldsymbol{\rho}$ 为质点 P 相对于大质量的位置。在 Hill 限制性三体问题假设下, 小质量天体绕大质量天体做圆周运动。因此质点 P 的运动方程为

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{k^2 m \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} - \frac{k^2 M \boldsymbol{\rho}}{\|\boldsymbol{\rho}\|^3} \quad (0.1)$$

把 $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{R} + \mathbf{r}$ 带入上述方程, 得到

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{k^2 m \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3} - \frac{k^2 M (\mathbf{R} + \mathbf{r})}{\|\mathbf{R} + \mathbf{r}\|^3} \quad (0.2)$$

m 相对于 M 的运动加速度为

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -\frac{k^2 M \mathbf{R}}{\|\mathbf{R}\|^3} \quad (0.3)$$

把(0.3)带入(0.2), 并且令 $\mathbf{R} = [R, 0, 0]^T$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - 2\dot{y} - n^2x = -\frac{kmx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{k^2M(x+R)}{[(x+R)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{y} + n\dot{x} - n^2y = -\frac{kmy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{k^2My}{[(x+R)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{z} = -\frac{kmz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{k^2Mz}{[(x+R)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right. \quad (0.4)$$

可以把以上方程写为归一化的方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\xi} = 2\dot{\eta} + \xi - \frac{\mu\xi}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1-\mu)(\xi+1)}{((\xi+1)^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} + 1 - \mu \\ \ddot{\eta} = -2\dot{\xi} + \eta - \frac{\mu\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1-\mu)\eta}{((\xi+1)^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{\zeta} = -\frac{\mu\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1-\mu)\zeta}{((\xi+1)^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \end{array} \right. \quad (0.5)$$

当 $m \ll M$ 时, 得到 Hill 方程

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - 2\dot{y} - 3x = \frac{\partial W}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial W}{\partial y} \\ \ddot{z} + z = \frac{\partial W}{\partial z} \end{array} \right. \quad (0.6)$$

其中

$$W \equiv \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (0.7)$$

Jacobi 常数为

$$\Gamma = 3x^2 + z^2 + \frac{2}{r} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (0.8)$$

5.4.2 周期轨道族

相对小质量天体 m 的周期轨道可以通过数值方法搜索得到。原方程是在 6 维相空间描述，为简化问题可以限制轨道在 xy 平面内。使得变成 4 维相空间搜索问题。进一步的，对于对称周期轨道，必然与 x 轴相交与同一点 x_0 。同时，由对称性，在交点处质点速度必然是沿 y 方向。因此，周期轨道搜索问题变为寻找 x_0 和 \dot{y}_0 。为方便起见，可以用 Jacobi 积分代替 \dot{y}_0 。为搜索出平面的周期轨道，需要知道 Jacobi 常数 Γ 的值和初始 x_0 。在这一点处 $y_0 = 0$ 。可以很方便的用 (Γ, x_0) 表示一条轨道。

下图 3 描述了轨道族的特征，这些轨道族记为 a, c, f, g, g', g_2, g_3 。阴影区域为飞行禁区，因为在这些区域内 $\dot{y}_0 < 0$ 。

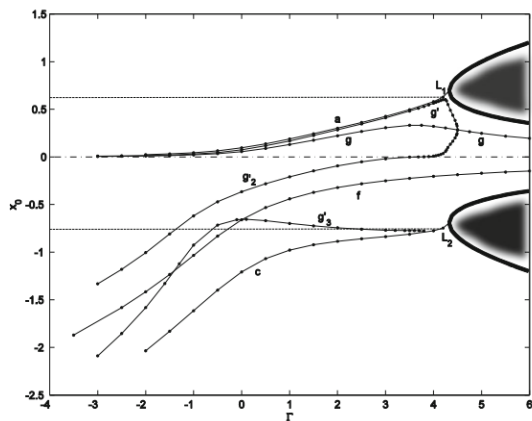


图 1 Hill 问题中的周期轨道

a, c 族周期轨道包括共线平动点 L_1 和 L_2 。部分 a 族轨道形如图 4 所示。部分 c 族轨道如图 5。

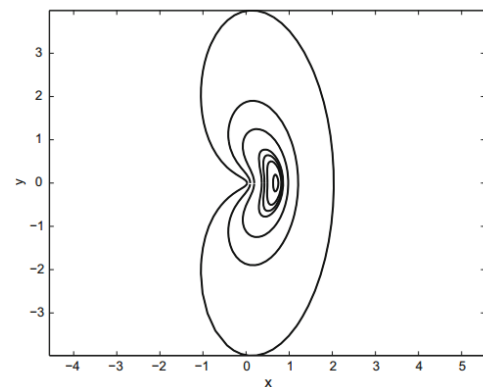


图 2 a 族轨道

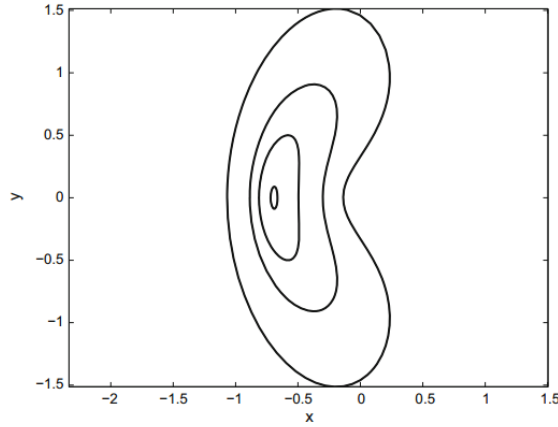


图 3 c 族轨道

f 族轨道包含第二类远距逆行轨道 (DRO)。这些轨道是关于 x 轴对称, 是稳定的轨道。从图 6 中可以看出 f 族轨道可以在 $\Gamma < 0$ 处搜索得到。当 $\Gamma \rightarrow -\infty$ 时, f 族轨道逐渐变为绕次质量天体飞行的椭圆轨道。当非常接近次质量天体时, 因主天体的引力减弱, 轨道会接近圆形。

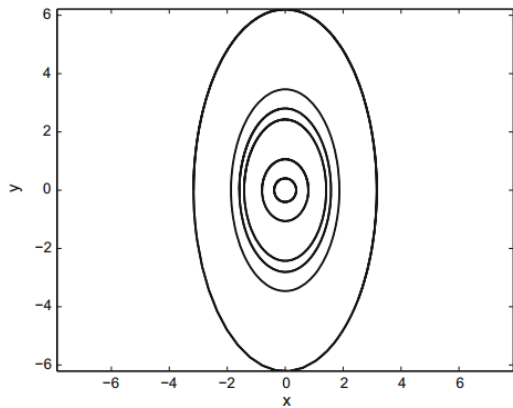


图 4 f 族轨道

g_3 族轨道根据 Γ 可以分为几组, 当 $\Gamma \geq 4.5$ 时, 有一组远距逆行轨道 (DRO), 这种轨道接近于圆形, 有点像二体问题, 如图 7 所示。对于 $2 \leq \Gamma < 4.5$ 得到不稳定的远距逆行轨道 (DRO), 这一类轨道趋于椭圆, 如图 8 所示。当 $\Gamma = 2$ 时轨道接近于抛物线轨道。当 $\Gamma < 2$ 时, 得到一组不稳定轨道, 如图 9 所示, 这种轨道可以用作转移轨道。在美国 NASA 的 WIND 任务中, 曾应用过这种轨道。在 Hill 问题中, 平动点 L_1 和 L_2 在 $x = \pm 0.69336$, 因此 g 族轨道可以达到 5 倍的这个距离。

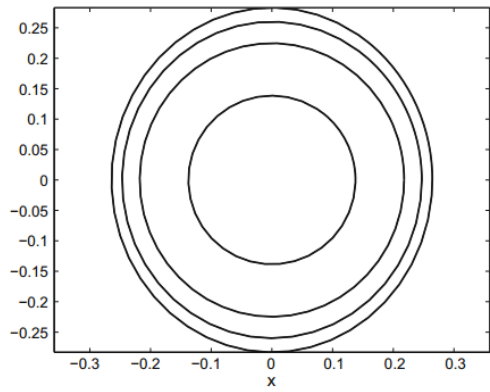


图 5 g 族中 $\Gamma \geq 4.5$ 不稳定逆行轨道

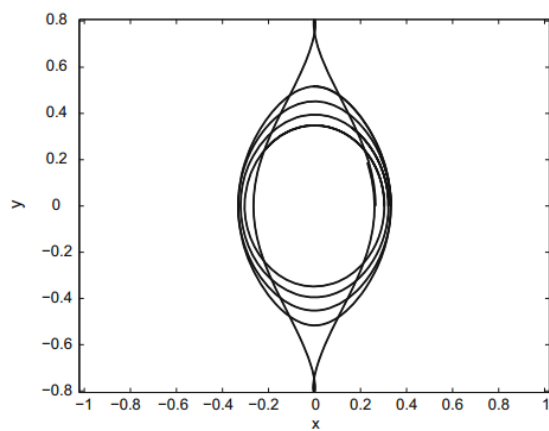


图 6 g 族中 $2 \leq \Gamma \leq 4.5$ 不稳定逆行轨道

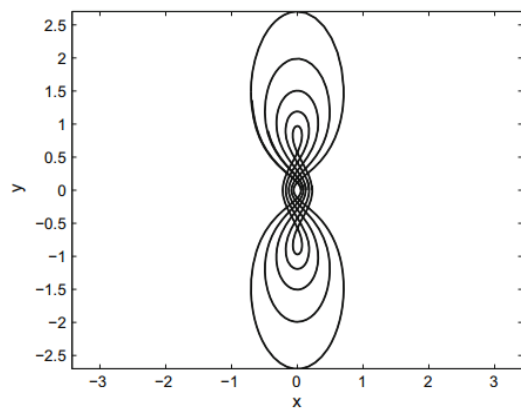


图 7 g 族中 $\Gamma < 2$ 不稳定逆行轨道

g' 族轨道都是不稳定的，它们又可以分为两类，如图 10 和图 11 所示。

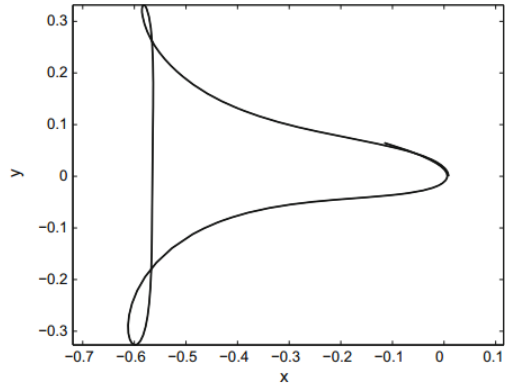


图 8 g' 族第一类不稳定轨道

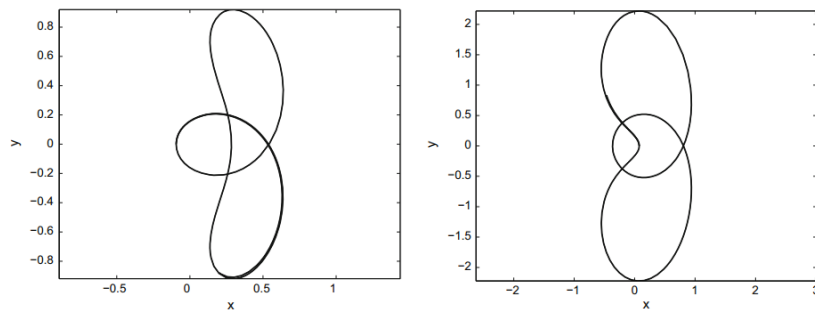


图 9 g' 族第二类不稳定轨道

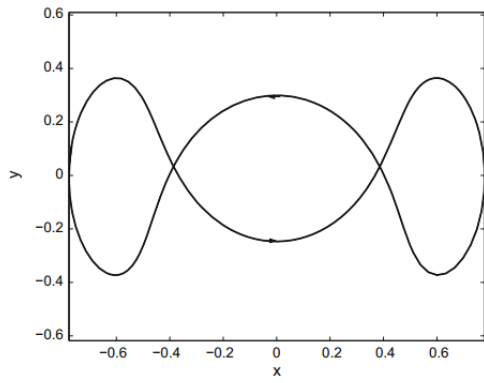


图 10 g_3 族第一类轨道

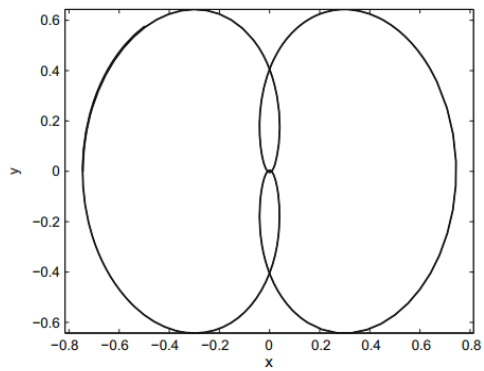


图 11 \mathcal{g}_3 族第二类轨道

\mathcal{g}' 族第二类轨道接近于双曲线飞掠地球。图 11 是一种“弹弓”效果，一个飞船被转移到相对于一颗行星的逃逸轨道效应。

\mathcal{g}_3 族轨道形如图 12 和图 13 所示，这类轨道可以在平动点探测任务中得到应用。如图 12 所示，这种轨道在飞行过程中会接近平动点附近，并且可以作为平动点之间的转移轨道。图 13 中，这种轨道会经过次质量大天体附近和平动点附近，这种特征可以用来进行行星和共线平动点的转移运输轨道，因为需要的能量较小，且机动次数较少。

5.4.3 周期轨道搜索

为满足地月 DRO 轨道的设计，需要对轨道族进行研究，设计出初步满足工程任务的轨道，进一步的用数值法进行轨道搜索。并把在 Hill 限制性三体问题下的轨道，带入完整的地月飞行动力学模型进行轨道积分论证。

在 Hill 限制性三体问题中，小天体运动方程：

$$\begin{cases} \ddot{\xi} = 2\dot{\eta} + \xi - \frac{\mu\xi}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1-\mu)(\xi+1)}{((\xi+1)^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} + 1 - \mu \\ \ddot{\eta} = -2\dot{\xi} + \eta - \frac{\mu\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1-\mu)\eta}{((\xi+1)^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{\zeta} = -\frac{\mu\zeta}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(1-\mu)\zeta}{((\xi+1)^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (0.9)$$

对于 Hill 方程，设 \mathbf{X} 为状态量， $\varphi(t, \mathbf{X}_0)$ 为方程的相流 (flow)。寻找该系统的逆行轨道，即搜索非线性方程 $\varphi(T, \mathbf{X}_0) = \mathbf{X}_0$ 的解。为使问题简化，对于 DRO 轨道可以限定于二维平面。由于 DRO 轨道具有沿 x 轴对称，因此其 x 轴必须满足垂直相交条件，y 方向速度为零。

可以取初始积分状态 $\mathbf{X}_0 = [x_0, 0, 0, \dot{y}_0]^T$ 。

根据雅克比能量限定, 可以把 \dot{y}_0 用雅克比常数 $\Gamma = 3x^2 + z^2 + \frac{2}{r} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ 表示。定

义映射 $f: R^2 \rightarrow R^3$, 且

$$f(x_0, \tau) = \begin{bmatrix} \varphi_x(x_0, 0, 0, \dot{y}_0, \tau) - x_0 \\ \varphi_y(x_0, 0, 0, \dot{y}_0, \tau) \\ \varphi_{\dot{x}}(x_0, 0, 0, \dot{y}_0, \tau) \end{bmatrix} \quad (0.10)$$

为寻找 DRO 轨道的初始状态, 只需要满足方程

$$f(x_0^*, \tau^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (0.11)$$

用牛顿法进行改正, 令 $\mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} x \\ \tau \end{bmatrix}$, 则

$$-f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{\Xi}} \Delta \mathbf{\Xi} \quad (0.12)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{\Xi}} \right]^T \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{\Xi}} \right] \Delta \mathbf{\Xi} = - \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{\Xi}} \right]^T f \quad (0.13)$$

算出 $\Delta \mathbf{\Xi}$ 后, 进行改正迭代求解。其中

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{\Xi}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} - 1 & \frac{\partial (\varphi_x - x_0)}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_y}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \varphi_{\dot{x}}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_{\dot{x}}}{\partial \tau} \end{bmatrix} \quad (0.14)$$

对比 Hill 方程, 则

$$\frac{\partial \varphi_{\dot{x}}}{\partial \tau} = 2\dot{y} + 3x + \frac{\partial W}{\partial x} \quad (0.15)$$

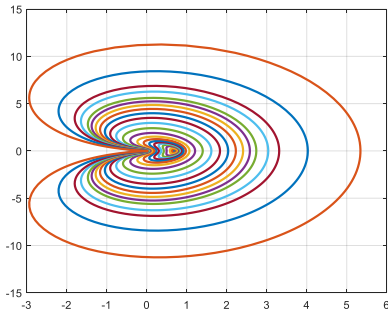
其他元素则满足原动力系统的变分方程的解。即, 令

$$\frac{\partial \varphi}{\partial [x, \dot{x}, y, \dot{y}]^T} = \Phi \quad (0.16)$$

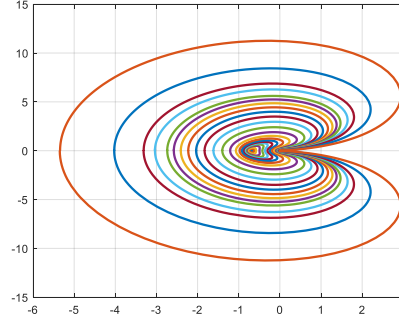
则

$$\begin{cases} \dot{\Phi} = A\Phi, \Phi(t_0, t_0) = I \\ A = \frac{\partial F}{\partial X} \end{cases} \quad (0.17)$$

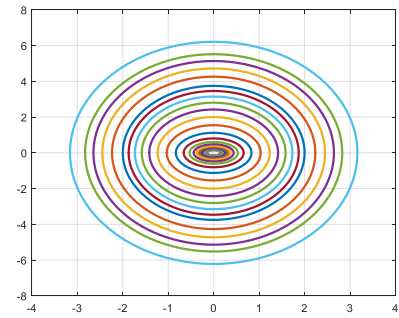
通过以上过程进行迭代，就可以得到 DRO 轨道。以下为自编软件搜索得到的周期轨道：



(a)

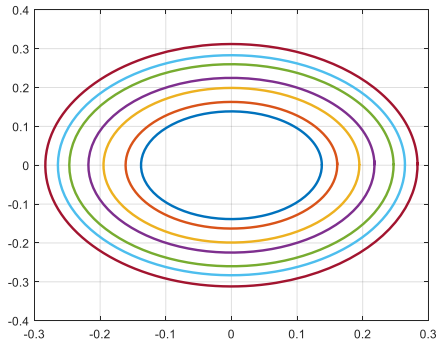


(b)

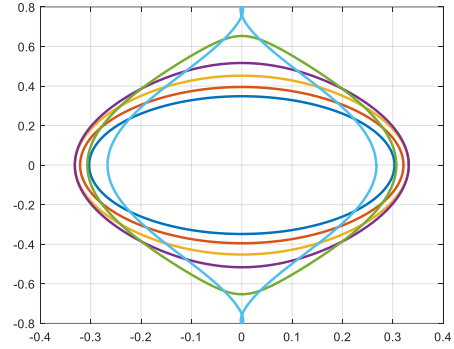


(c)

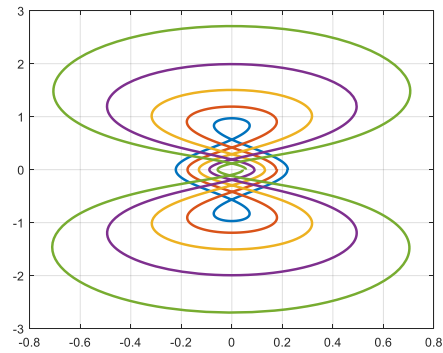
图 12 (a), (b), (c)分别为 a, c, f 族轨道



(a)



(b)



(c)

图 13 (a), (b), (c)均为 g 族轨道

通过自主开发的软件, 可以实现对限制性三体问题中一些典型周期轨道搜索。由于不同的轨道类型对初状态有一定的敏感性, 有些轨道在初状态偏差较大时候, 容易不收敛到周期轨道。