目录

第14章　最优估值与算法

14.1概率论基础

14.2最小二乘估计与误差传递

14.3最小二乘数值解法

14.3.1Householder 变换

对于单个向量$\mathbf{x}$，欲用镜像变换使之成为

$$\mathbf{Hx} = \mathbf{w} = \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 = (1,0,\cdots)^T$$

可以令

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{x}$$

继而可以构造镜像变换矩阵

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|_2^2}$$

$\|\mathbf{u}\|_2^2$表示向量之 2 范数的平方。对于矩阵$\mathbf{A}$做 QR 分解，即连续使用 Houlseholder 变换。

如第一次使用正交变换后，使之成为如下形式：

$$\mathbf{H}_1\mathbf{A} = \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

第二次变换使之成为如下形式：

$$\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

14.3.2修正的 Gram-Schimdt 正交化方法的 QR 分解

Gram-Schimdt 可以对非正交基进行正交化，令$\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_n\}$是 p 维向量子空间 W 的任意一组基，则子空间 W 的标准正交基$\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n\}$可以通过 Gram-Schimdt 正交化构造，即

$$\mathbf{p}_1=\mathbf{x}_1,\mathbf{u}_1=\frac{\mathbf{p}_1}{\|\mathbf{p}\|}=\frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|}$$
$$\mathbf{p}_k=\mathbf{x}_k-\sum_{i=1}^{k=1}\left(\mathbf{v}_i{}^H\mathbf{x}_k\right)\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_k=\frac{\mathbf{p}_k}{\|\mathbf{p}_k\|}$$

对于超定的线性方程系数矩阵的 QR 分解可以通过 Gram-Schimdt 正交化方法来实现，然而采用 Gram-Schimdt 正交化方法求解列正交矩阵$\mathbf{Q}$时，舍入误差较大，这在求解最小二乘法时候，有时会不稳定。针对 Gram-Schimdt 正交化的缺点，下面给出修正的 Gram-Schimdt 正交化算法。

对于 n 个向量$\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$构造标准正交基$\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\cdots,\mathbf{q}_n$方法如下

$$R_{11}=\|\mathbf{a}_1\|$$
$$\mathbf{q}_1=\frac{\mathbf{q}_1}{R_{11}}$$

对于$k=2,\cdots,n$。

$$R_{jk}=\mathbf{q}_j^H\mathbf{a}_k, j=1,\cdots,k-1$$
$$R_{kk}=\left\|\mathbf{a}_k-\sum_{j=1}^{k-1}\mathbf{q}R_{jk}\right\|$$
$$\mathbf{q}=\frac{\mathbf{a}_k-\sum_{j=1}^{k-1}\mathbf{q}R_{jk}}{R_{kk}}$$

14.4轨道确定的滤波方法

14.4.1序贯最小二乘

14.4.2线性滤波

14.4.3扩展卡尔曼滤波

14.4.4扩展卡尔曼滤波的推广

在许多应用场景中，通常测量数据较为均匀，卡尔曼滤波通常以测量数据为驱动进行下一次的滤波更新。然而在轨道确定中，有时测量数据获取极其不规则。比如在探测器行星表面软着陆等关键弧段，可能在比较短的时间弧段内，获取相当多的数据，因此如果采用常规方法则需要反复启动积分器。而在有些弧段可能又数据特别少。另外，常规滤波输出信息以测量数据时标基准,因此多数情况下滤波输出轨道为非等间隔,这在很多应用中较为不合适。因此这里对滤波进行推广。

卫星动力学与测量方程为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{X}, t\right) + \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{X}, t\right) + \boldsymbol{V} \end{cases}$$

初始状态为

设置滤波弧长为T，典型情况下如 2 分钟，5 分钟等。当前时刻为t

时间更新

$$\boldsymbol{x}(t+T) = \boldsymbol{x}_t + \int_t^{t+T} \boldsymbol{f}\left(\tau, \boldsymbol{x}(\tau), \boldsymbol{p}\right) d\tau$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}(t+T) = \boldsymbol{\Phi}(t) + \int_t^{t+T} \boldsymbol{F}\left(\tau+T\right) \boldsymbol{\Phi}(\tau+T) d\tau \\ \boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{I} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Psi}(t+T) = \int_0^t \left[\boldsymbol{F}\left(\tau+T\right) \boldsymbol{\Psi}(\tau+T) + \boldsymbol{G}(\tau+T)\right] \boldsymbol{F}\left(\tau+T\right) d\tau \\ \boldsymbol{\Psi}(\mathrm{t}) = 0 \end{cases}$$

测量更新

$$O_{t+i}-C_{t+i}=\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{X}_{t+i}}\frac{\partial \boldsymbol{X}_{t+i}}{\partial \boldsymbol{X}_{t}}\Delta \boldsymbol{X}_{t}$$

$$\left(\boldsymbol{P}_{t}+\boldsymbol{Q}+\sum \boldsymbol{H}_{t+i}{}^{T}\boldsymbol{H}_{t+i}\right)\Delta \boldsymbol{X}_{t}=\sum \boldsymbol{H}_{t+i}{}^{T}\left(O_{t+i}-C_{t+i}\right)$$

$$\boldsymbol{H}_{t+i}=\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{X}_{t+i}}\frac{\partial \boldsymbol{X}_{t+i}}{\partial \boldsymbol{X}_{t}}$$

求解方程得到 t 时刻的最新估值与 t 时刻的协方差，将其预报的 t+T 时刻。时间更新和测量更新可以迭代 1 次。其中$\boldsymbol{Q}$ 根据经验值给，如 GNSS 定轨中可以给噪声为 5cm 的对称协方差。而如果是空间非合作目标定轨，则可以根据相应的定轨水平给过程噪声。