



中国科学院上海天文台



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences

# 空间飞行器精密定轨

宋叶志

2021秋季 作业邮箱: [song.yz@foxmail.com](mailto:song.yz@foxmail.com)  
课件地址: <http://202.127.29.4/astrodynamics>

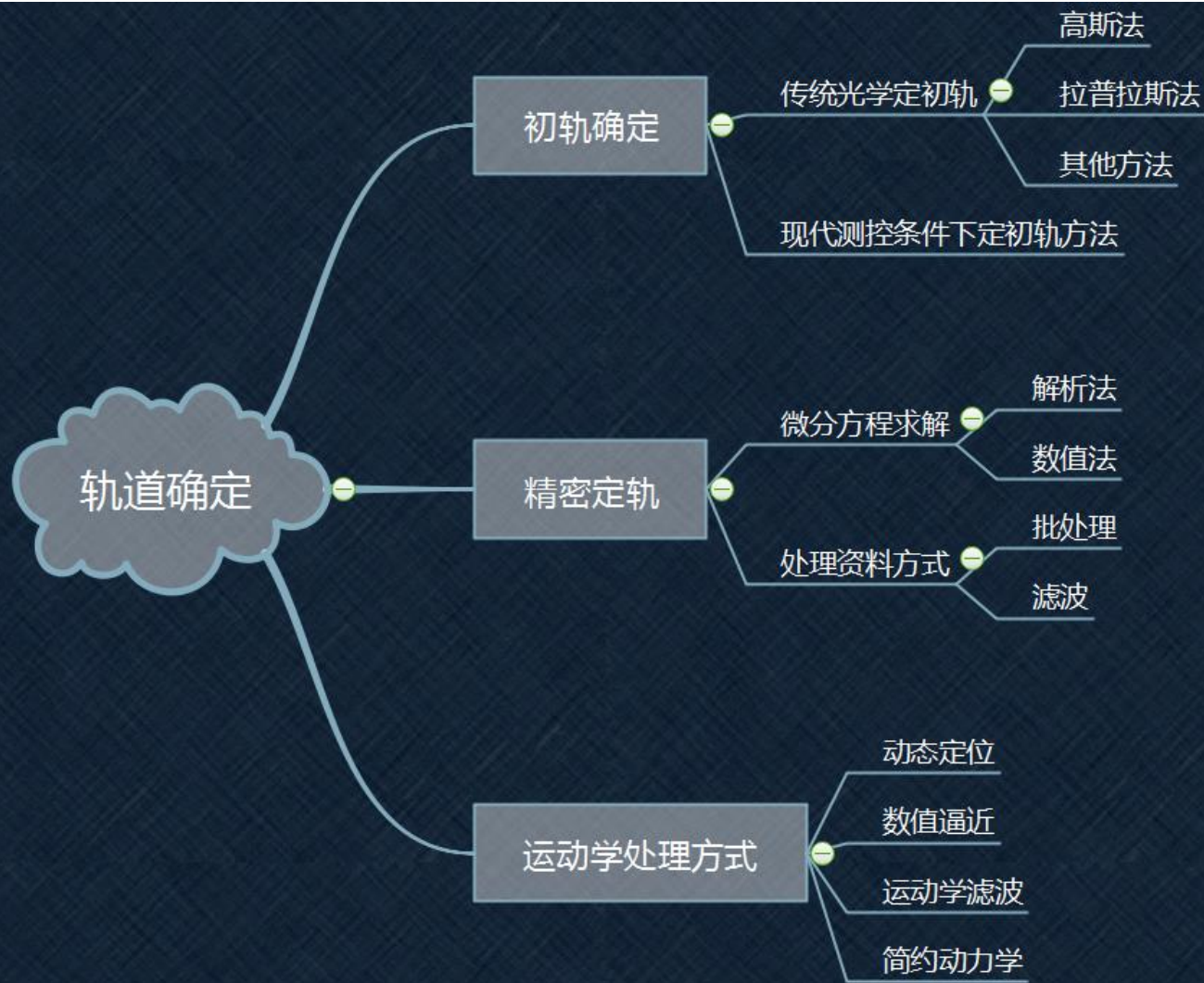
# 第十三讲 轨道确定方法

- 轨道确定问题
- 初轨确定问题
- 轨道的数值逼近
- 精密定轨方法

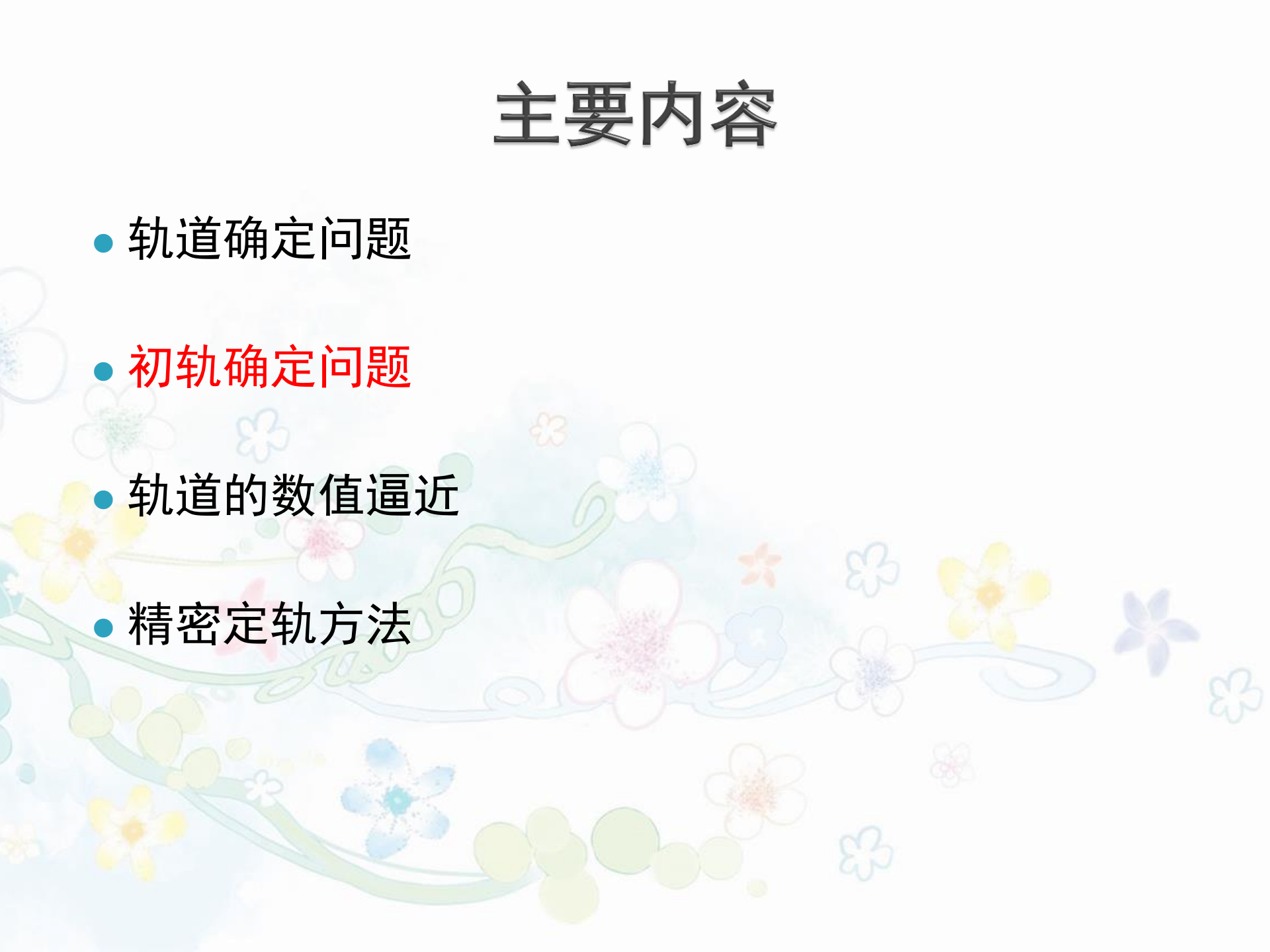
# 轨道确定应用场景

- 非合作目标定轨、空间态势分析、编目
- 导航卫星、高精度测地卫星，提供定位服务及科学服务
- 星弹判别与攻防等定轨，为空间安全服务。
- 气象卫星、通信卫星、遥感等测定轨，提供工程或科学服务。
- 深空探测飞行器、自然卫星、小行星轨道确定

# 轨道确定方法分类



# 主要内容

- 轨道确定问题
  - 初轨确定问题
  - 轨道的数值逼近
  - 精密定轨方法
- 

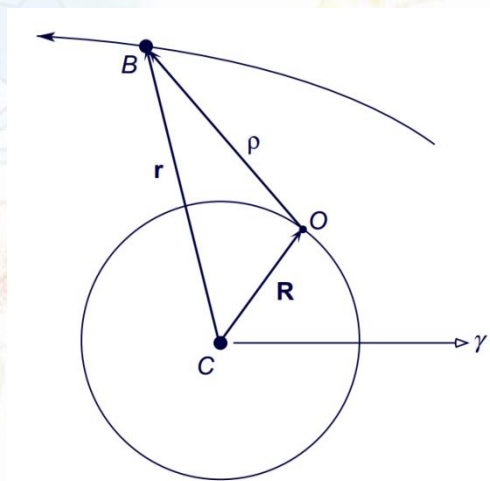
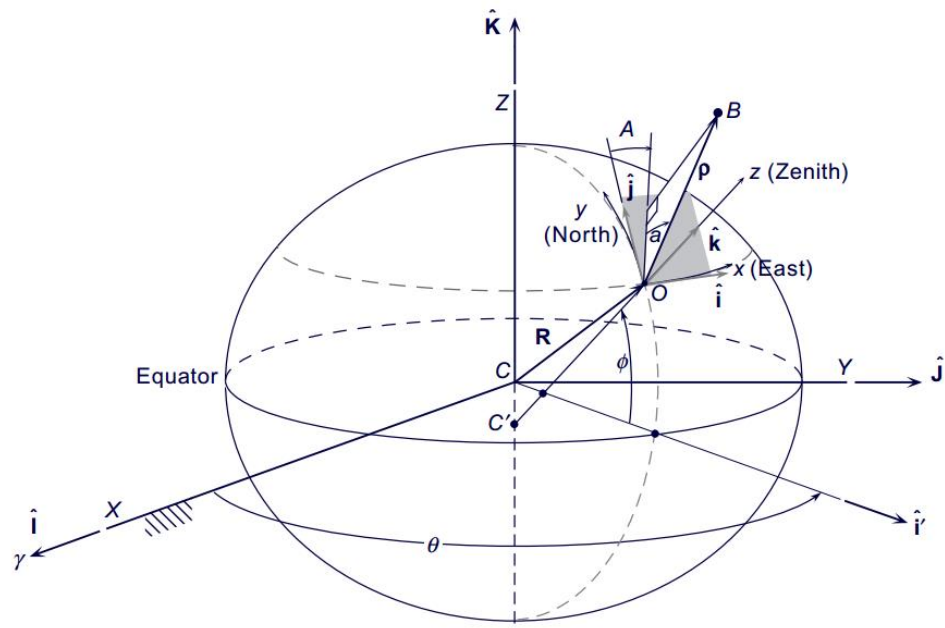
# 测角资料几何条件

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + \mathbf{R}$$

$$\vec{\rho} = \rho \hat{\rho}, \quad \hat{\rho} = (\lambda, \mu, \nu)^T$$

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = (GR)^T (ZR) \begin{pmatrix} \cosh h \cos A \\ -\cosh h \sin A \\ \sinh h \end{pmatrix}$$



# 动力学条件及F\G展开

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{F}_\varepsilon(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t; \varepsilon) \\ t_0 : \vec{r}_0 = \vec{r}(t_0), \quad \dot{\vec{r}}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0) \end{cases}$$

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \mathbf{r}}{dt^n} \Big|_{t=t_0} (\Delta t)^n.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) = & \mathbf{r}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0 \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\mu}{r_0^3} (\Delta t)^2 \mathbf{r}_0 + \frac{1}{6} (\Delta t)^3 \left[ \frac{3\mu}{r_0^5} (\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0)_0 \mathbf{r}_0 - \frac{\mu}{r_0^3} \dot{\mathbf{r}}_0 \right] \\ & + \frac{1}{24} (\Delta t)^4 \left\{ \left[ -\frac{15\mu}{r_0^7} (\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0)^2 - \frac{2\mu^2}{r_0^6} + \frac{3\mu}{r_0^5} v^2 \right] \mathbf{r}_0 + \frac{6\mu}{r_0^5} (\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0) \dot{\mathbf{r}}_0 \right\} + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) = & \left\{ 1 - \frac{\mu}{2r_0^3} (\Delta t)^2 + \frac{\mu}{2r_0^5} (\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0) (\Delta t)^3 \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{24} \left[ -\frac{15}{r_0^7} (\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0)^2 - \frac{2\mu}{r_0^6} + \frac{3}{r_0^5} v_0^2 \right] (\Delta t)^4 + \dots \right\} \mathbf{r}_0 \\ & + \left[ \Delta t - \frac{\mu}{6r_0^3} (\Delta t)^3 + \frac{\mu}{4r_0^5} (\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{r}}_0) (\Delta t)^4 + \dots \right] \dot{\mathbf{r}}_0. \end{aligned}$$

# Laplace-Zhang方法基本方程

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + \mathbf{R}$$

$$\hat{\rho} \times \mathbf{r} = \hat{\rho} \times \rho \hat{\rho} + \hat{\rho} \times \mathbf{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (F\nu)x_0 - (F\lambda)z_0 + (G\nu)\dot{x}_0 - (G\lambda)\dot{z}_0 = (\nu X_e - \lambda Z_e) \\ (F\nu)y_0 - (F\mu)z_0 + (G\nu)\dot{y}_0 - (G\mu)\dot{z}_0 = (\nu Y_e - \mu Z_e) \\ (F\mu)x_0 - (F\lambda)y_0 + (G\mu)\dot{x}_0 - (G\lambda)\dot{y}_0 = (\mu X_e - \lambda Y_e) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{形式上的} \\ \text{线性方程} \\ \\ \text{无摄} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (F\nu)x_0 - (F_z\lambda)z_0 + (G\nu)\dot{x}_0 - (G_z\lambda)\dot{z}_0 = (\nu X_e - \lambda Z_e) \\ (F\nu)y_0 - (F_z\mu)z_0 + (G\nu)\dot{y}_0 - (G_z\mu)\dot{z}_0 = (\nu Y_e - \mu Z_e) \\ (F\mu)x_0 - (F\lambda)y_0 + (G\mu)\dot{x}_0 - (G\lambda)\dot{y}_0 = (\mu X_e - \lambda Y_e) \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ \text{受摄} \end{array}$$



# F、G级数

$$\begin{aligned}
 F = & 1 + \frac{\tau^2}{2} \left[ -u^3 + \left( \frac{3J_2}{2} \right) (5u_7 z_0^2 - u_5) - \mu' u'_3 \right] \\
 & + \frac{\tau^3}{6} \left[ (3u_5 \sigma) + \left( \frac{3J_2}{2} \right) (5(u_7 - 7u_9 z_0^2) \sigma + 10u_7 z_0 \dot{z}_0) \right] \\
 & + \frac{\tau^4}{24} \left[ u_5 (3v_0^2 - 2u_1 - 15u_2 \sigma^2) + \left( \frac{3J_2}{2} \right) (6u_8 (4u_2 z_0^2 - 1) - 5u_7 (7u_2 z_0^2 - 1) v_0^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + 10u_7 \dot{z}_0^2 + 35u_9 (9u_2 z_0^2 - 1) \sigma^2 - 140u_9 \sigma z_0 \dot{z}_0) + u_3 (\mu' u'_3) \right] \\
 & + \frac{\tau^5}{120} u_7 [15\sigma (-3v_0^2 + 2u_1 + 7u_2 \sigma^2)] + O(\tau^6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G = & \tau + \frac{\tau^3}{6} \left[ -u_3 + \left( \frac{3J_2}{2} \right) (5u_7 z_0^2 - u_5) - \mu' u'_3 \right] \\
 & + \frac{\tau^4}{24} \left[ 6u_5 \sigma + \left( \frac{3J_2}{2} \right) (20u_7 z_0 \dot{z}_0 - 10u_7 (7u_2 z_0^2 - 1) \sigma) \right] \\
 & + \frac{\tau^5}{120} u_5 [9v_0^2 - 8u_1 - 45u_2 \sigma^2] + O(\tau^6)
 \end{aligned}$$

$$F_z = F + \left( \frac{3J_2}{2} \right) \left[ \frac{\tau^2}{2} (-2u_5) + \frac{\tau^3}{6} (10u_7 \sigma) + \frac{\tau^4}{24} u_7 (10v_0^2 - 6u_1 - 70u_2 \sigma^2) \right]$$

$$G_z = G + \left( \frac{3J_2}{2} \right) \left[ \frac{\tau^3}{2} (-2u_5) + \frac{\tau^4}{24} (20u_7 \sigma) \right]$$

$$\begin{cases} u_n = 1 / r_0^n, & \sigma = \vec{r}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0, & v_0^2 = \dot{\vec{r}}_0 \cdot \dot{\vec{r}}_0 \\ u'_n = 1 / r_0'^n, & r_0' = |\vec{r}_0'| \end{cases}$$

# 首次迭代与封闭级数

对目标无任何先验信息

$$F^{(0)} = 1, \quad G^{(0)} = \tau, \quad F_z^{(0)} = F^{(0)}, \quad G_z^{(0)} = G^{(0)}$$

$$F = 1 - \frac{\mu}{2r_0^3} (t_i - t_0)^2$$

$$F = 1 - \frac{a}{r_0} (1 - \cos \Delta E)$$

$$G = t_i - t_0 - \frac{\mu}{2r_0^3} (t_i - t_0)^3$$

$$G = t_i - t_0 - \frac{1}{n} (\Delta E - \sin \Delta E)$$

# Laplace-Zhang方法

- ▶ 拉普拉斯方法的关键：
- ▶ 1.消除距离变量
- ▶ 2. $F/G$ 一阶项对短弧是很好的近似

对于无任何先验信息的初轨确定，第一次迭代非常关键。从第二次迭代开始 $F$ 、 $G$ 可以用封闭表达式代替级数

定初轨时，以上“线性系统”只是形式上是线性的，实际上是非线性的，其系数是轨道（待估）的函数。需要通过迭代完成初轨的改进。

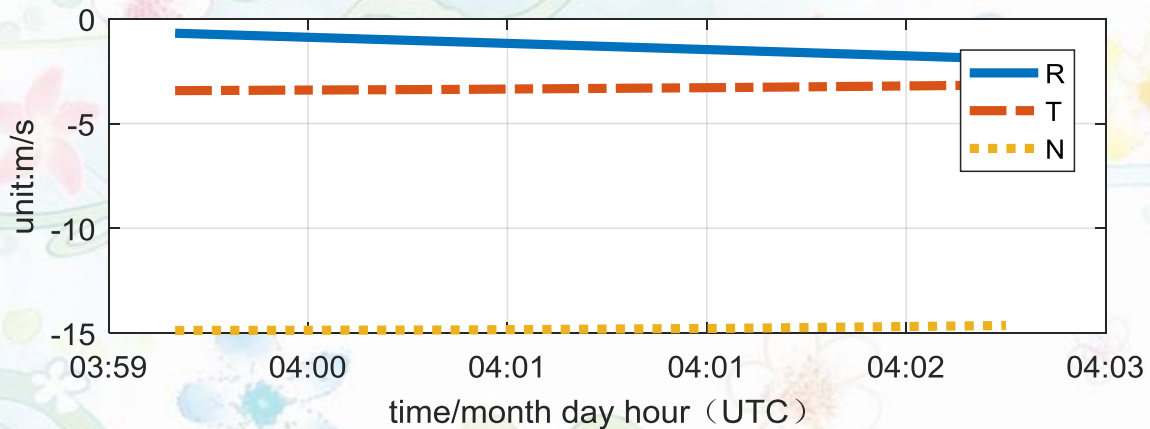
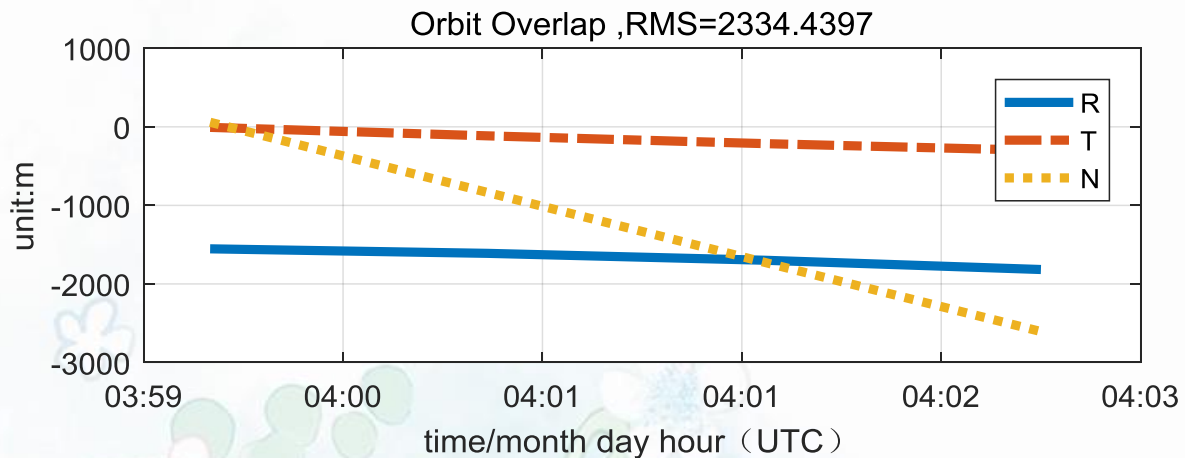
# 天基平台测角拉普拉斯方法 低低模式初轨确定

平台轨道	高度400km，近圆轨道，倾角42°。轨道噪声1米。
目标轨道	高度800km，近圆轨道，倾角80。
测量数据	采样率1秒，精度0.5角秒。

epoch1	2018.0	8.0	21.0
epoch2	4.0	00.0	00.000
pos 0	7278063.978	-29901.639	-12992.788
vel 0	18.289	1284.862	7288.046

2	pos 0	7298676.644	-30007.840	-13028.426
	vel 0	17.770	1114.764	7364.932
3	pos 0	7276510.626	-29953.685	-12986.493
	vel 0	17.648	1298.911	7282.058
4	pos 0	7244075.551	-29893.627	-12920.345
	vel 0	17.112	1568.733	7160.580
8	pos 0	6512857.661	-37752.246	-10076.740
	vel 0	1.227	7756.661	4390.572

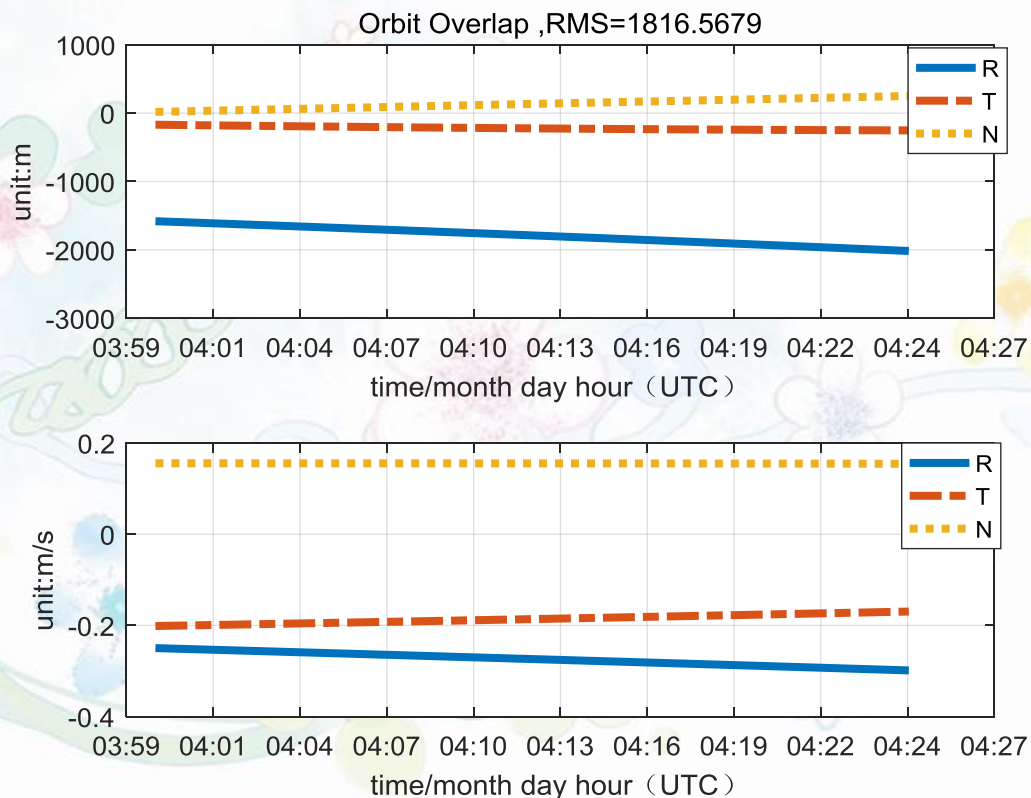
# 低低模式与仿真轨道比较



# 低高模式初轨模式

平台轨道	高度400km，近圆轨道，倾角 $42^\circ$ 。轨道噪声1米。
GEO轨道	星下点经度 $120^\circ$ 。
测量数据	采样率3秒，精度0.5角秒。

定轨弧  
长为25  
分钟时



# 小行星01620初轨确定（黄道系）

定轨结果		MPC官网公布	
对应历元：2015-09-02T09:07:30.640		对应历元：2021-07-05 T00:00:00	
半长轴 (AU)	1.21958	半长轴 (AU)	1.2455977
离心率 (°)	0.33481558	离心率 (°)	0.3354475
轨道倾角 (°)	13.03812021	轨道倾角 (°)	13.33761
升交点赤经 (°)	336.14097588	升交点赤经 (°)	337.18541
近日点幅角 (°)	275.15046266	近日点幅角 (°)	276.95242
平近地点角 (°)	89.44606836	平近地点角 (°)	158.69917

# 小行星08567初轨确定（黄道系）

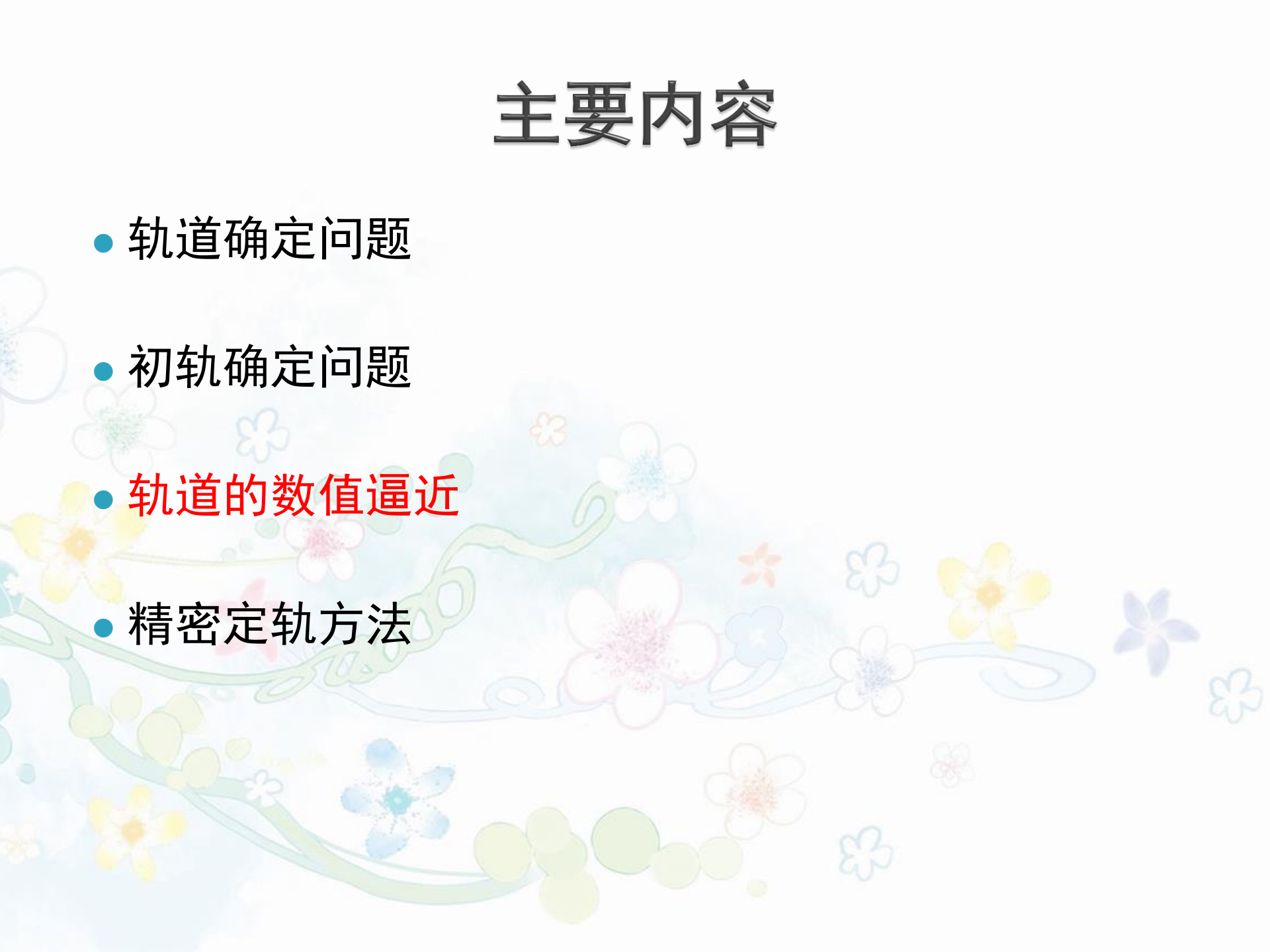
定轨结果		MPC官网公布	
对应历元：2014-11-09T09:07:30.640		对应历元：2020-12-17 T00:00:00	
半长轴（AU）	2.044166	半长轴（AU）	2.0457249
离心率（°）	0.44824411	离心率（°）	0.4492428
轨道倾角（°）	8.44089985	轨道倾角（°）	8.44926
升交点赤经（°）	177.16994068	升交点赤经（°）	177.10617
近日点幅角（°）	176.97020236	近日点幅角（°）	177.25595
平近地点角（°）	37.16932227	平近地点角（°）	67.91134



# 小行星01866初轨确定（黄道系）

定轨结果		MPC官网公布	
对应历元：2015-04-01T04:33:32.640		对应历元：2021-07-05 T00:00:00	
半长轴（AU）	1.894266	半长轴（AU）	1.8934299
离心率（°）	0.53818447	离心率（°）	0.5383079
轨道倾角（°）	41.18762216	轨道倾角（°）	41.20361
升交点赤经（°）	63.51191260	升交点赤经（°）	63.47445
近日点幅角（°）	293.08293930	近日点幅角（°）	293.07509
平近地点角（°）	110.48832176	平近地点角（°）	255.48608

# 主要内容

- 轨道确定问题
  - 初轨确定问题
  - 轨道的数值逼近
  - 精密定轨方法
- 

# 样条基的构造

$$N_{i,2}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+2} - u_i} N_{i,1}(u) + \frac{u_{i+3} - u}{u_{i+3} - u_{i+1}} N_{i+1,1}(u)$$

$$= \begin{cases} \frac{(u - u_i)^2}{(u_{i+1} - u_i)(u_{i+2} - u_i)}, & u \in [u_i, u_{i+1}) \\ \frac{(u - u_i)(u_{i+2} - u)}{(u_{i+2} - u_i)(u_{i+2} - u_{i+1})} + \frac{(u - u_{i+1})(u_{i+3} - u)}{(u_{i+2} - u_{i+1})(u_{i+3} - u_{i+1})}, & u \in [u_{i+1}, u_{i+2}) \\ \frac{(u_{i+3} - u)^2}{(u_{i+3} - u_{i+1})(u_{i+3} - u_{i+2})}, & u \in [u_{i+2}, u_{i+3}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

B样条基函数具有局部支集性

$$N'_{i,p}(u) = \frac{p}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

$$N_{i,3}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+3} - u_i} N_{i,2}(u) + \frac{u_{i+4} - u}{u_{i+4} - u_{i+1}} N_{i+1,2}(u)$$

$$= \begin{cases} \frac{(u - u_i)^3}{(u_{i+1} - u_i)(u_{i+2} - u_i)(u_{i+3} - u_i)}, & u \in [u_i, u_{i+1}) \\ \frac{(u - u_i)^2(u_{i+2} - u)}{(u_{i+2} - u_i)(u_{i+2} - u_{i+1})(u_{i+3} - u_i)} + \frac{(u - u_{i+1})(u_{i+3} - u)(u - u_{i+1})}{(u_{i+2} - u_{i+1})(u_{i+3} - u_{i+1})(u_{i+2} - u_{i+1})} + \frac{(u_{i+4} - u)(u - u_{i+1})^2}{(u_{i+2} - u_{i+1})(u_{i+3} - u_{i+1})(u_{i+4} - u_{i+1})}, & u \in [u_{i+1}, u_{i+2}) \\ \frac{(u - u_i)(u_{i+3} - u)^2}{(u_{i+3} - u_i)(u_{i+3} - u_{i+1})(u_{i+3} - u_{i+2})} + \frac{(u - u_{i+1})(u_{i+3} - u)(u_{i+4} - u)}{(u_{i+3} - u_{i+1})(u_{i+3} - u_{i+2})(u_{i+4} - u_{i+1})} + \frac{(u_{i+4} - u)^2(u - u_{i+2})}{(u_{i+4} - u_{i+1})(u_{i+4} - u_{i+2})(u_{i+3} - u_{i+2})}, & u \in [u_{i+2}, u_{i+3}) \\ \frac{(u_{i+4} - u)^3}{(u_{i+4} - u_{i+1})(u_{i+4} - u_{i+2})(u_{i+4} - u_{i+3})}, & u \in [u_{i+3}, u_{i+4}) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

# 外测弹道确定：样条基构造

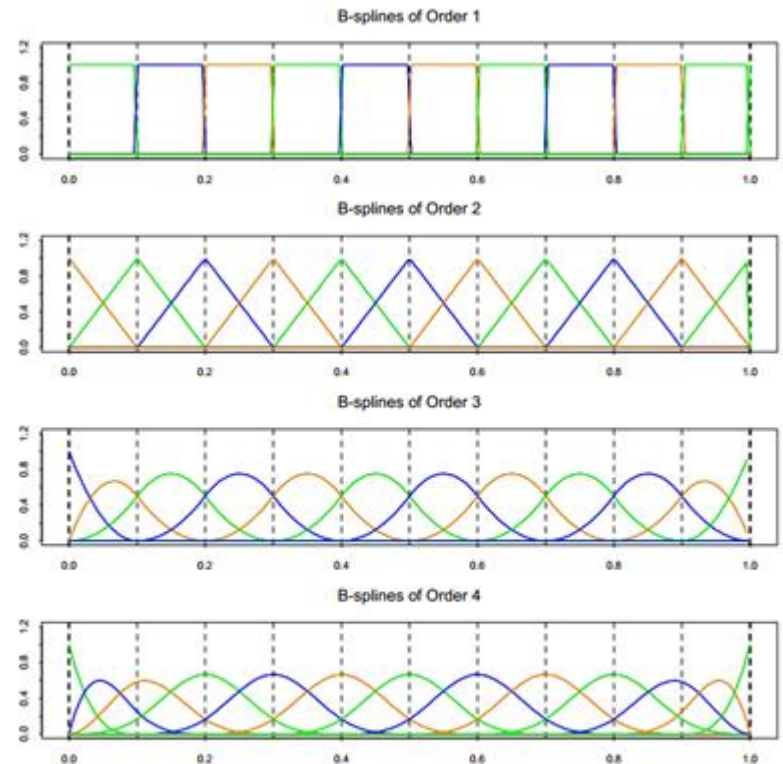
$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [u_i, u_{i+1}) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i,p-1}(u), \quad p \geq 1$$

$$B_k = \frac{\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{k+1}{j} \left(x + \frac{k+1}{2} - j\right)_+^k}{k!}$$

$$u_+^0 = \begin{cases} 1, & (u > 0) \\ \frac{1}{2}, & (u = 0) \\ 0, & (u < 0) \end{cases} \quad u_+^m = \begin{cases} u^m, & (u \geq 0) \\ 0, & (u < 0) \end{cases}, \quad (m = 1, 2, \dots)$$

$N_{0,0}$	$N_{0,1}$	
$N_{1,0}$	$N_{1,1}$	$N_{0,2}$
$N_{2,0}$	$N_{2,1}$	$N_{1,2}$
$N_{3,0}$	$N_{3,1}$	$N_{2,2}$
$N_{4,0}$		$N_{3,2}$
		$N_{4,2}$
		$\vdots$
		$\vdots$
		$\vdots$



The sequence of B-splines up to order four with ten knots evenly spaced from 0 to 1. The B-splines have local support; they are nonzero on an interval spanned by  $M + 1$  knots.

# 外测弹道确定：样条弹道逼近

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \sum_{j=1}^P \alpha_j B\left(\frac{t-T_j}{h}\right), \quad x(t) = \sum_{j=1}^P \frac{\alpha_j B\left(\frac{t-T_j}{h}\right)}{h} \\ y(t) = \sum_{j=1}^P \beta_j B\left(\frac{t-T_j}{h}\right), \quad y(t) = \sum_{j=1}^P \frac{\beta_j B\left(\frac{t-T_j}{h}\right)}{h}, \\ z(t) = \sum_{j=1}^P \gamma_j B\left(\frac{t-T_j}{h}\right), \quad z(t) = \sum_{j=1}^P \frac{\gamma_j B\left(\frac{t-T_j}{h}\right)}{h} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} h = \frac{(T_{P-1} - T_2)}{P-3} \\ T_j = T_2 + (j-2)h \end{array} \right.$$

$$B_3 = \begin{cases} 0, (|x| \geq 2) \\ \frac{1}{2}|x|^3 - x^2 + \frac{2}{3}, (|x| \leq 1) \\ -\frac{1}{6}|x|^3 + x^2 - 2|x| + \frac{4}{3}, (1 < |x| < 2) \end{cases}$$

$$B_3(x) = \begin{cases} 0 & , |x| \geq 2 \\ \left\langle \begin{array}{l} \frac{3}{2}|x|^2 - 2x & , x > 0 \\ -\frac{3}{2}|x|^2 - 2x & , x < 0 \end{array} \right\rangle & , |x| < 1 \\ \left\langle \begin{array}{l} -\frac{1}{2}|x|^2 + 2x - 2 & , x > 0 \\ \frac{1}{2}|x|^2 + 2x + 2 & , x < 0 \end{array} \right\rangle & , 1 \leq |x| < 2 \end{cases}$$

# 外测弹道确定：线性化方程

$$O-C = \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial X} \\ \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi \\ \Theta \end{bmatrix} \Delta\psi \quad \psi = [\alpha_1, \dots, \alpha_P, \beta_1, \dots, \beta_P, \gamma_1, \dots, \gamma_P]^T$$

$$\left\{ \begin{aligned} B_1 &= \begin{bmatrix} B\left(\frac{t_1-T_1}{h}\right) & B\left(\frac{t_1-T_2}{h}\right) & \dots & B\left(\frac{t_1-T_P}{h}\right) \\ B_2 &= \begin{bmatrix} B\left(\frac{t_2-T_1}{h}\right) & B\left(\frac{t_2-T_2}{h}\right) & \dots & B\left(\frac{t_2-T_P}{h}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_m &= \begin{bmatrix} B\left(\frac{t_m-T_1}{h}\right) & B\left(\frac{t_m-T_2}{h}\right) & \dots & B\left(\frac{t_m-T_P}{h}\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} B_1 & B_1 & B_1 \\ B_2 & B_2 & B_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ B_m & B_m & B_m \end{bmatrix}$$

线性问题?  
初值问题?

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{B}_1 &= \begin{bmatrix} \dot{B}\left(\frac{t_1-T_1}{h}\right) & \dot{B}\left(\frac{t_1-T_2}{h}\right) & \dots & \dot{B}\left(\frac{t_1-T_P}{h}\right) \\ \dot{B}_2 &= \begin{bmatrix} \dot{B}\left(\frac{t_2-T_1}{h}\right) & \dot{B}\left(\frac{t_2-T_2}{h}\right) & \dots & \dot{B}\left(\frac{t_2-T_P}{h}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{B}_m &= \begin{bmatrix} \dot{B}\left(\frac{t_m-T_1}{h}\right) & \dot{B}\left(\frac{t_m-T_2}{h}\right) & \dots & \dot{B}\left(\frac{t_m-T_P}{h}\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \right.$$

$$\Theta = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \dot{B}_1 & \dot{B}_1 & \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 & \dot{B}_2 & \dot{B}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{B}_m & \dot{B}_m & \dot{B}_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X = F_1(\alpha_1, \dots, \alpha_P), \dot{X} = F_4(\alpha_1, \dots, \alpha_P) \\ Y = F_2(\beta_1, \dots, \beta_P), \dot{Y} = F_5(\beta_1, \dots, \beta_P) \\ Z = F_3(\gamma_1, \dots, \gamma_P), \dot{Z} = F_6(\gamma_1, \dots, \gamma_P) \end{cases}$$

# 约束条件下探测器状态估值

- ▶ 微分方程（动力学）约束
- ▶ 代数方程约束

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{G}(\mathbf{X}_i, t_i) + \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad \mathbf{H}_k \boldsymbol{\psi} = \mathbf{f}_k(\mathbf{X}_k, t_k)$$

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \|\mathbf{O} - \mathbf{C}\|^2 \\ & \text{subject to } \mathbf{H}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{f} \end{aligned} \quad \left\{ \sum_{l=1} \left[ \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \\ \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix}_l \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix}_l \right]^T \mathbf{R}_l^{-1} \left[ \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \\ \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix}_l \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix}_l \right] + \sum_{l=1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{H}_k \right\} \Delta \boldsymbol{\psi}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad = \sum_{l=1} \left[ \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \\ \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix}_l \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix}_l \right]^T \mathbf{R}_l^{-1} [\mathbf{O}_l - \mathbf{C}_l] + \sum_{l=1} \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{Q}_k^T \mathbf{f}_k$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{f}(\mathbf{X}_k, t_k)$$

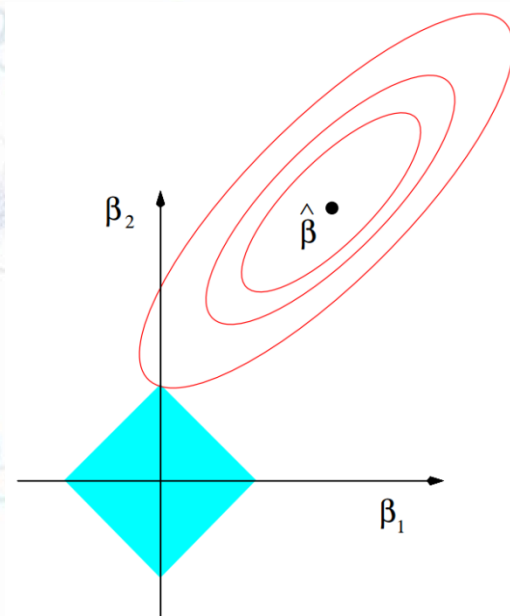
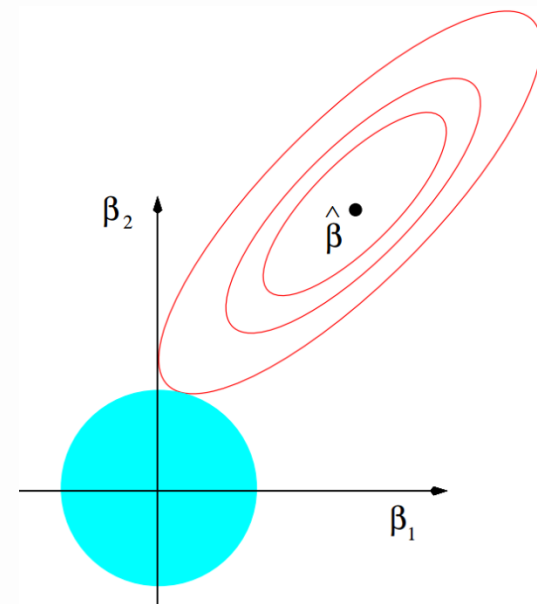
$$\ddot{\mathbf{B}}_k = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{B}}\left(\frac{t_k - T_1}{h}\right) & \ddot{\mathbf{B}}\left(\frac{t_k - T_2}{h}\right) & \dots & \ddot{\mathbf{B}}\left(\frac{t_k - T_P}{h}\right) \end{bmatrix} \quad \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{B}}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddot{\mathbf{B}}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddot{\mathbf{B}}_k \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x(\mathbf{X}_k, t_k) \\ \mathbf{f}_y(\mathbf{X}_k, t_k) \\ \mathbf{f}_z(\mathbf{X}_k, t_k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_k = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{B}}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddot{\mathbf{B}}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddot{\mathbf{B}}_k \end{bmatrix}$$

# 近欠定情况下的处理策略

$$\begin{cases} \Delta\hat{\psi} = \arg \min \sum_{i=1} (Y_i - G(X_i, t_i))^T w_i (Y_i - G(X_i, t_i)) \\ \text{s.t. } (\Delta\hat{\psi})^T (\Delta\hat{\psi}) \leq t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\hat{\psi} = \arg \min \sum_{i=1} (Y_i - G(X_i, t_i))^T w_i (Y_i - G(X_i, t_i)) \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^p |\alpha_j| + \sum_{j=1}^p |\beta_j| + \sum_{j=1}^p |\gamma_j| \leq t \end{cases}$$





# GNC仿真制导弹道(前420s)

三向测量数据采样率为1/s，测距数据噪声标准差为2m，测速数据噪声标准差为1.5cm/s；VLBI时延采样率为5/s，数据噪声标准差为1.2m，时延率噪声标准差为3E-4m/s

解算策略	与GNC参考弹道位置误差RMS(m)			
	R	T	N	Total
四阶多项式	78.365	51.927	36.299	100.773
五阶多项式	82.365	98.128	72.049	146.983
B样条10节点	78.654	43.725	29.324	94.648
B样条20节点	68.446	44.13	29.549	86.648
B样条30节点	63.432	40.091	29.607	80.668
B样条40节点	70.991	48.819	29.966	91.229
B样条50节点	75.73	37.356	33.29	90.767

# 前420s解算结果

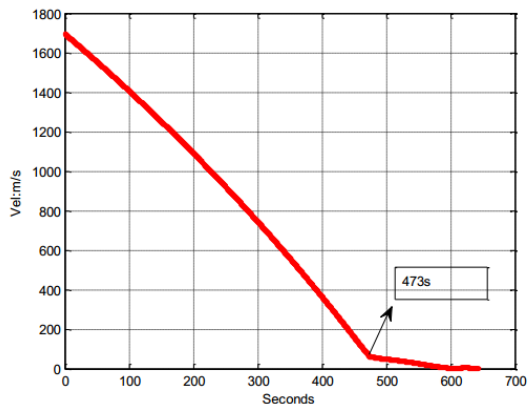
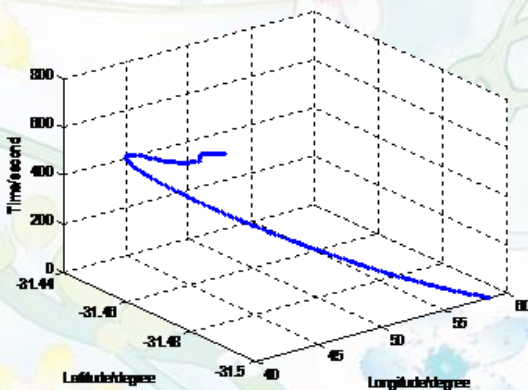
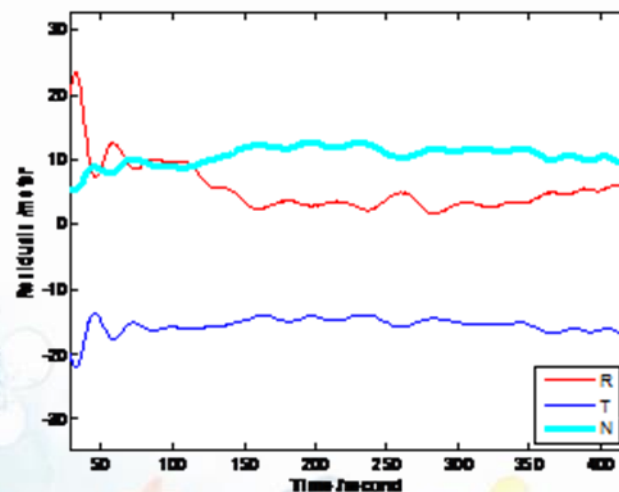


图1 月球软着陆速度变化示意图（仿真弹道）



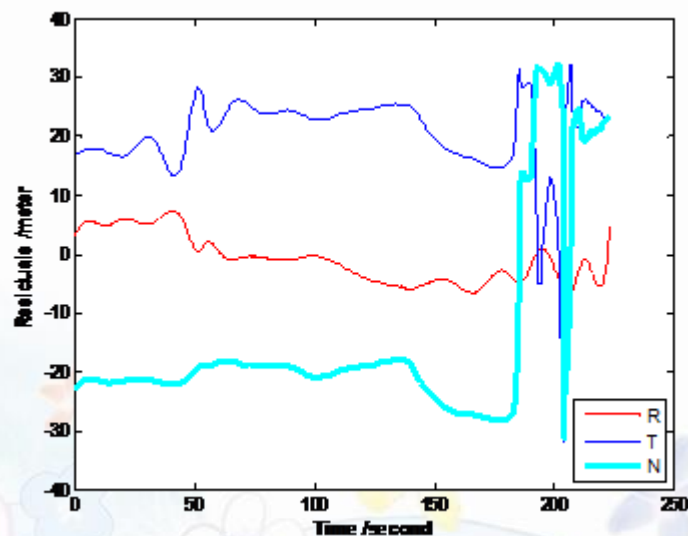
GNC弹道在月固坐标系下经纬度变化曲线

三向测量+VLBI数据解算，30个节点B样条解算结果与GNC仿真弹道比较。

# 后224s解算结果

解算策略	与GNC参考弹道位置误差RMS(m)			
	R	T	N	Total
5节点	187.366	199.984	346.469	441.747
10节点	30.712	38.519	21.498	53.751
15节点	18.485	25.453	36.018	47.821
20节点	14.437	29.3	23.489	40.232
25节点	14.909	36.451	32.212	50.878

三向测量后224秒解算结果GNC参考弹道比较



后224秒三向测量+VLBI数据标准B样条弹道解算结果

# 三向测距系统误差

## ▶ 测距噪声 < 1m

## ▶ 系统误差

- 星上应答机零值：~225m (f1)
- 设备时延，每次观测开始，捕获-距捕后，该值都会变化；
- 测站钟差；
  - 时间同步，GPS单向授时，精度10-20ns，三亚站没有装备氢原子钟，钟的稳定性较差；
- 主站不同系统误差不同，试验中KS/JMS/SY分别做主站，动力落月和月面工作段KS做主站。

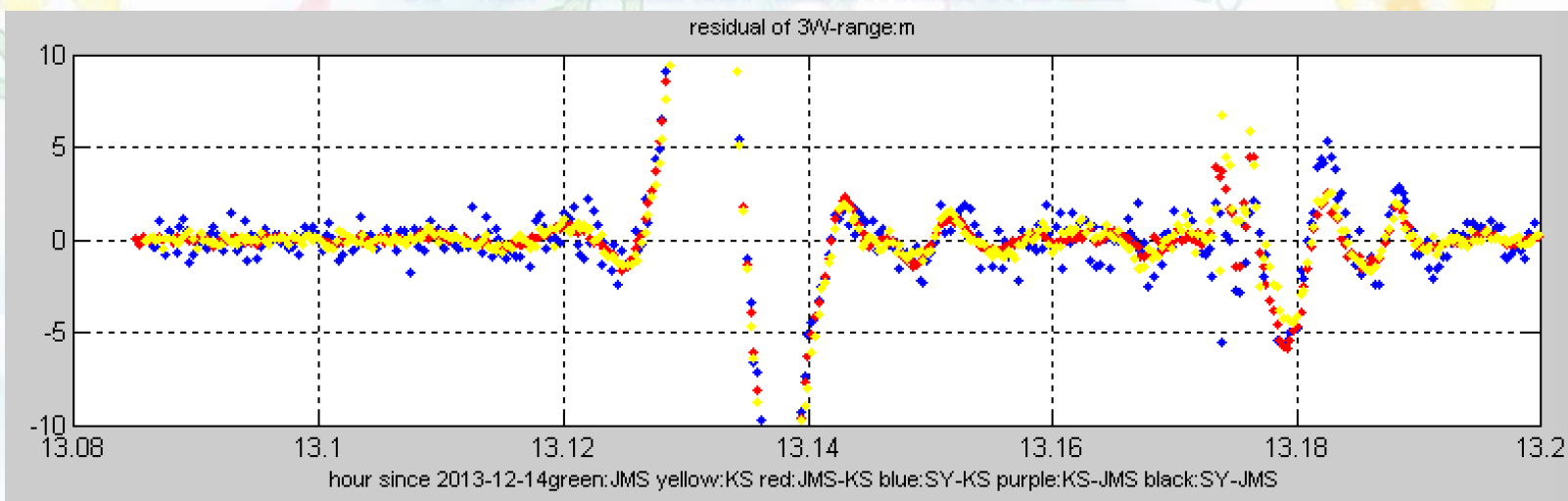
## ▶ 在动力落月段轨迹确定中

- 三向测距系统误差不能全部放开解算；
- 固定KS主站的系统误差（来自于前期时延先验值222.0m），解算JMS-KS和SY-KS。

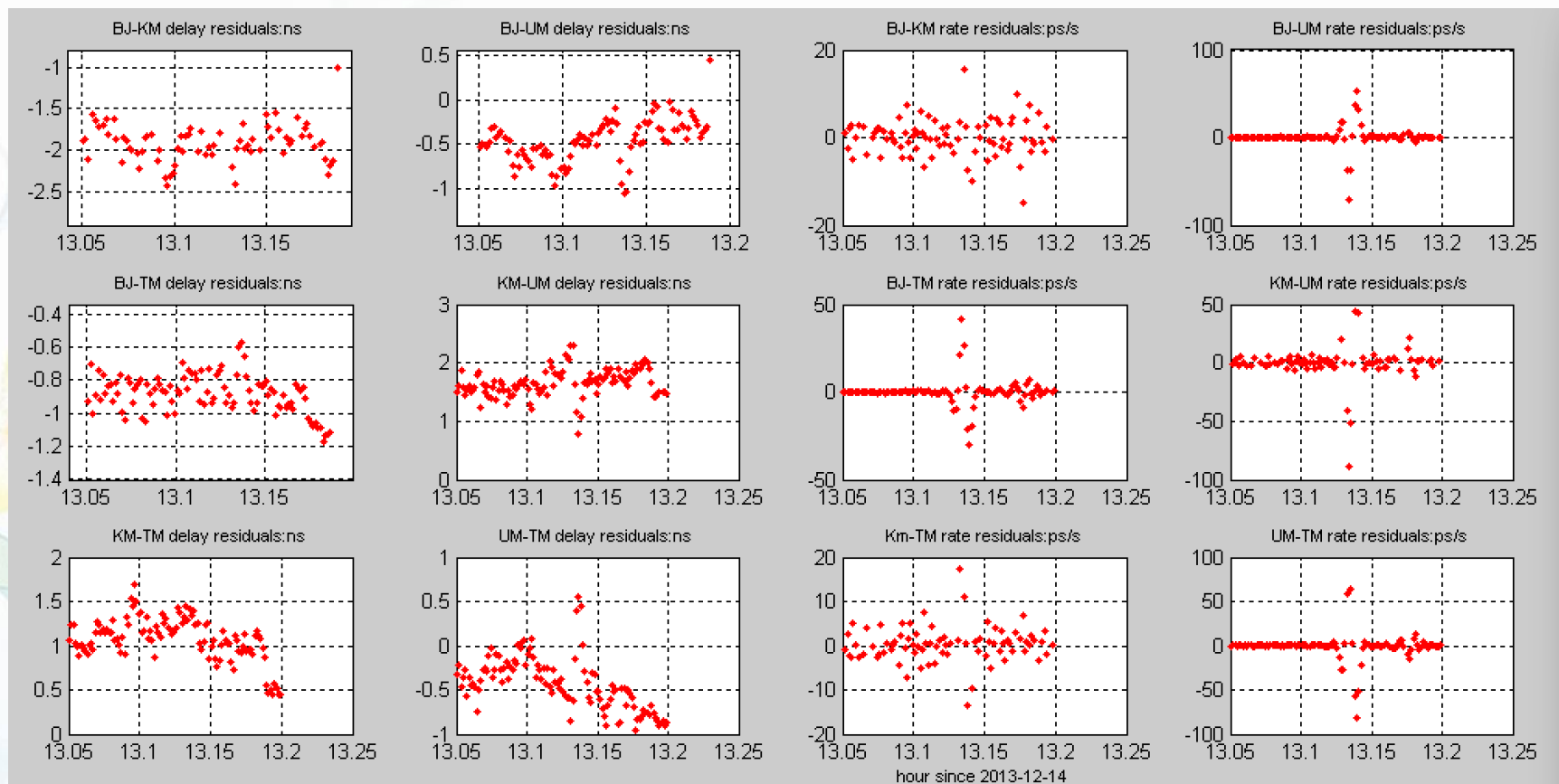
# 落月前三向测距系统误差标校值

	开始时刻	结束时刻	系统差 (m)	BACC (m)
佳木斯-喀什	12-12T18:57:00	12-12T20:02:00	207	209
喀什-喀什	12-12T18:57:00	12-12T20:02:00	222	224
三亚-喀什	12-12T18:57:00	12-12T20:02:00	186	189

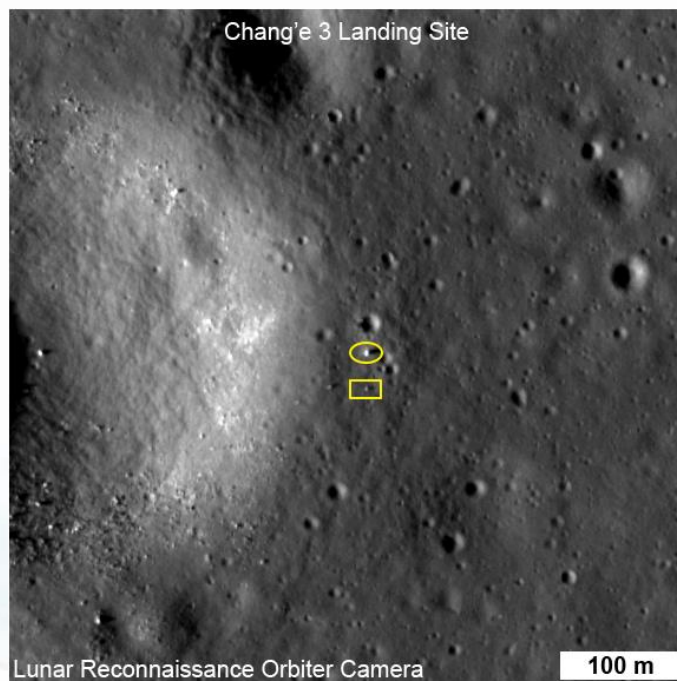
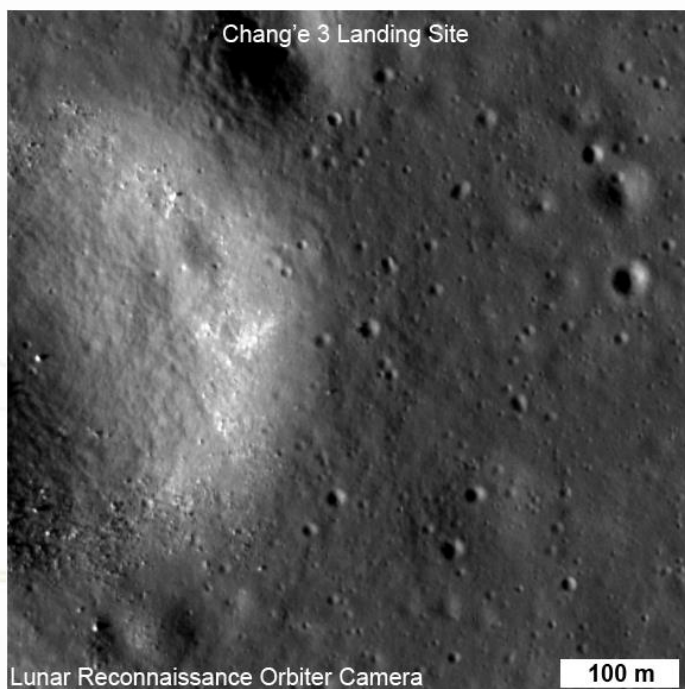
## 实测三程数据处理残差



# 实测VLBI残差



# 落月末点与着陆器定位结果比较



计算方法	经度 (度)	纬度 (度)	高程 (米)
NASA LRO拍照	-19.5116	44.1214	-2640.0
着陆器统计定位	-19.5102	44.1205	-2636.6
样条弹道末点	-19.5045	44.1196	-2619.5

- 根据动力落月段定轨结果还可以判断出 CE-3 的着陆时刻, 根据 1 s 采样率的定轨计算结果, 从 14 日 21 时 11 分 19 秒之后, 探测器在月固系的经纬度和高程值基本不变, 从而可以判断该时刻为降落在月球时刻.
- 遥测数据给出 2013 年 12 月 14 日 21 时 11 分 18.695 秒, 嫦娥三号成功实施软着陆.

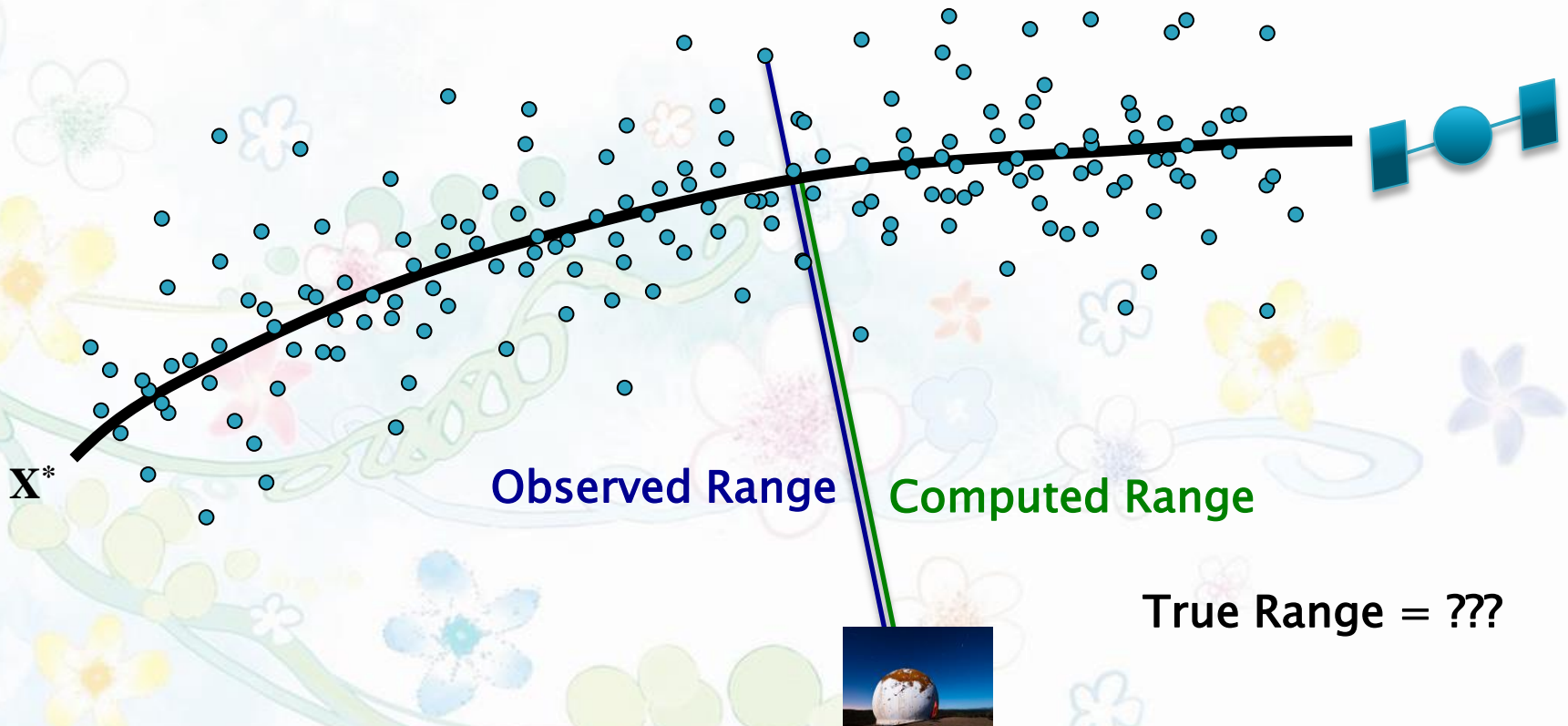
# 主要内容

- 轨道确定问题
- 初轨确定问题
- 轨道的数值逼近
- 精密定轨方法

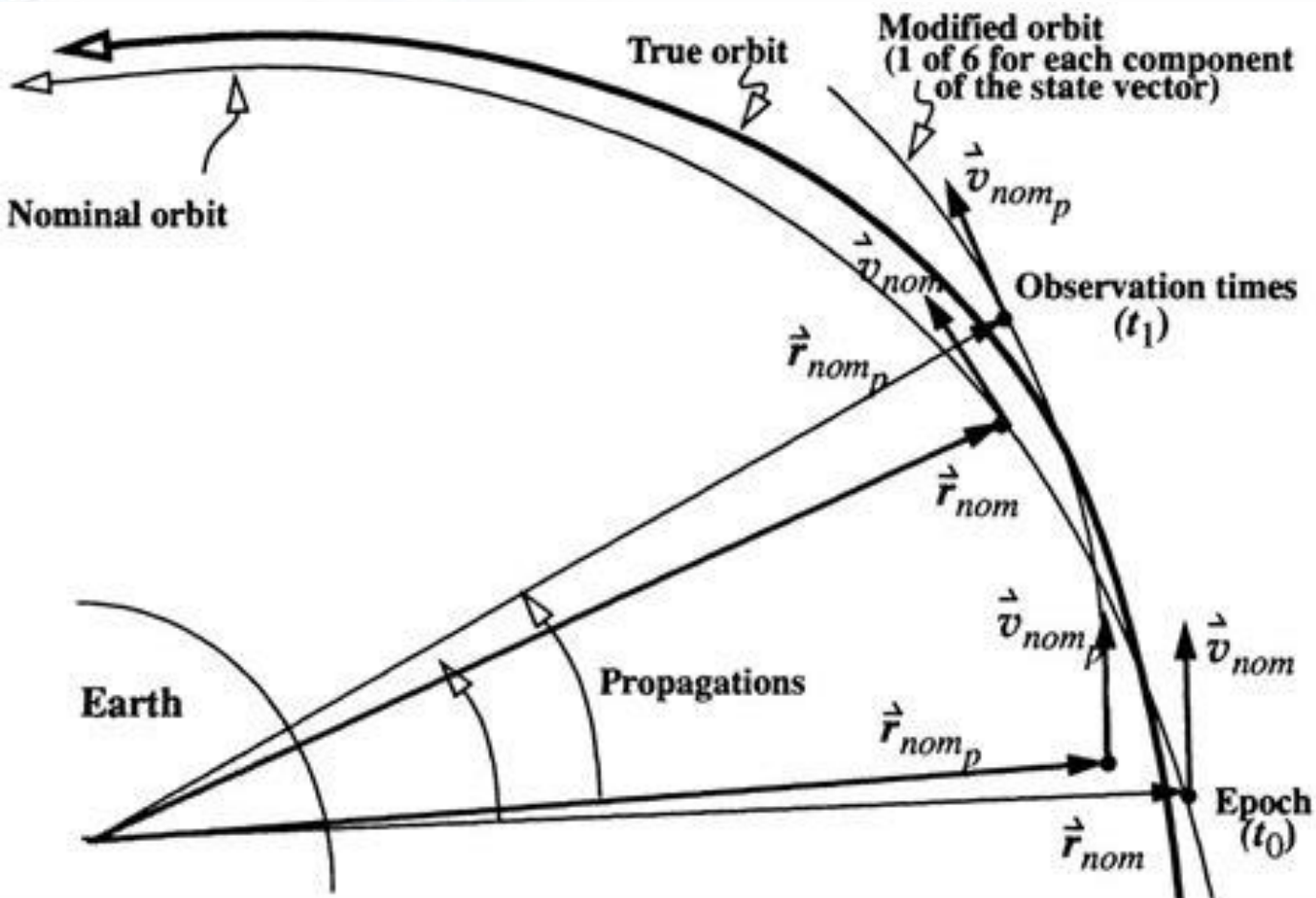
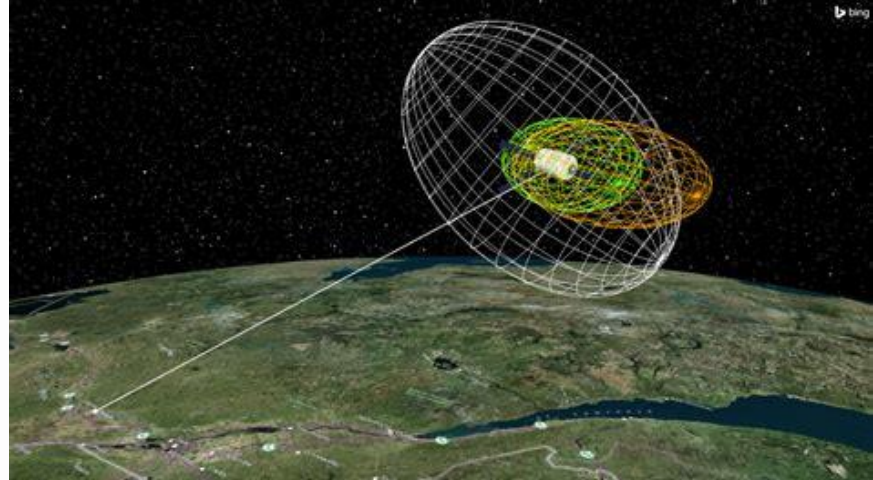


# 动力学统计定轨问题描述

- ▶ 带有观测噪声的动力系统
- ▶ 需要用数学手段把各个历元的观测数据都关联到我们要估计的轨道及其他参数



# 多変元微分改正



# 一般性动力系统估计问题

$$\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X}, t) + \mathbf{u}, \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$

$$\mathbf{Y}_i = G(\mathbf{X}_i, t_i) + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad i = 1, \dots, l$$

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^p$$

状态向量

观测向量

观测方程和动力学方程有一个是非线性的，则该系统即为非线性系统。通常采用线性化处理。

# 批处理估计

$$\mathbf{y} = H \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_0 = (H^T H)^{-1} H^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_l \end{bmatrix} \quad H \equiv \begin{bmatrix} \tilde{H}_1 \Phi(t_1, t_0) \\ \tilde{H}_2 \Phi(t_2, t_0) \\ \vdots \\ \tilde{H}_l \Phi(t_l, t_0) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_1 \\ \boldsymbol{\epsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\epsilon}_l \end{bmatrix}$$

# 线性化

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*(t)$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{X}(t_i) - \mathbf{X}^*(t_i)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{Y}_i - G(\mathbf{X}_i^*, t_i)$$



$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$$

$$\mathbf{y}_i = \tilde{H}_i \mathbf{x}_i + \epsilon_i$$

$$A(t) = \left[ \frac{\partial F(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}(t)} \right]^*, \quad \tilde{H}_i = \left[ \frac{\partial G(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}(t)} \right]_i^*$$

# 状态转移矩阵

- ▶ 线性时变微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}$$

- ▶ 其解的形式为

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t, t_i)\boldsymbol{x}(t_i)$$

- ▶  $\Phi(t, t_i)$  是状态转移矩阵 (STM)，将状态  $\boldsymbol{x}(t_i)$  映射到  $\boldsymbol{x}(t)$

# 状态转移矩阵的微分方程

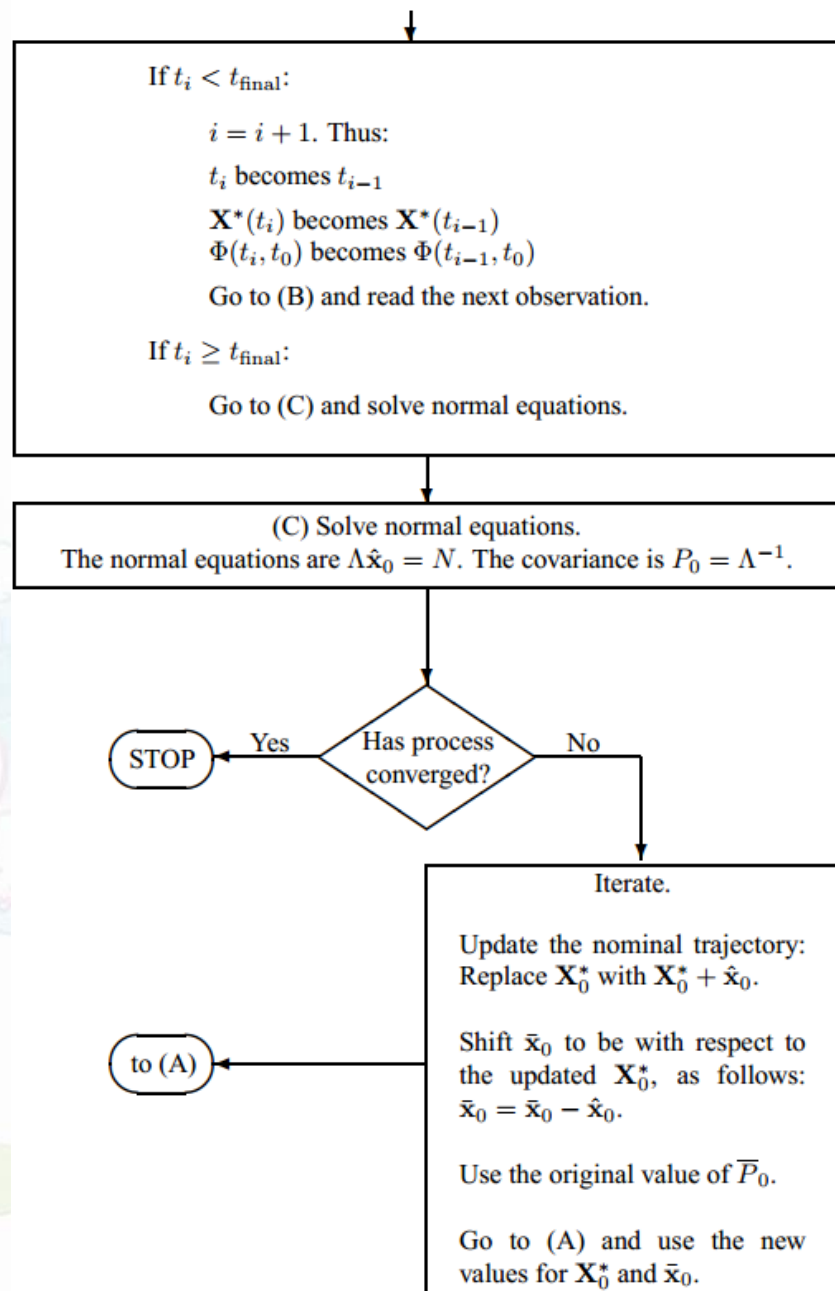
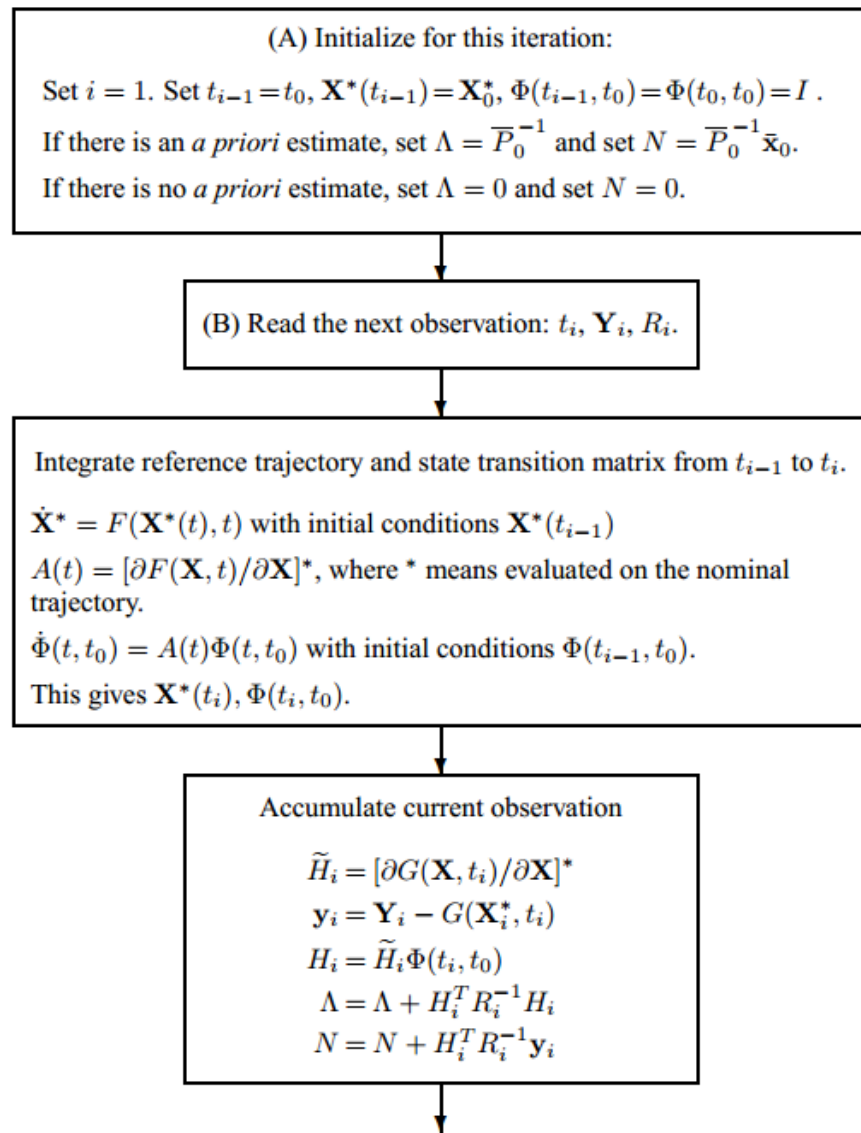
Constant!

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_i) \mathbf{x}(t_i) \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\Phi}(t, t_i) \mathbf{x}(t_i)$$
$$\dot{\mathbf{x}} = A(t) \mathbf{x}$$
$$\dot{\Phi}(t, t_i) \mathbf{x}(t_i) = \dot{A}(t) \Phi(t, t_i) \mathbf{x}(t_i)$$

Why?

$$\dot{\Phi}(t, t_i) = A(t) \Phi(t, t_i), \quad \Phi(t_i, t_i) = \mathbb{I}_n$$

# 批处理流程







# Q&A!

