



南京大學

本科畢業論文

院 系 天文與空間科學學院

專 業 空間科學與技術

題 目 北斗衛星精細力學建模

年 級 14 級 學 號 141210040

學生姓名 楊建華

指導教師 宋葉志 李川 職 稱 高級工程師 副教授

提交日期

北斗卫星精细力学模型建模

摘要

中国北斗卫星导航系统是中国自行研制的世界第三个成熟卫星导航系统。随着北斗导航卫星的快速发展,对北斗卫星轨道的精度要求也不断提高。所以通过研究北斗卫星精细力学建模,不仅可以适应不断提高航天测控中对轨道计算精度的需求,同时也给后续的北斗卫星力学建模,提供一个科学的参考。本文通过选取北斗 13 颗卫星,在考虑第三体摄动,非球形摄动,太阳辐射光压摄动,海潮,固体潮等影响下,通过改变卫星的参考系转换协议;用第三体分析解历表代替第三体数值历表;改变中心天体非球形引力摄动阶数,进行精度到毫米级的轨道预报。并通过比较之间在 RTN 坐标系下的轨道差异。得出不同参考系转换协议,日月低精度分析解代替日月历表,不同重力场阶数对北斗导航卫星轨道预报的影响。

关键词:北斗卫星; IERS 协议; 星历; 地球引力场

Abstract

BDS (BeiDou Navigation Satellite System) is the third mature navigation satellite system in the world. With the rapid development of BDS, the demand of precision of orbit of Beidou Satellite become more and more strict. So by studying the precision mechanics model of Beidou Satellite, it can not only adapt to the increasing requirements of the precision of orbit calculation in the space measurement and control, but also provides a scientific reference for the future modeling of Beidou Satellite mechanics. In the paper, we select 13 Beidou Satellite to predict satellite orbit accurately, in which we consider about various perturbation, and compare orbital differences to get result of the impact of selecting different Iers Conventions and different degree of the gravity field and replacing JPL ephemeris with low precision of coordinates of sun and moon in orbit integral.

Keyword: Beidou Satellite; Iers Conventions; ephemeris ; Gravitational field of the earth

目录:

1. 绪论

1.1 北斗卫星

1.1.1 北斗卫星简介

1.1.2 北斗卫星轨道积分力学模型

1.2 IERS 规范与坐标系转换

1.2.1 IERS1996 协议

1.2.2 IERS2003 协议和 IERS2010 协议

1.2.3 位置矢量与速度矢量在不同坐标系中的转换

1.3 JPL 星历与日月低精度分析坐标

1.3.1 JPL 星历

1.3.2 日月低精度分析坐标

1.4 重力场模型与重力场阶数

1.4.1 中心天体的非球形引力摄动

2. 北斗卫星轨道积分差异比较

2.1 不同 IERS 参考系转换规范的北斗卫星轨道差异

2.1.1 IERS2010 与 IERS2003 协议的北斗卫星轨道差异

2.1.2 IERS1996 与 IERS2003 协议的北斗卫星轨道差异

2.1.3 差异分析

2.2 用低精度日月分析解代替日月亮表的北斗卫星轨道差异

2.2.1 日月低精度分析坐标的北斗卫星轨道差异

2.2.2 太阳低精度分析坐标的北斗卫星轨道差异

2.2.3 月亮低精度分析坐标的北斗卫星轨道差异

2.2.4 差异分析

2.3 GRACE 模型下不同重力场阶数的北斗卫星轨道差异

2.3.2 不同重力场阶数的北斗卫星轨道差异

2.3.3 差异分析

3. 总结与讨论

3.1 总结

3.2 讨论

4. 致谢

5. 参考文献

1. 绪论

1.1 北斗卫星

1.1.1 北斗卫星简介

北斗卫星导航系统是中国着眼于国家安全和经济社会发展需要,自主建设、独立运行的卫星导航系统,是为全球用户提供全天候、全天时、高精度的定位、导航和授时服务的国家重要空间基础设施。2012年左右,系统将首先具备覆盖亚太地区的定位、导航和授时以及短报文通信服务能力;2020年左右,建成覆盖全球的北斗卫星导航系统。建成后的北斗系统将为北斗用户提供定位、授时、报文、通信等一体式服务;北斗系统与其他卫星导航系统的兼容与互操作性使用户能够同时利用多系统观测数据,极大改善观测冗余度、提高导航定位精度。尽管目前北斗卫星导航系统区域星座还未部署完毕,但已经初步形成了亚太地区的导航定位服务能力。

同时值得注意的是,随着北斗系统建设和服务能力的发展,相关产品已广泛应用于交通运输、海洋渔业、水文监测、气象预报、测绘地理信息、森林防火、通信时统、电力调度、救灾减灾、应急搜救等领域,逐步渗透到人类社会生产和人们生活的方方面面。因此人类对北斗导航卫星所提供的精度要求也越来越高。尤其是对北斗卫星轨道精度的要求,目前已经达到了毫米的量级。因此在如此高的精度要求下,有必要进行一些精细的建模来研究不同模型、不同阶数、不同协议、不同方法对北斗卫星轨道积分的影响。

本文选取了13颗北斗卫星,其基本信息如表一所示:

表一: 所选北斗卫星基本信息(质量为估计值)

PRN	卫星名称	轨道	发射日期	质量(kg)
C01	BEIDO-G1	GEO	2010/01/06	1500.0
C03	BEIDO-G3	GEO	2010/06/02	1500.0
C04	BEIDO-G4	GEO	2010/10/31	1500.0
C05	BEIDO-G5	GEO	2012/02/24	1500.0
C06	BEIDO-IGS01	IGSO	2010/12/31	1500.0
C07	BEIDO-IGS02	IGSO	2010/12/01	1500.0
C08	BEIDO-IGS03	IGSO	2010/04/29	1500.0
C09	BEIDO-IGS04	IGSO	2011/07/26	1500.0
C10	BEIDO-IGS05	IGSO	2011/12/01	1500.0
C11	BEIDO-M3	MEO	2012/04/29	1500.0
C12	BEIDO-M4	MEO	2012/04/29	1500.0
C13	BEIDO-M5	MEO	2014/10/21	1500.0

C14	BEIDO-M6	MEO	2012/09/18	1500.0
-----	----------	-----	------------	--------

其轨道既包括 GEO (geostationary earth orbit, 地球同步轨道, 半长径 $a \approx 35786\text{km}$), C01-C05; 又包括了 MEO (Medium earth orbit, 中地球轨道, 半长径 a 在 2000km 和 35786km 之间), C06-C10; 和 IGSO (Inclined Geosynchronous Satellite Orbit, 倾斜地球同步轨道, 半长径 a 在 36000km 左右), C11-C14。

1.1.1 北斗卫星轨道积分模型

为达到研究目的, 其力学建模应尽可能完善, 这样才能符合北斗卫星轨道实际中的积分情况。同时做对比的时候, 需要建立一个基准作为参考, 才能实现控制变量。北斗卫星轨道积分力学如表 2 所示。

表 2: 北斗卫星轨道积分模型

时间		
积分时间	2014. 3. 11-2014. 4. 9	
积分时长	30 天	
积分步长	5min	
力学模型		
IERS 协议	IERS2003	
重力场模型	GRACE EIGEN_G0001SHM	8 阶
地球固体潮修正	太阳 月亮	
是否考虑海潮修正	考虑	
点质量	太阳 月亮 九大行星	
太阳辐射压力	Bern 模型	
是否考虑相对论效应	考虑	
大气阻力	不考虑	

之后如无特殊说明, 其力学模型都以表 2 的力学模型为基准

1.2 IERS 协议

航天器轨道计算涉及到不同时间系统的转换, 不同坐标系统的转换, 各

种常数以及动力学模型的设置等，随着对地观测技术以及基础研究的发展，各种基准参数都有着新的规范。使用不同规范下的基准参数对轨道计算精度有着一定的影响。上世纪 90 年代年以来，在国际天文学联合会 (IAU) 全体大会上，通过了一系列关于天文参考系、时间尺度和地球自转模型的决议，其目的是为了适应不断提高的航天测控中对轨道计算精度的需求。

地球参考系统是与地球固联共同旋转，且在空间中随地球运动的空间参考系统。建立地球参考系统的目的之一是分离地球的整体运动和局部运动，进而对其进行深入研究。国际地球自转服务 (IERS) 协议的主要任务是定义参考系统并给出实现这一理想定义的模型和方法。目前最常用的三个 IERS 协议是 IERS1996; IERS2003; IERS2010。

1.2.1 IERS1996^[1]

在观测日期 t 上, TRS 到 CRS 的坐标转换可以写成:

$$[CRS]=PN(t)R(t)W(t)[TRS] \quad (1)$$

对于 t 的定义为:

$$t=(TT-2000-2000 \text{ January } 1d \text{ } 12h \text{ TT})/36525 \quad (2)$$

其中 $PN(t)$ 是由天体引起绕 CRS 天极的旋转矩阵, $R(t)$ 是地球绕 CEP 轴的旋转矩阵, $W(t)$ 是极移单独引起的矩阵。

对于 $W(t)$ ^[1]:

$$W(t)=R_1(y_p) * R_2(x_p) \quad (3)$$

其中, y_p 和 x_p 是在 TRS 坐标系下的 CEP 的极移修正量。

对于 $R(t)$:

$$R(t)=R_3(-GST) \quad (4)$$

其中 GST 是格林尼治真恒星时

对于 $PN(t)$, 可以分成 $P(t)$ 和 $N(t)$ 通过 IAU1976 岁差模型和修改后的 IAU1980 章动模型求得, 即 $PN(t)=[P][N]$

其中 $P(t)$ 可以表示为:

$$[P]=R_3(\zeta_A) * R_2(-\theta_A) * R_3(Z_A) \quad (5)$$

$N(t)$ 可以表示为:

$$[N]=R_1(-\varepsilon_A) * R_1(\Delta\Psi_A) * R_1(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon) \quad (6)$$

其相关参数可以通过以下方法求得：

(1) GST^[2]：

$$GST=GMST+\Delta\Psi \cos \varepsilon_A + 0''00264\sin\Omega + 0''000063\sin 2\Omega \quad (5)$$

$$GMST=GMST_{0hUT1} + r(UT1 - UTC) + UTC \quad (6)$$

$$r = 1.002737909350795 + 5.9006 \times 10^{-11} T_u - 5.9 \times 10^{-15} T_u^2 \quad (7)$$

(2) $\zeta_A \theta_A z_A \varepsilon_A$ ^[3]：

$$\begin{aligned} \zeta_A &= 2306''.2181t + 0''30188t^2 + 0''017998t^3, \\ \theta_A &= 2004''.3109t - 0''42665t^2 + 0''041833t^3, \\ z_A &= 2306''.2181t + 1''.09468t^2 - 0''018203t^3 \\ \varepsilon_A &= 84381''.448 - 46''.8150t - 0''0059t^2 + 0''001813t^3 \end{aligned} \quad (8)$$

(3) IERS1996 岁差章动理论^[1]：

对于岁差修正：

$$\begin{aligned} \delta\psi_A &= -0.299''/c \\ \delta\omega_A &= -0.024''/c \end{aligned} \quad (9)$$

对于章动量（经修正后）：

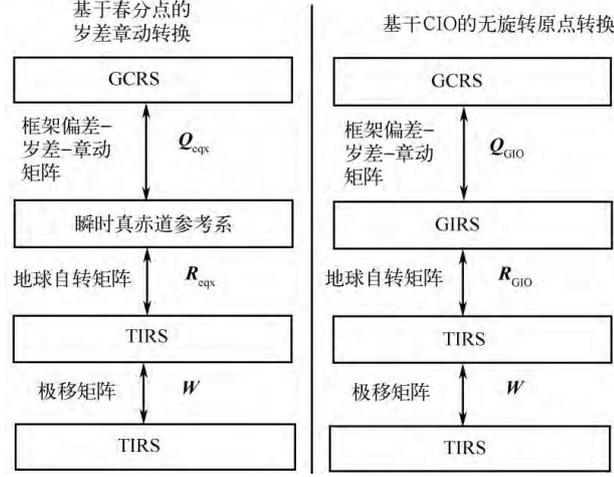
$$\begin{aligned} V\psi &= \sum_{i=1}^{263} (A_i + A_i' t) \sin(\text{ARGUMENT}) + A_i'' \cos(\text{ARGUMENT}) \\ V\varepsilon &= \sum_{i=1}^{263} (B_i + B_i' t) \cos(\text{ARGUMENT}) + B_i'' \sin(\text{ARGUMENT}) \\ \text{ARGUMENT} &= \sum N_i F_i \end{aligned} \quad (10)$$

其中 N_i 是整系数， F_i 分别是月球平近点角，太阳平近点角，月球升交点角距，日月间平精度差，月球轨道升交点平精度。他们的值可以通过 IERS 公报上查到。

1.2.2 IERS2003^[5]和 IERS2010^[6]

随着岁差章动模型的更新，IERS2003 和 IERS2010 先后推荐了两种不同的坐标系转换参数模型。天球坐标系与地球坐标系转换可以由两种不同的方式来实现：第一种方式基于春分点经典转换，这种方法从处理框架偏差开始，然后利用 IAU2000A 模型进行岁差-章动改正，使用 GAST 处理地球自转，最

后进行极移改正。第二种方法是首先利用 CIP 的坐标 X、Y 来直接处理框架偏差、岁差与章动，然后用 s 确定 CIO 的位置，最后处理地球自转角与地极移动。他们的流程如图一所示：^[7]



图一：两种转换类型及其转换过程

(1) 基于春分点的岁差章动变换^[5]：

在 t 时刻，ITRS 到 GCRS 的转换关系为：

$$[ITRS] = W(t)R_{eqx}(t)Q_{eqx}(t)[GCRS] \quad (11)$$

式中：t 表示自 J2000.0 起算的地球时 TT 儒略世纪数， $Q_{eqx}(t)$ 、 $R_{eqx}(t)$ 即 $W(t)$ 分别称为框架偏差-岁差-章动矩阵；地球自转矩阵和极移动矩阵，三者的计算公式分别为：

$$\begin{cases} Q_{eqx}(t) = NPB \\ R_{eqx}(t) = R_3(\Phi_{GST}) \\ W(t) = R_1(-y_p)R_2(-x_p)R_s(s') \end{cases} \quad (12)$$

在 $Q_{eqx}(t)$ 中，其中 N 为章动矩阵，P 为岁差矩阵，B 为章动矩阵，计算公式为：

$$\begin{cases} B = R_1(-\eta_0)R_2(\xi_0)R_3(d\alpha_0) \\ P = R_3(\chi_A)R_1(-\omega_A)R_3(-\psi_A)R_1(\varepsilon_A) \\ N = R_1[-(\varepsilon_A + V\varepsilon)]R_3(-V\psi)R_1(\varepsilon_A) \end{cases} \quad (13)$$

其参数在 IAU2000 (IERS2003) 模型中的表示为：

岁差参数：

$$\begin{aligned}
\zeta_A &= 2.5976176'' + 2306.0809506''t + 0.3019015''t^2 + 0.0179663''t^3 \\
&\quad - 0.0000327''t^4 - 0.0000002''t^5, \\
\theta_A &= 2004.1917476''t - 0.4269353''t^2 - 0.0418251''t^3 \\
&\quad - 0.0000601''t^4 - 0.0000001''t^5, \\
z_A &= -2.5976176'' + 2306.0803226''t + 1.0947790''t^2 + 0.0182273''t^3 \\
&\quad + 0.0000470''t^4 - 0.0000003''t^5.
\end{aligned}$$

章动参数表示式:

$$\begin{aligned}
\Delta\psi &= \sum_{i=1}^N (A_i + A'_i t) \sin(\text{ARGUMENT}) + (A''_i + A'''_i t) \cos(\text{ARGUMENT}), \\
\Delta\epsilon &= \sum_{i=1}^N (B_i + B'_i t) \cos(\text{ARGUMENT}) + (B''_i + B'''_i t) \sin(\text{ARGUMENT}).
\end{aligned}$$

各项的意义与 IERS1996 协议基本相同, 但是数值有所区别, 同样也可以在 IERS 公报中查得。

在 $R_{eqx}(t)$ 中, GST 可以根据 GMST, 赤经章动 EE 及其补充相 EECT 得到^[7]:

$$\phi_{GST} = \phi_{GMST} + \phi_{EE} + \phi_{EECT} \quad (14)$$

也可以根据和地球自转角 (ERA) 的关系求得:

$$\text{GST} = \text{ERA}(UT_1) - \text{EO} \quad (15)$$

其中 ERA 可以通过以下方式求得:

$$\text{ERA}(UT_1) = 2\pi (0.7790572732640 + 1.00273781191135448T_u) \quad (16)$$

$$T_u = (jd(ut1) - 2451545.0) \quad (17)$$

EO 为:

$$\begin{aligned}
\text{EO} &= -0.014506'' - 4612.156534''t - 1.3915817''t^2 \\
&\quad + 0.00000044''t^3 - \Delta\psi \cos \epsilon_A - \sum_k C'_k \sin \alpha_k \quad (18)
\end{aligned}$$

在 $W(t)$ 中 x_p 和 y_p 是 CIP 在 ITRS 中的两个极移分量 s 为 TIO 定位角, 表示 TIO 在 CIP 赤道上的位置, 其分表表示为

$$\begin{aligned} (x_p, y_p) &= (x_p, y_p)_{IERS} + (x_p, y_p)_{oceantide} + (x_p, y_p)_{nutaition} \\ s' &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (x_p \dot{x}_p - \dot{x}_p y_p) dt \end{aligned} \quad (19)$$

(2) 基于 CIO 的无旋转原点转换^[5]:

在 t 时刻, 基于 CIO 的无旋转原点转换的数学模型为

$$[ITRS]=W(t)R_{CIO}(t)Q_{CIO}(t)[GCRS] \quad (20)$$

其中 Q_{CIO} 和 R_{CIO} 的计算模型分别为:

$$Q_{CIO} = R_3(-s) \begin{pmatrix} 1-aX^2 & -aXY & -X \\ -aXY & 1-aY^2 & -Y \\ X & Y & 1-a(X^2+Y^2) \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$R_{CIO}(t) = R_3(\Phi_{ERA}) \quad (22)$$

其中 $a = [1 + \sqrt{1 - (X^2 + Y^2)}]^{-1}$; s 为 CIO 定位角表示 CIO 在 CIP 赤道上的位置; ERA 见 (16 式)

W (t) 的转换公式同式 (12), 式 (19) 相同。

IAU2000 模型基于 IERS2003 协议, 而在 IERS2003 中部分数据发生微小变化, 但公式结构和流程没有发生变化, 其差异在雷伟伟和张捍卫的岁差章动模型更新等因素对坐标转换的影响一文中给出^[8]。从该文献中可以得到, IERS2010 与 IERS2003 的差异相较于 IERS2003 和 IERS1996 的差异小很多。

[8]

1.2.3 位置矢量与速度矢量在不同坐标系中的转换

对于在参考系 A 中的位置矢量 X 参考系 B 中的位置矢量 X_0 , 如果可以通过旋转矩阵 P (t) 使得:

$$X = P(t)X_0 \quad (23)$$

那么其从坐标系 A 到坐标系 B 下的速度矢量转换关系可以表示成:

$$\dot{X} = P(t)\dot{X}_0 + \dot{P}(t)X_0 \quad (24)$$

由选择矩阵的性质可以知道：

$$PP^T = 1 \quad (25)$$

对 (25) 对时间 t 求导可得到：

$$\dot{P}P^T + P\dot{P}^T = 0 \quad (26)$$

经整理，得到：

$$\dot{P}^T = -P^T \dot{P} P^T \quad (27)$$

所以由 (23) 式和 (25) 式可以得到可以知道，从参考系 B 到参考系 A 下的位置矢量转换关系为：

$$X_0 = P^T(t)X \quad (28)$$

对 (28) 式求导，并把 (27) 式带入就可以得到从参考系 B 到参考系 A 下的速度矢量坐标转换关系：

$$\dot{X}_0 = P^T(t)\dot{X} - P^T \dot{P} P^T X \quad (29)$$

通过 IERS 协议，我们很容易就能得到旋转矩阵 P(t) 和 P^T(t)。同样，由于岁差量和章动量变化在短时间内变化非常小，所以在求速度时，我们认为岁差量和章动量是常数。这时候只需要要将其他旋转矩阵中的 cos 项变成 -sin 项，sin 项变成 cos 项（其中 t 为已经量）就可以得到各旋转矩阵的求导后的矩阵 $\dot{P}(t)$ 。因此，我们通过上述方法知道 P(t)、P^T(t) 和 $\dot{P}(t)$ ，就能通过 (23) 式、(27) 式、(28) 式、和 (29) 式就在两种坐标下进行任意转换。

1.3 JPL 星历与日月低精度分析解坐标

在航天器轨道积分中，日月的坐标十分重要，不仅在对卫星如第三体，辐射压等主要摄动中直接影响航天器的轨道精度，同时在实际工作中，地固坐

标系下黄经，黄纬的确定都是通过该时刻太阳的位置来确定的。虽然 JPL 历表能够精确的给出日月的位置，但是有些时候出于一些估算和外推的需要，我们需要用简单的日月分析解坐标代替数值历表来进行估算。因此在这种环境下，研究日月分析解坐标代替日月数值历表对航天器坐标的影响就有一定的价值。

1.3.1 JPL 星历

随着空间技术的发展，对行星的要求越来越高，国际上出现许多计算行星位置的方法，其中使用最广，精度最高的方法就是 JPL 星历。

JPL 星历是由美国喷气推进实验室研制，目前是为太空导航，行星探测以及精密天文观测的分析和归算提供精密数据，目前 JPL 的主要星历有 DE200、DE403、DE405、DE407、DE410。如 DE405，他覆盖了从 1600 年到 2170 年大约 600 年时间段。

所有星历都基于各自运动方程进行严格数值积分。除了月球、行星、和太阳的点质量相互作用外，部分小行星的摄动和运动方程的相对论后牛顿修正也要考虑。另外，日月扭矩对地球形状的影响，以及地球和太阳扭矩对月球形状的影响都精细了考虑。DE405 采用的观测数据库主要包含 1911 年以来的光学经纬仪数据，194 年以来水星和金星的雷达测距数据，191 年以来深空探测器，行星轨道器和着陆器的跟踪数据以及 1970 年以来的月球激光测距数据。

JPL 的星历文件以切比雪夫多项式系数的形式存储，我们可以通过这些系数，即可求得行星在太阳系下的位置坐标。JPL 对各行星精细编号，根据编号可以得到该行星的位置。以太阳 x 轴的分量为例，给定某个时刻 t ，太阳的位置可以表示成^[9]：

$$r_x(t) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(t) \quad (30)$$

其中 T_k 表示为切比雪夫多项式； a_k 为星历文件系数， t 为标准化时刻， $-1 < t < 1$ 其表示为：

$$t = \frac{(T - T_0)^2}{VT} - 1 \quad (31)$$

T 为当前的儒略日， T_0 为系数节点开始的儒略日； ΔT 为系数记录的时间跨度。

对于切夫雪比多项式，满足以下关系：

$$\begin{cases} T_0(t) = 1 \\ T_1(t) = 1 \\ T_2(t) = 2t^2 - 1 \\ T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t) \end{cases} \quad (32)$$

1.3.2 低精度日月坐标

由于日月引力远小于地球的中心引力，所以在计算卫星摄动加速度的时候无需知道日月的精确坐标，多数情况下使用日月坐标的简化公式足以使精度打到 0.1% 到 1%，这些公式一般由更先进的日月运动分析理论导出。^[10-13]

(1) 太阳坐标计算

假设地球围绕太阳做无摄运动，可以很轻易获得太阳的地心坐标。下面的平根数能够近似描述太阳相对地球和黄道 2000 年附近几十年的椭圆轨道：

$$\begin{cases} a = 149600000km \\ e = 0.016709 \\ i = 0.^{\circ}0000 \\ \Omega + \omega = 282.^{\circ}9400 \\ M = 359.^{\circ}5256 + 35999.^{\circ}049T \end{cases} \quad (33)$$

其中

$$T = (JD - 2451545.0) / 36525.0 \quad (34)$$

为自 2000 年 1 月 1.5 日历元开始的儒略世纪数，JD 为儒略日。位置坐标可以利用这些根数给出。由于小偏心率和小倾角，因此对于位置向量，采用简单的级数展开来提高计算速度不损失精度。太阳的黄经 λ_e 和距离 r_e 如下：

$$\begin{cases} \lambda_e = \Omega + \omega + M + 6892'' \sin M + 72'' \sin 2M \\ r_e = (149.619 - 2.499 \cos M - 0.021 \cos 2M) \times 10^6 km \end{cases} \quad (35)$$

黄纬在 1' 精度下为零^[12]，通过合适的旋转，这些值可以转换成赤道坐标

系的笛卡尔坐标，即：

$$\vec{r}_{\odot} = R_x(-\varepsilon) \begin{pmatrix} r_{\odot} \cos \lambda_{\odot} \cos \beta_{\odot} \\ r_{\odot} \sin \lambda_{\odot} \cos \beta_{\odot} \\ r_{\odot} \sin \beta_{\odot} \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$\varepsilon = 23^{\circ}.4329111 \quad (37)$$

为精确起见，式(29)中 λ_{\odot} 和 r_{\odot} 对应于J2000平黄道及平春分点(EME2000)。由太阳、月球和其他行星摄动力导致的岁差，引起黄道和春分点的缓慢运动。黄道面的指向每世纪变化小于 $1'$ ，而春分点的运动更加明显，每实际运动大约 $5030''$ 。例如，参照1950平春分点太阳黄经大约比上述值少 $2515''$ 。如果参考的是某历元T(2000年起量的世纪数)春分点对应的坐标系，则需在上面给出的黄经值上加上修正： $1^{\circ} 3902T$

由于黄纬整整一个世纪内的变化量少于一个角分，因此黄纬无需修正。

(2) 月球坐标计算

月球坐标的级数展开类似于太阳。然而，由于太阳的地球摄动较强，需要大量的项将月球运动描述成月球和太阳轨道的平均幅角形式。一下关系式使得月球黄经和黄纬的典型计算精度为几角分，月球距离的计算精度为500km摄动计算基于5个基础角度，即月球平黄经 L_0 、月球平近点角 l 、太阳平近点角 l' 、月球平升交点精度 F 、太阳平黄经和月球平黄经之间的差 D 。升交点 Ω 的精度没有显式使用，它可由 $\Omega = L_0 - F$ 获得。

$$\begin{cases} L_0 = 218^{\circ}.31617 + 481267^{\circ}.88088 \cdot T - 1^{\circ}.3972 \cdot T \\ l = 134^{\circ}.96292 + 477198^{\circ}.86753 \cdot T \\ l' = 357^{\circ}.52543 + 35999^{\circ}.04944 \cdot T \\ F = 93^{\circ}.27283 + 483202^{\circ}.01873 \cdot T \\ D = 297^{\circ}.85027 + 445267^{\circ}.11135 \cdot T \end{cases} \quad (38)$$

利用这些值，可给出相对于2000年黄道和春分点的月球黄经：

$$\begin{aligned}
\lambda_M = & L_0 + 22640'' \cdot \sin(l) + 729'' \sin(2l) \\
& -4589'' \cdot \sin(l - 2D) + 2370'' \cdot \sin(2D) \\
& -668'' \cdot \sin(l') - 412'' \cdot \sin(2F) \\
& -212'' \cdot \sin(2l - 2D) - 206'' \cdot \sin(l + l' - 2D) \quad (39) \\
& +192'' \cdot \sin(l + 2D) - 165'' \cdot \sin(l' - 2D) \\
& +148'' \cdot \sin(l - l') - 125'' \cdot \sin(D) \\
& -110'' \cdot \sin(l + l') - 55'' \cdot \sin(2F - 2D)
\end{aligned}$$

这里，前两项是描述偏心率 $e=0.055$ 的椭圆运动，剩余项指各种摄动。月球纬度由下式（33）表示：

$$\begin{aligned}
\beta_M = & 18520'' \cdot \sin(F + \lambda - L_0 + 412'' \cdot \sin 2F + 541'' \cdot \sin l') \\
& -526'' \cdot \sin(F - 2D) + 44'' \cdot \sin(l + F - 2D) \\
& -31'' \cdot \sin(l' + F - 2D) - 25'' \cdot \sin(-2l + F) \quad (40) \\
& +23'' \cdot \sin(l' + F - 2D) + 21'' \cdot \sin(-l + F) \\
& +11'' \cdot \sin(-l' + F - 2D)
\end{aligned}$$

其中，主项是由于月球轨道相对于黄道的倾角所导致的，该倾角大约为 5.1° 。最后月球的地心距离：

$$\begin{aligned}
r_M = & (35800 - 20905 \cos(l) - 3699 \cos(2D - l) \\
& -2956 \cos(2D) - 570 \cos(2l) + 246 \cos(2l - 2D) \\
& -205 \cos(l' - 2D) - 171 \cos(l + 2D) \\
& -152 \cos(l + l' - 2D)) \quad (41)
\end{aligned}$$

这里略去了小于 150km 的项。

利用下面的转换，黄道球坐标可转化为赤道笛卡尔直角坐标：

$$\mathbf{r}_m = R_x(-\varepsilon) \begin{pmatrix} r_M \cos \lambda_M \cos \beta_M \\ r_M \sin \lambda_M \cos \beta_M \\ r_M \sin \beta_M \end{pmatrix} \quad (42)$$

从 EME2000 参考系到 T 历元赤道和春分点的转换，如同前面对太阳的计算。

1.4 地球重力场

地球重力场是反映地球物质分布特性的物理场，作为最基本的地学信息，

地球重力场在地球物理学、大地测量学、空间科学、海洋科学等领域起着举足轻重的作用。人们对重力的测定已经延续了约一个世纪之久,但直到二十世纪五十年代,高精度的跟踪卫星出现之后,重力场模型才逐渐变得精确和更加有意义,新的空间测地任务使人们对地球质量分布、地球结构和地球运动等有了相对更加清晰的认识。很久以来人们一直认为地球重力场在时间上几乎是静止的,只随地质年代的变迁而发生变化,从几千年到上百万年间产生了很小的变化。事实上是,地球重力场不仅在空间上存在变化,而且在时间上也存在变化。例如海潮和固体潮,就影响这地球重力场的变化。

对于导航卫星而言,来自地球的引力的摄动是最主要的也是决定性的。其非球形摄动也是对卫星轨道影响最大的摄动。因此对于卫星轨道积分而言,需要一个精度较高的重力场模型和阶数,但是如 GRACE 卫星重力场而言,其提供的精度已经超过了 150 阶。因此目前的重力场模型所提供的精度已经远远达到了导航卫星轨道的精度需要,那么选择一个合适的重力场阶数进行积分,既满足精度需求,又不会使精度溢出,进而减少计算机的运行时间就有一定的意义。

1.4.1 中心天体的非球形引力摄动^[10]

地球的引力势在地固坐标系下可以通过下式表示:

$$U = \frac{GM_{\oplus}}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R_{\oplus}^n}{r^n} P_{nm}(\sin \phi') (C_{nm} \cos(m \lambda) + S_{nm} \sin(m \lambda)) \right) \quad (43)$$

系数为:

$$\begin{aligned} C_{nm} &= \frac{2 - \delta_{0m}}{M_{\oplus}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int \frac{s^n}{R_{\oplus}^n} P_{nm}(\sin \phi') \cos(m \lambda') \rho(s) d^3 s \\ S_{nm} &= \frac{2 - \delta_{0m}}{M_{\oplus}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int \frac{s^n}{R_{\oplus}^n} P_{nm}(\sin \phi') \sin(m \lambda') \rho(s) d^3 s \end{aligned} \quad (44)$$

他们描述了地球内部质量分布关系, $m=0$ 的重力势系数称为带谐项系数因为他们描述了不依赖于精度值的位势部分。当 $m=n$ 时为扇谐项系数, $m < n$ 时为田谐项系数。由于即便对一个很小的模型,其系数也会很大,所以需要进行归一化处理。

$$\begin{cases} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{cases} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2-\delta_{0m})(2n+1)(n-m)!}} \begin{cases} C_{nm} \\ S_{nm} \end{cases} \quad (45)$$

归一化系数在数量级上比未归一化的更为一致, 利用归一化重力势加速度, 地球引力场导致的加速度可以表示成:^[14]

$$\mathbf{g} = \nabla \frac{GM_{\oplus}}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R_{\oplus}^n}{r^n} \bar{P}_{nm}(\sin \phi) (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)) \right) \quad (46)$$

这里归一化缔合勒让德函数为:

$$\bar{P}_{nm} = \sqrt{\frac{(2-\delta_{0m})(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}} P_{nm} \quad (47)$$

在这里如下定义两个式子^[14]:

$$\begin{aligned} V_{nm} &= \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^{n+1} \cdot P_{nm}(\sin \phi) \cdot \cos(m\lambda) \\ W_{nm} &= \left(\frac{R_{\oplus}}{r}\right)^{n+1} \cdot P_{nm}(\sin \phi) \cdot \sin(m\lambda) \end{aligned} \quad (48)$$

地球重力式可以写成 (此时已经进行归一化处理):

$$U = \frac{GM_{\oplus}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} V_{nm} + S_{nm} W_{nm}) \quad (49)$$

由勒让德多项式和三角函数关系可以得出 V_{nm} 和 W_{nm} 满足递推关系^[14]:

$$\begin{cases} V_{nm} = (2m-1) \left(\frac{xR_{\oplus}}{r^2} V_{(m-1)(n-1)} - \frac{yR_{\oplus}}{r^2} W_{(m-1)(n-1)} \right) \\ W_{nm} = (2m-1) \left(\frac{xR_{\oplus}}{r^2} W_{(m-1)(n-1)} - \frac{yR_{\oplus}}{r^2} V_{(m-1)(n-1)} \right) \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} W_{nm} = \left(\frac{2n-1}{n-m}\right) \cdot \frac{zR_{\oplus}}{r^2} V_{(n-1)(m-1)} - \left(\frac{n+m-1}{n-m}\right) \cdot \frac{R_{\oplus}^2}{r^2} V_{(n-2)(m)} \\ W_{nm} = \left(\frac{2n-1}{n-m}\right) \cdot \frac{zR_{\oplus}}{r^2} W_{(n-1)(m-1)} - \left(\frac{n+m-1}{n-m}\right) \cdot \frac{R_{\oplus}^2}{r^2} W_{(n-2)(m)} \end{cases} \quad (51)$$

其中, 由定义可以推得:

$$\begin{cases} V_{00} = \frac{R_{\oplus}}{r} \\ W_{00} = 0 \end{cases} \quad (52)$$

由于加速度等于势能的梯度，所以在通过查重力场对应阶数的 C_{nm} 和 S_{nm} 后，可由（41）式的梯度得出，其形式与（39）式相同，这里给出其分量形式：

$$\begin{cases} \ddot{x} = \sum_{n,m} \ddot{x}_{nm} \\ \ddot{y} = \sum_{n,m} \ddot{y}_{nm} \\ \ddot{z} = \sum_{n,m} \ddot{z}_{nm} \end{cases} \quad (53)$$

其各项表达式为^[14]：

$$\begin{cases} \ddot{x}_{nm}^{(m=0)} = \frac{GM}{R_{\oplus}^2} \cdot \{-C_{n0} V_{(n+1)(1)}\} \\ \ddot{x}_{nm}^{(m>0)} = \frac{GM}{R_{\oplus}^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \{-C_{nm} V_{(n+1)(m+1)} - S_{nm} W_{(n+1)(m+1)} \\ + \frac{(n-m+2)!}{(n-m)!} \cdot (C_{nm} V_{(n+1)(m+1)} + S_{nm} W_{(n+1)(m-1)})\} \end{cases} \quad (54)$$

$$\begin{cases} \ddot{y}_{nm}^{(m=0)} = \frac{GM}{R_{\oplus}^2} \cdot \{-C_{n0} W_{(n+1)(1)}\} \\ \ddot{y}_{nm}^{(m>0)} = \frac{GM}{R_{\oplus}^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \{-C_{nm} W_{(n+1)(m+1)} + S_{nm} V_{(n+1)(m+1)} \\ + \frac{(n-m+2)!}{(n-m)!} \cdot (-C_{nm} W_{(n+1)(m+1)} + S_{nm} V_{(n+1)(m-1)})\} \end{cases} \quad (55)$$

$$\ddot{z}_{nm} = \frac{GM}{R_{\oplus}^2} \cdot \{(n-m+1) \cdot (-C_{nm} V_{(n+1)(m)} - S_{nm} W_{(n+1)(m)})\} \quad (56)$$

以上公式是由 Cuningham(1970)^[14]推导给出，同时还推导了关于势能二阶偏导数的类似关系式。值得注意的是如果要计算至 C_{nm} 和 S_{nm} 的地球重力势系数产生的加速度分量， V_{vu} 和 S_{vu} 项需要计算到（n+1）阶次。

通过上述公式，推导出了在地固坐标系下非球形摄动的引力加速度。通过坐标系的转换，可以得到在天球坐标系下的加速度即：

$$\overset{\mathbf{i}}{r}_{ef} = U(\mathbf{t}) \cdot \overset{\mathbf{i}}{r}_{sf} \quad (57)$$

其中 $U(\mathbf{t})$ 为描述地球自转的相关矩阵，跟岁差，章动相关。

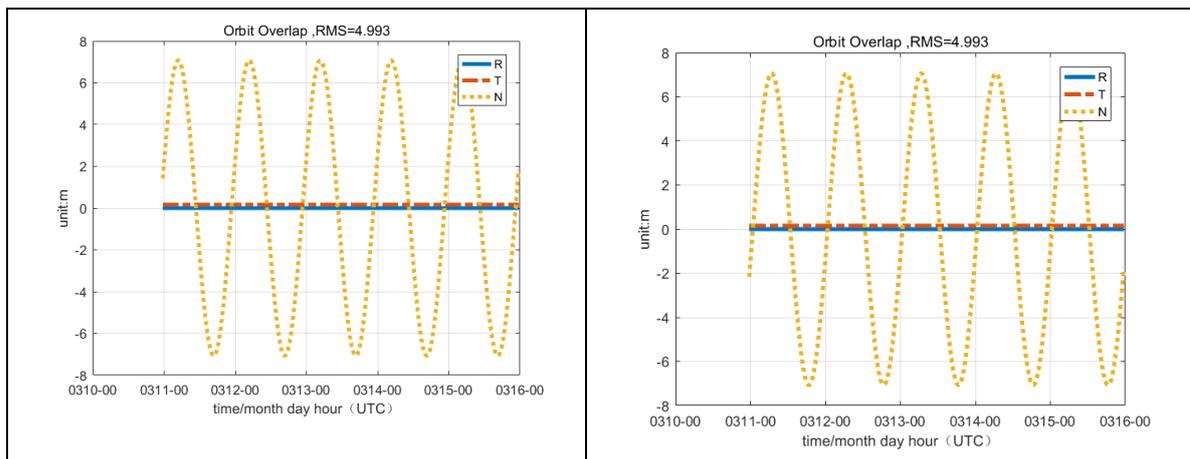
2. 北斗卫星轨道积分差异比较

2.1 不同 IERS 参考系转换规范对北斗卫星轨道积分的影响

2.1.1 IERS2003 与 IERS1996 协议的北斗卫星轨道差异

表 3: IERS Conventions1996 与 IERS Conventions2003 在轨道计算中的差异统计 (5 天)

卫星型号	R(m)	T(m)	N(m)	3D(m)
C01	0.0005	0.1663	4.9902	4.993
C03	0.0005	0.1539	4.9907	4.993
C04	0.0014	0.087	4.9945	4.9953
C05	0.0006	0.0724	5.0021	5.0027
C06	0.0005	5.7439	2.908	6.438
C07	0.0005	3.2401	4.4385	5.4953
C08	0.0006	2.4902	4.6698	5.2923
C09	0.0006	5.7419	2.9095	6.437
C10	0.0005	3.1969	4.4582	5.486
C11	0.0005	1.0751	3.1938	3.3699
C12	0.0005	1.106	3.2161	3.401
C13	0.0005	3.7291	1.9948	4.2291
C14	0.0005	3.7391	1.971	4.2268
MEAN	0.0006	2.3494	3.8259	4.9507



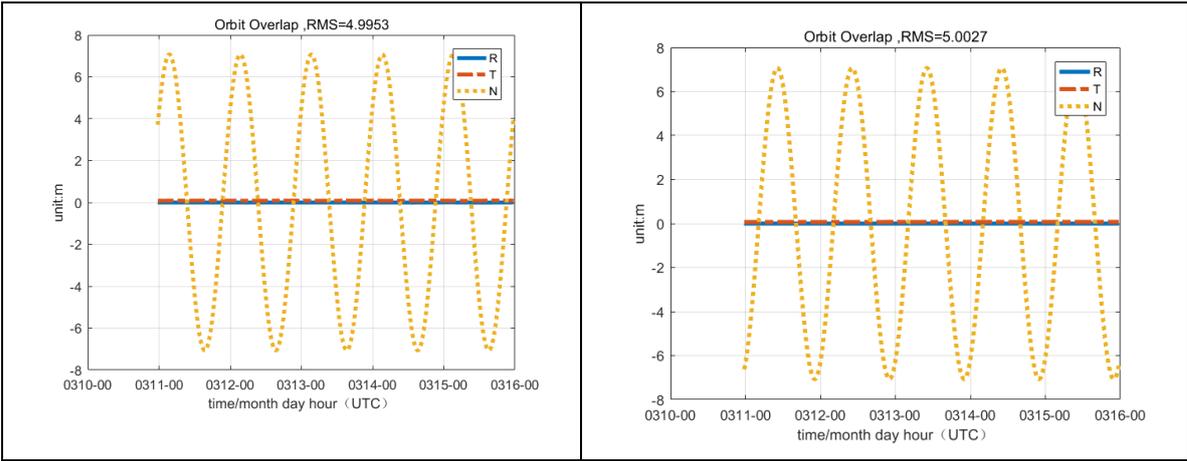
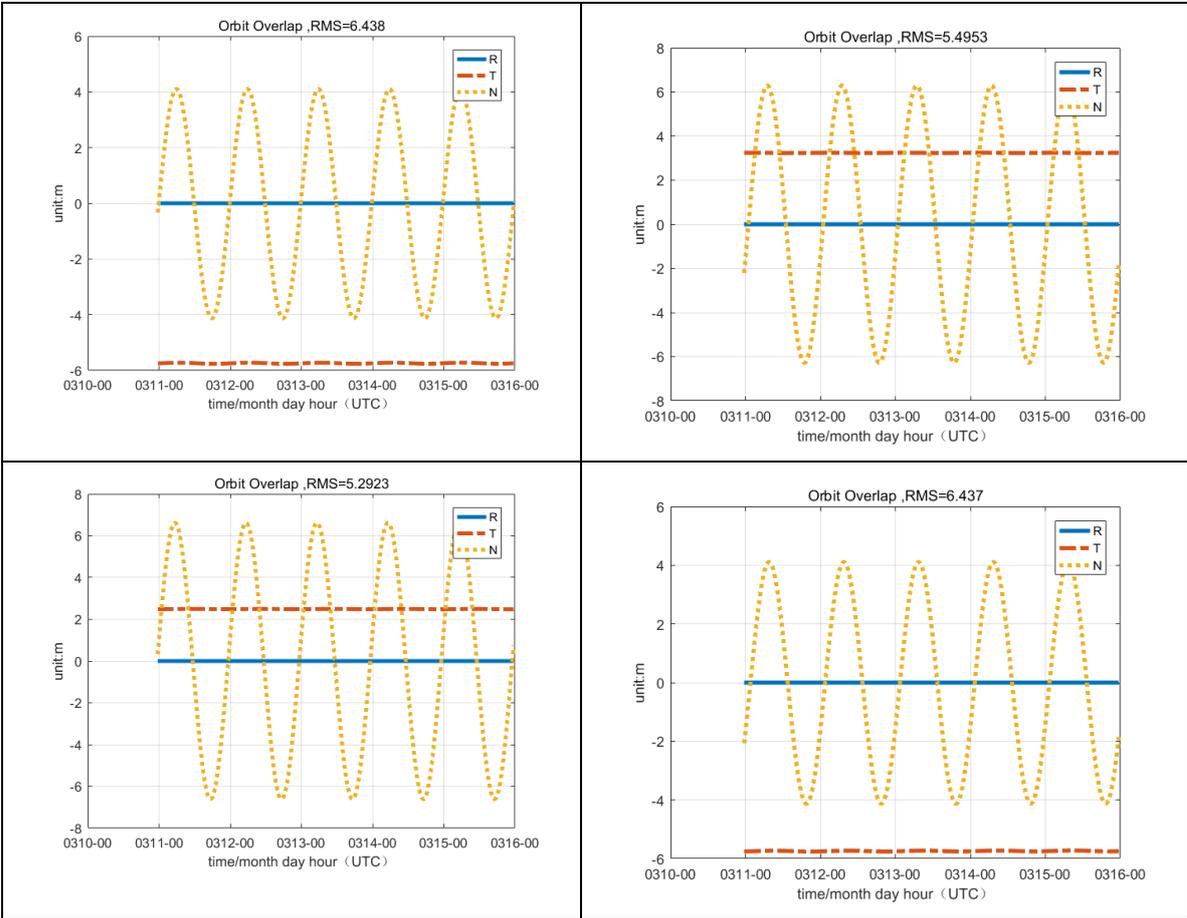


图 2.1.1.1 IERS Conventions1996 与 IERS Conventions2003 在 GEO 北斗导航卫星轨道计算的差异 (5 天)



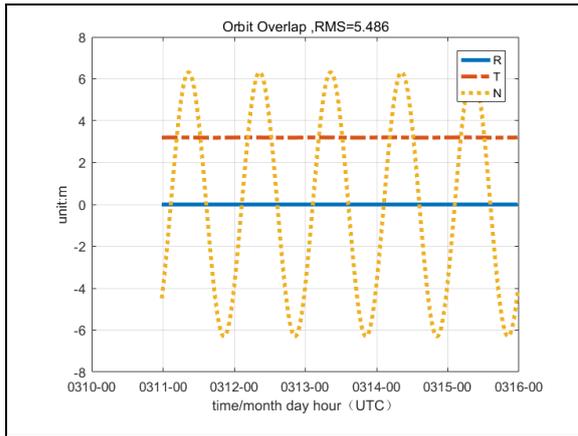


图 2.1.1.2 IERS Conventions1996 与 IERS Conventions2003 在 IGSO 北斗导航卫星轨道计算的差异 (5 天)

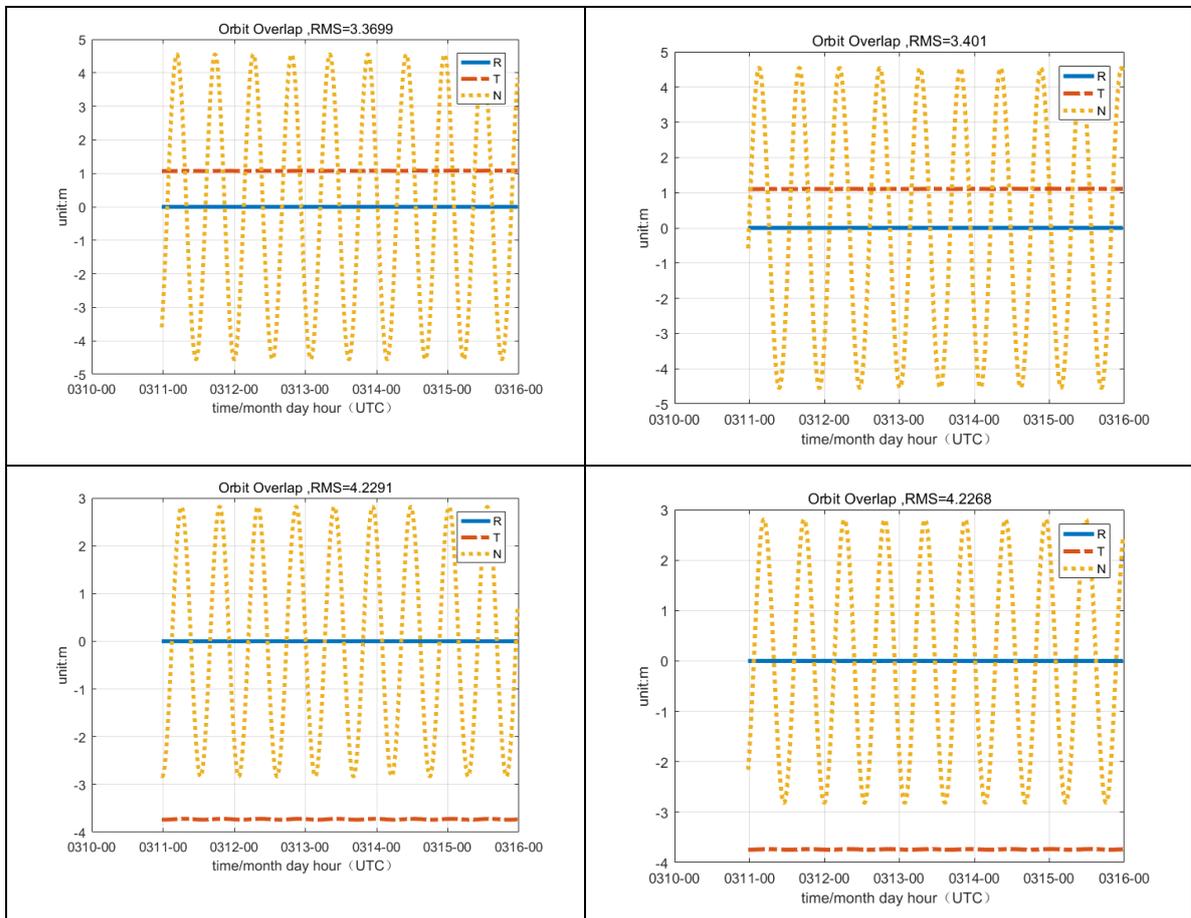


图 2.1.1.3 IERS Conventions1996 与 IERS Conventions2003 在 MEO 北斗导航卫星轨道计算的差异 (5 天)

2.1.2 IERS2010 与 IERS2003 协议的北斗卫星轨道差异

表 4: IERS Conventions2003 与 IERS Conventions2010 在轨道计算中的差异统计
(5 天)

卫星型号	R(m)	T(m)	N(m)	3D(m)
C01	0.0005	0.0004	0.0111	0.0111
C03	0.0005	0.0004	0.0111	0.0111
C04	0.0003	0.0004	0.0111	0.0111
C05	0.0004	0.0003	0.0111	0.0111
C06	0.0005	0.0097	0.0088	0.0131
C07	0.0005	0.0025	0.0109	0.0112
C08	0.0005	0.0123	0.0069	0.0141
C09	0.0005	0.0100	0.0086	0.0132
C10	0.0005	0.0027	0.0109	0.0113
C11	0.0005	0.0075	0.0050	0.0091
C12	0.0005	0.0076	0.0050	0.0091
C13	0.0005	0.0071	0.0053	0.0089
C14	0.0005	0.0071	0.0053	0.0089
MEAN	0.0005	0.0052	0.0086	0.0110

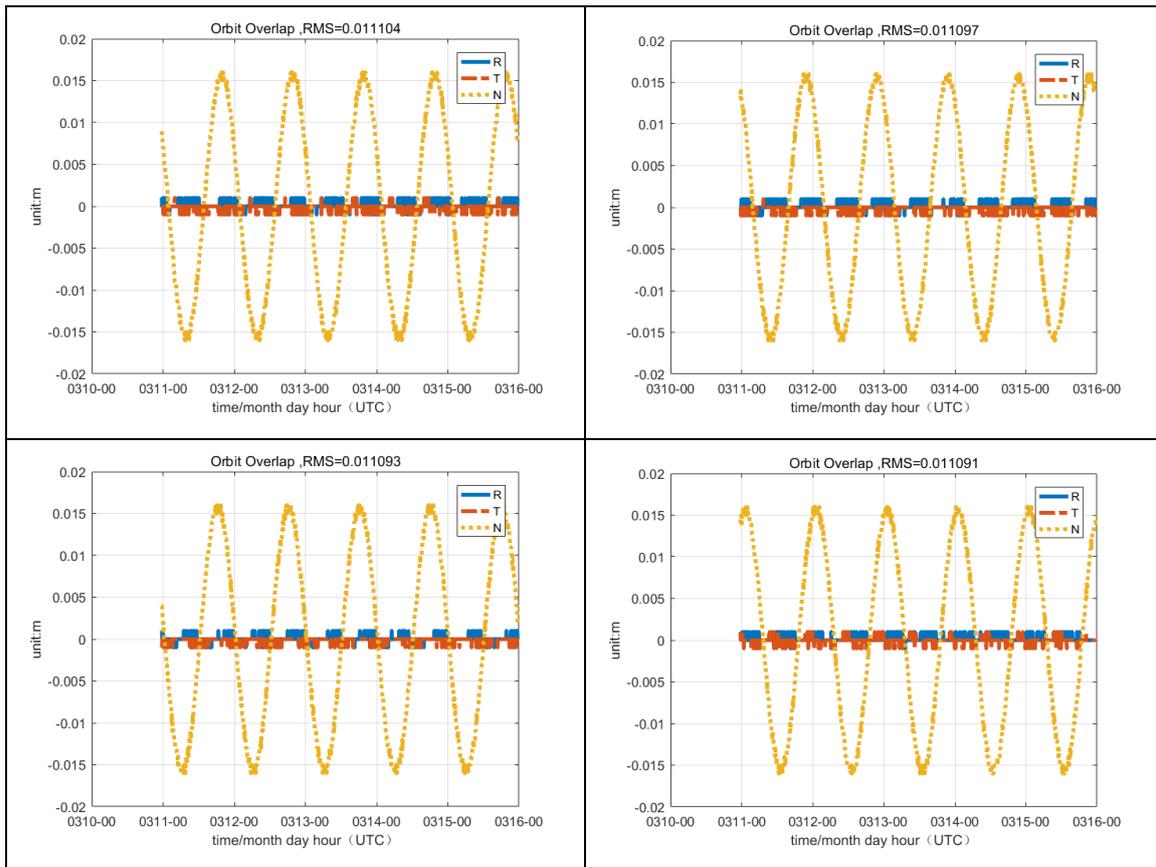


图 2.1.2.1 IERS Conventions2010 与 IERS Conventions2003 在 GEO 北斗导航卫星轨道计算的差异 (5 天)

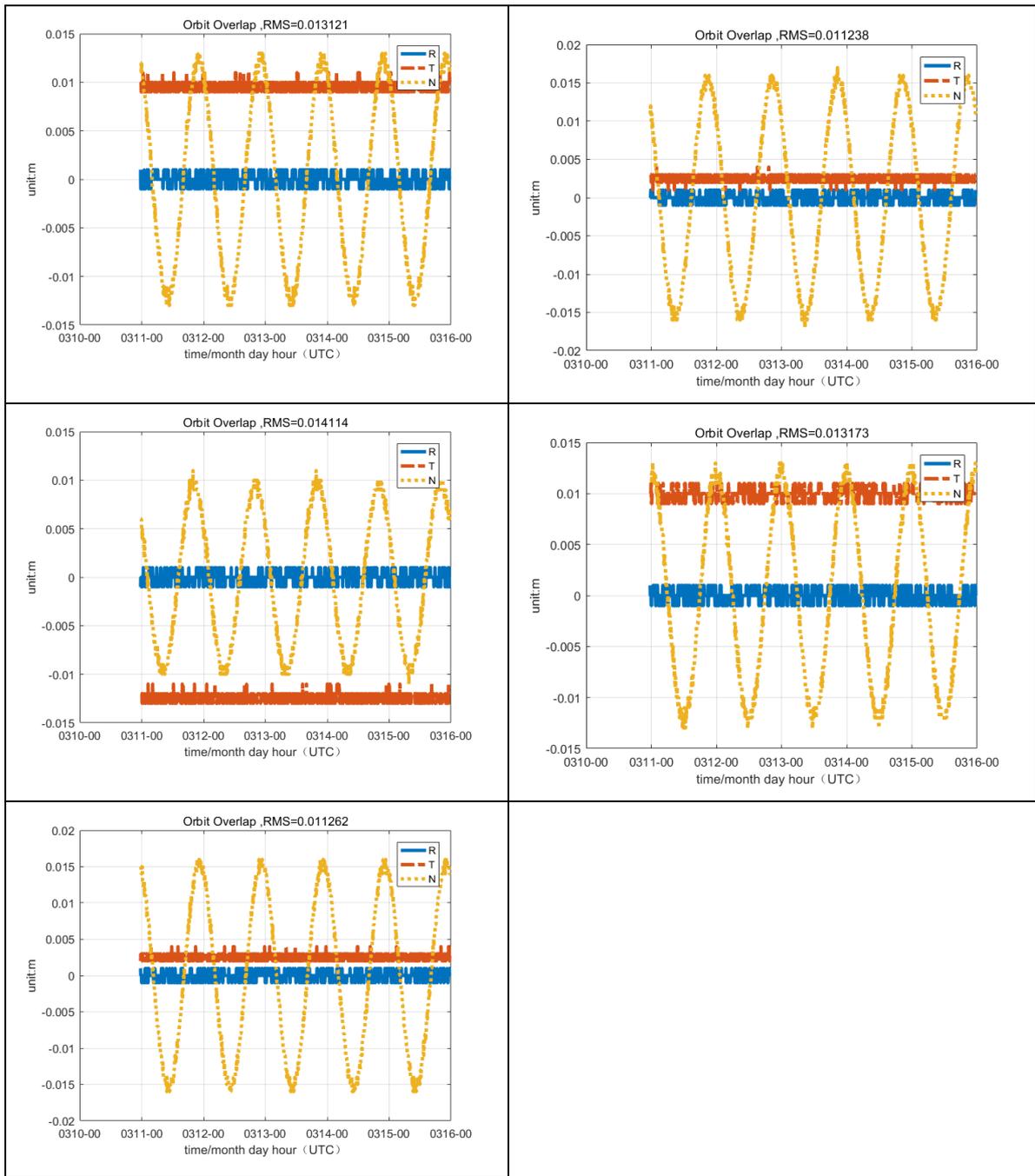


图 2.1.2.2 IERS Conventions2010 与 IERS Conventions2003 在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (5 天)

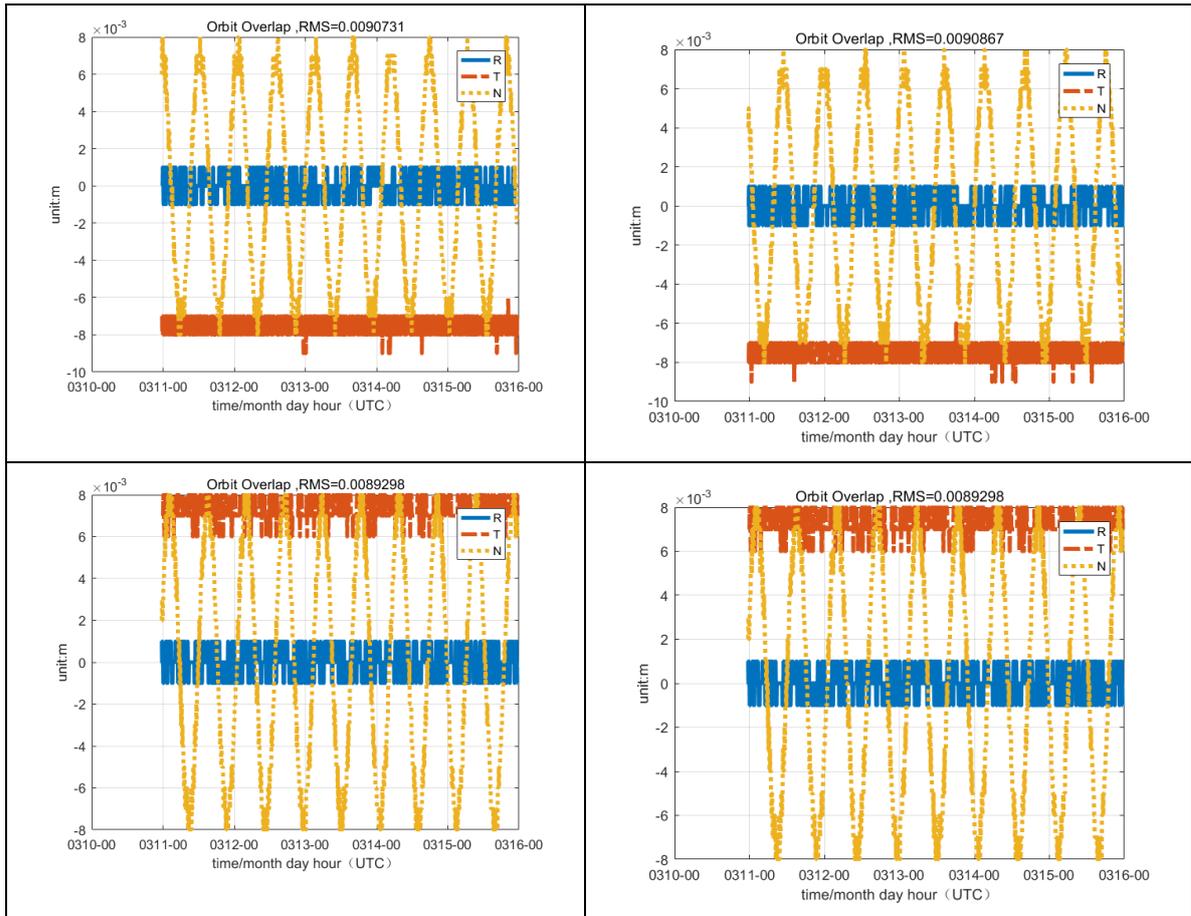


图 2.1.2.3 IERS Conventions1996 与 IERS Conventions2003 在 MEO 北斗导航卫星轨道计算的差异 (5 天)

2.1.3 差异分析

通过对比分析 2.1 中的轨道差异图，我们不难看出：

在 R 方向上，轨道 RMS 小于 1mm，即小于积分器的精度，所以可以看出，在 1mm 精度上，R 方向是没有差异的。

在 T 方向上，由图可以看出，每个卫星都存在一个固定的差值，记为 T_c ，且每个卫星的 T_c 不一样，所以可以认为这个差值只由轨道的性质和对比的协议决定而与时间 t 无关，即对于同一个卫星而言，其值为常数。

在 N 方向上，其差异周期性的上下波动，可以看出是一个以 0 为中心的三角函数，同 T_c 一样，该三角函数的参数可以看成与时间无关的常数 A_{NC} 和 w_{NC} 。

故其差异可以由下式表示：

$$\begin{cases} \Delta R = 0 \\ \Delta T = T_c \\ \Delta N = A_{NC} \sin(w_{NC}t + \varphi) \end{cases} \quad (58)$$

为了满足这一猜想，对上诉协议进行了 30 天的积分，发现依旧符合这一结论。

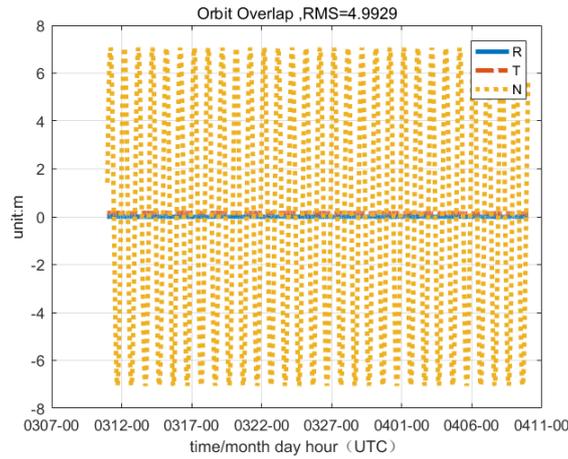


图 3.1 C01 正 IERS1996 和 IERS2003 协议之间的差异比较

其他卫星在不同协议之间的差异都与跟该图一样，都满足 (58) 式的模型。说明不同 IERS 协议之间的轨道差异可以通过上式来确定。

对于 T 方向的 T_c 而言，联系表 1 中卫星的轨道，通过表 3 和表 4 不难看出，对于 GEO, IGS0, MEO 三种轨道， T_c 满足

$$T_c(\text{GEO}) < T_c(\text{MEO}) < T_c(\text{IGSO})$$

在由 IERS2003 和 IERS1996 规范不同导致的北斗卫星轨道差异之间，对于 GEO 卫星而言， T_c 的量级为分米，其范围大致在 0.5 到 0.2 米之间，对于 IGS0 卫星而言， T_c 的量级为米，其范围大概在 3 到 5 米之间。对于 MEO 卫星而言， T_c 也为米的量级，不过在 1 米左右。

在由 IERS2003 和 IERS1996 规范不同导致的北斗卫星轨道差异之间，GEO 卫星的 T_c 小于 1mm (分辨率为 1mm)，IGSO 卫星的 T_c 在 1cm 左右，MEO 卫星的 T_c 在 7mm 左右。

对于 N 方向而言，联系表 1 中卫星的轨道，通过表 3 和表 4 不难看出。

$$A_{NC}(\text{MEO}) < A_{NC}(\text{IGSO}) < A_{NC}(\text{GEO})$$

在由 IERS2003 和 IERS1996 规范不同导致的北斗卫星轨道差异之间, A_{NC} 在 GEO 的大小为 7m 左右, 在 IGSO 中 4 到 6m 不等, 在 MEO 的 2 到 5 米不等。

在由 IERS2010 和 IERS2003 规范不同导致的北斗卫星轨道差异之间, A_{NC} 在 GEO 的大小为 1.5cm 左右, 在 IGSO 中 1 到 1.5cm 不等, 在 MEO 的 8mm 左右。

对于 w_{NC} 而言, 我们 GEO 和 IGSO 轨道差异的周期为一天, MEO 的轨道差异为半天, 这正好对应于他们的轨道周期。故其角速度大小应与地球自转角速度近似满足 1: 1 和 2: 1 的关系。

2.2 用低精度日月分析解代替日月历表的北斗卫星轨道差异

2.2.1 采用日月低精度坐标的北斗卫星轨道差异

表 5: 日月低精度坐标与 JPL 星历在轨道计算中的差异统计 (1 天)

卫星型号	R(m)	T(m)	N(m)	3D(m)
C01	1.7492	6.8993	1.2625	7.2287
C03	1.9351	6.8796	1.5234	7.3071
C04	1.4361	3.7416	1.1371	4.1659
C05	1.622	6.1256	1.5179	6.516
C06	1.5969	9.2032	0.286	9.3451
C07	1.8397	6.134	0.575	6.4297
C08	1.4132	3.0037	0.2738	3.3308
C09	1.6053	8.7881	0.3902	8.942
C10	1.6889	4.271	0.5338	4.6237
C11	0.359	3.043	0.1132	3.0662
C12	0.2447	0.5946	0.1174	0.6536
C13	0.1414	1.6431	0.2488	1.6678
C14	0.2685	2.4284	0.2234	2.4533
MEAN	1.2231	4.8273	0.631	5.0562

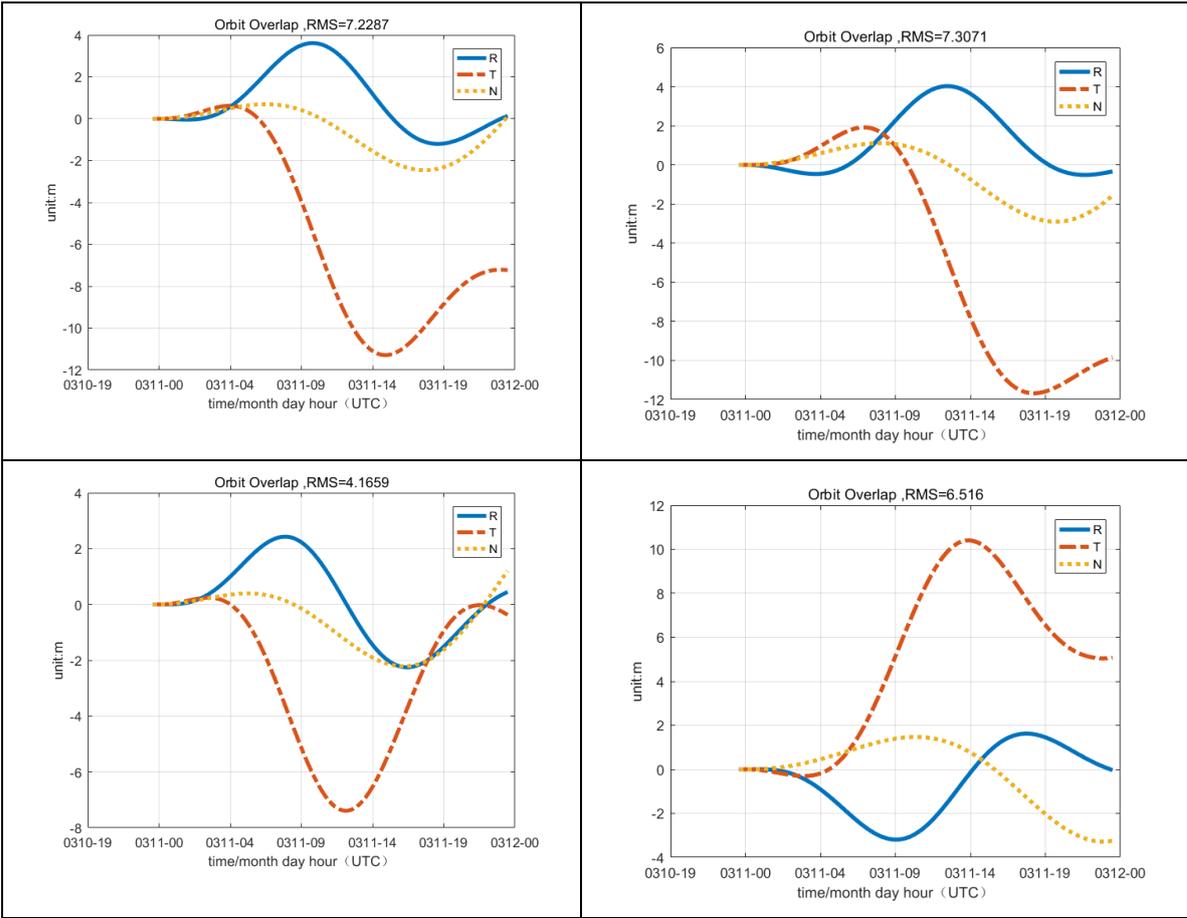
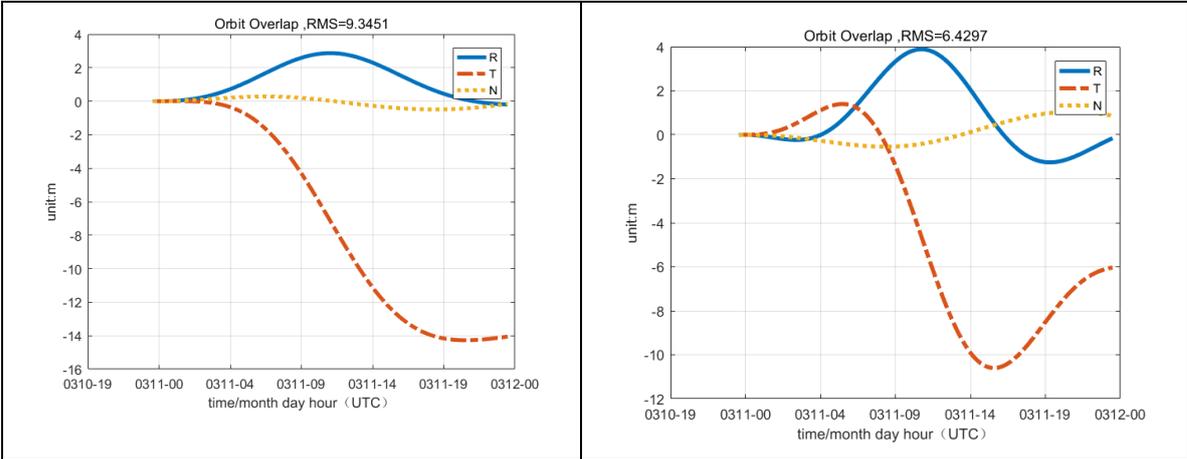


图 2. 2. 1. 1 日月低精度坐标与 JPL 星历在 GEO 北斗导航卫星轨道计算的差异 (1 天)



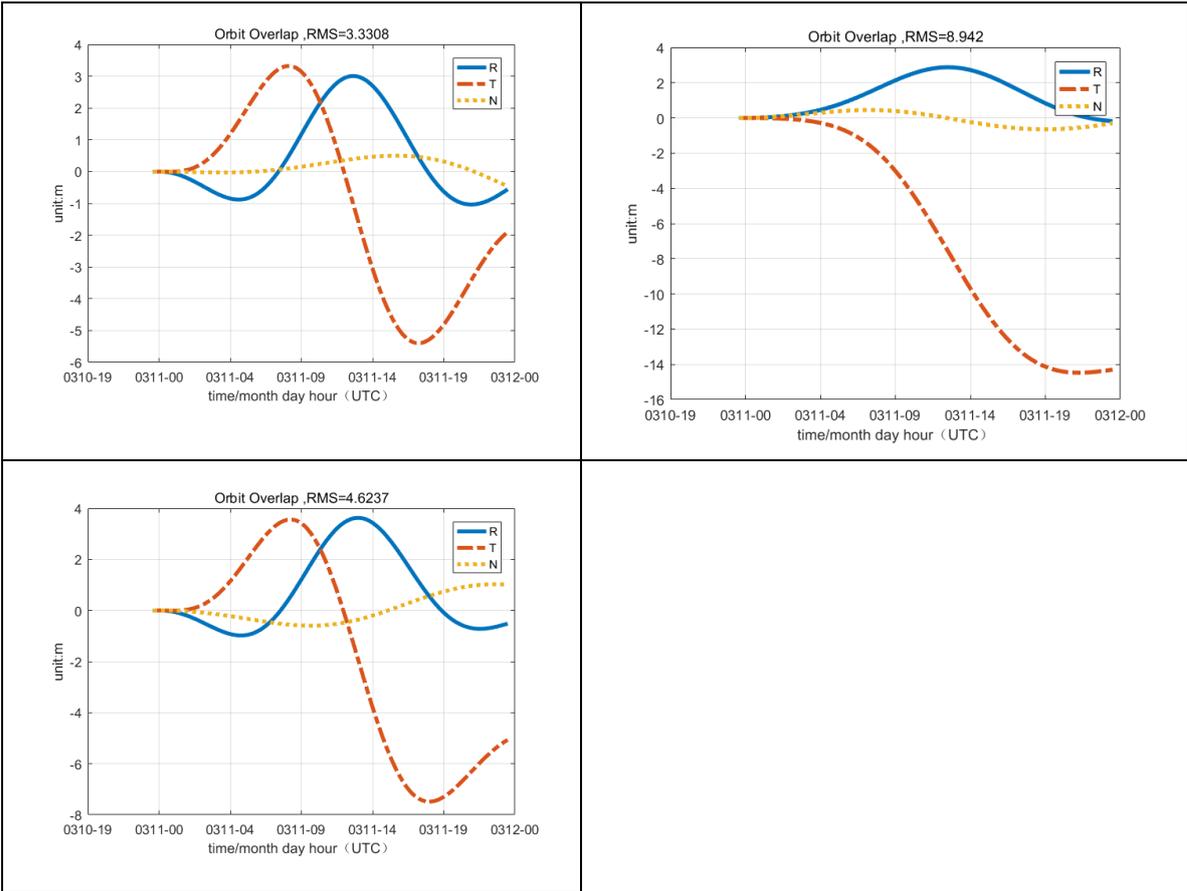
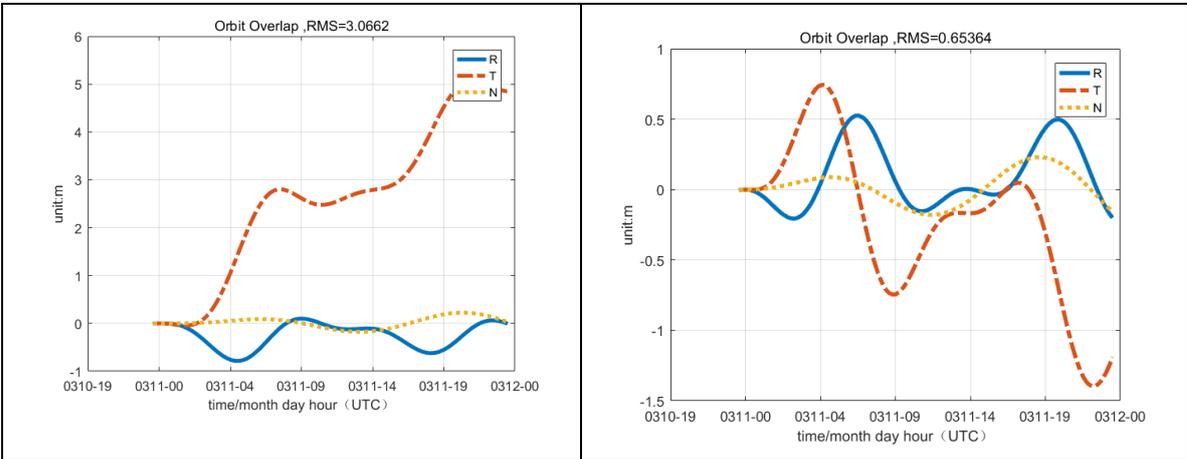


图 2.2.1.2 日月低精度坐标与 JPL 星历在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (1 天)



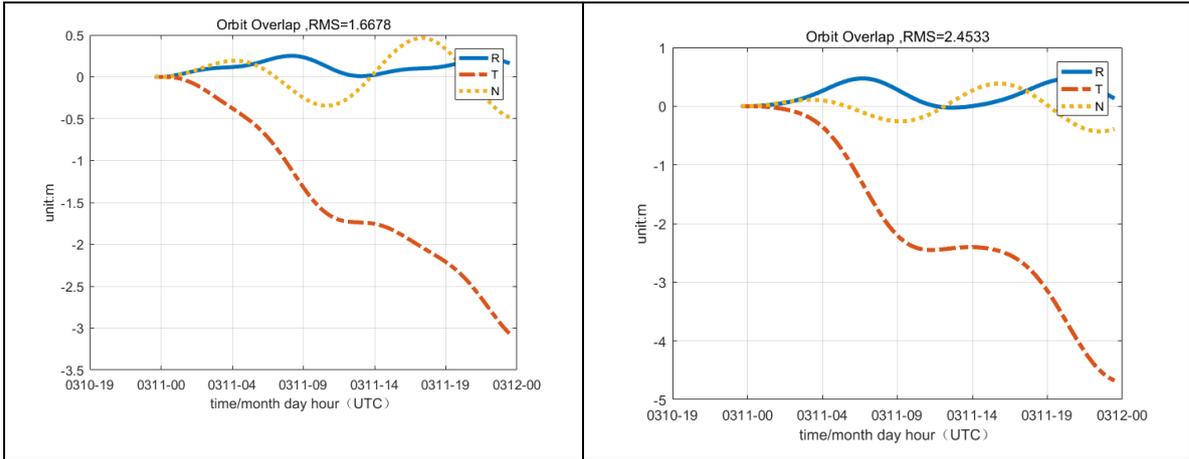
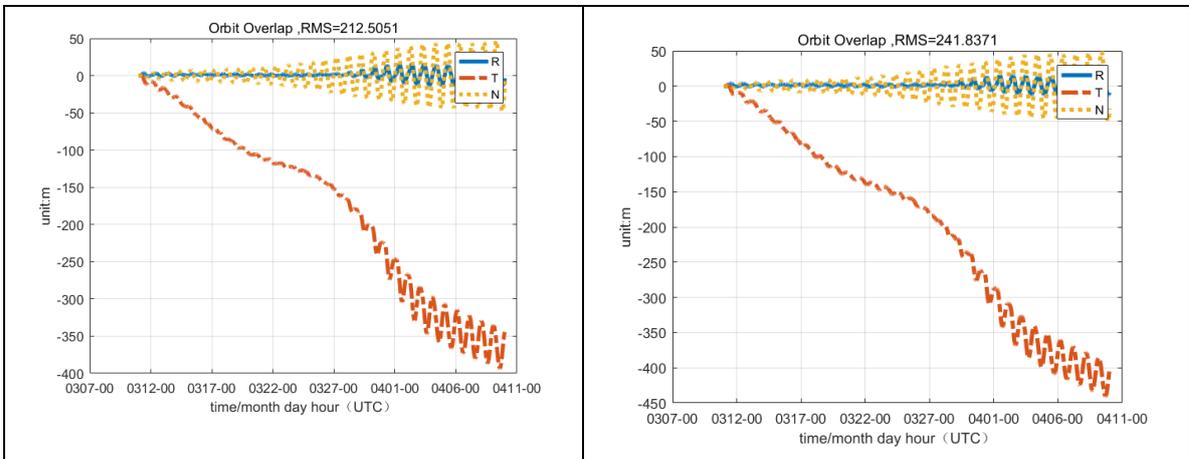


图 2.2.1.3 日月低精度坐标与 JPL 星历在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (1 天)

表 6: 日月低精度坐标与 JPL 星历在轨道计算中的差异统计 (30 天)

卫星型号	R(m)	T(m)	N(m)	3D(m)
C01	5.7168	211.5042	19.7916	212.5051
C03	5.3891	240.8985	20.5922	241.8371
C04	5.4618	81.3769	20.7144	84.1494
C05	5.1672	30.6366	19.7052	36.7913
C06	3.0076	163.4674	7.7994	163.681
C07	3.4527	206.2393	36.6151	209.4928
C08	5.2941	64.649	34.6602	73.5449
C09	2.9778	171.5202	8.8245	171.7729
C10	2.9649	176.6404	36.7485	180.4469
C11	1.5547	84.7786	11.8171	85.6123
C12	1.5027	16.3389	11.842	20.2349
C13	1.1133	30.6527	5.326	31.1319
C14	1.161	70.6	5.1447	70.7968
MEAN	3.4434	119.1771	18.4293	121.6921



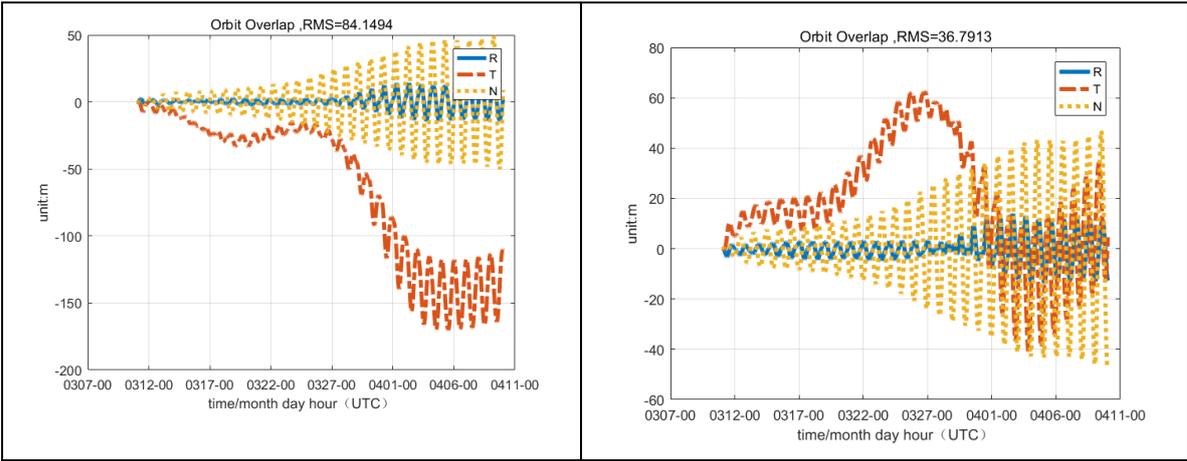
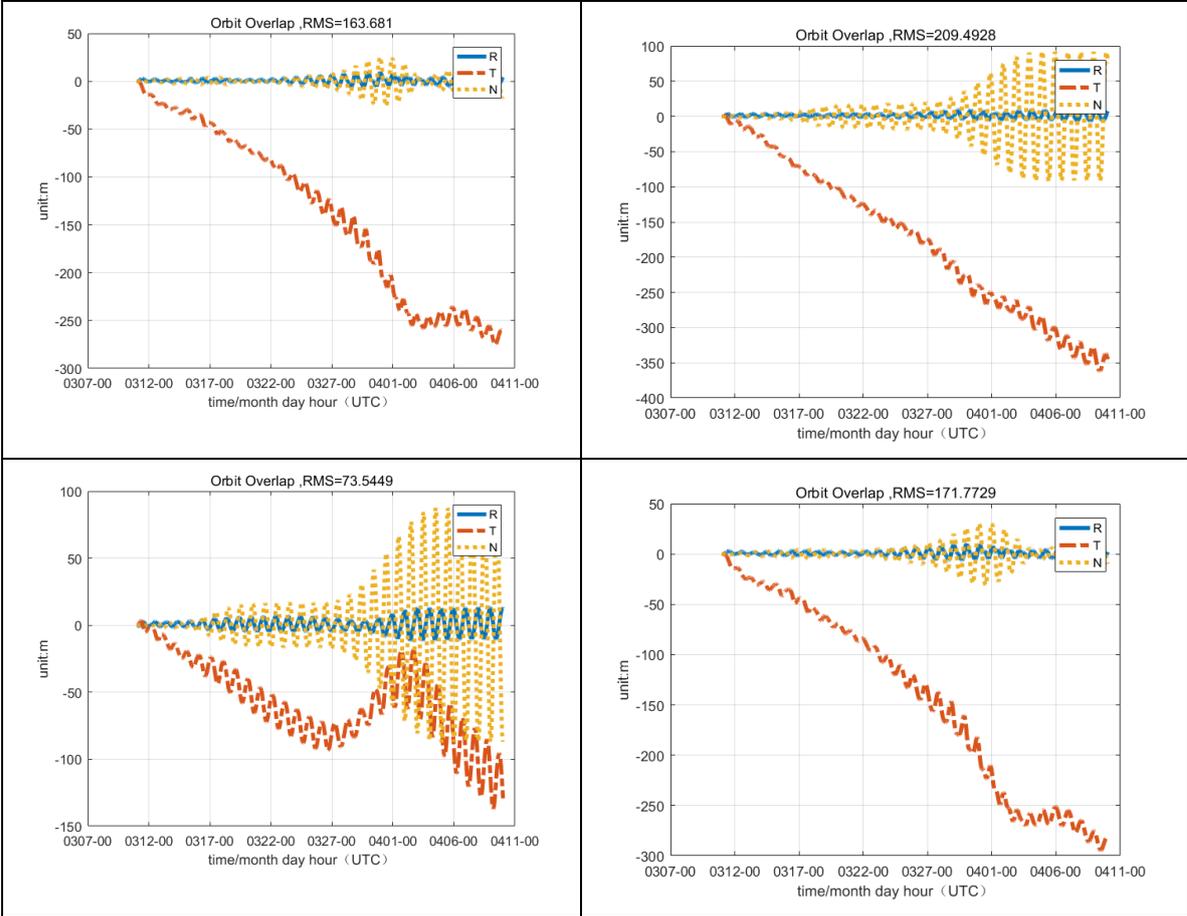


图 2. 2. 1. 7 日月低精度坐标与 JPL 星历在 GEO 北斗导航卫星轨道计算的差异 (30 天)



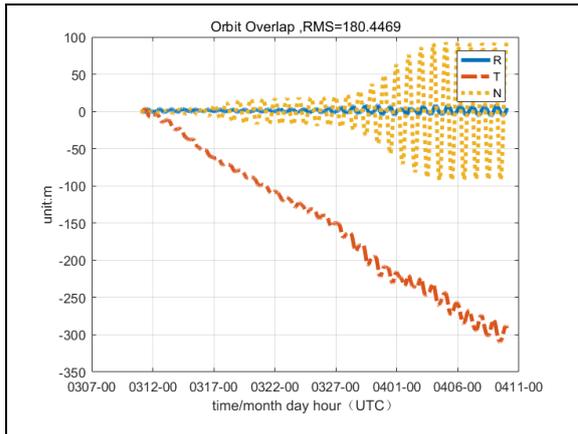


图 2.2.1.8 日月低精度坐标与 JPL 星历在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (30 天)

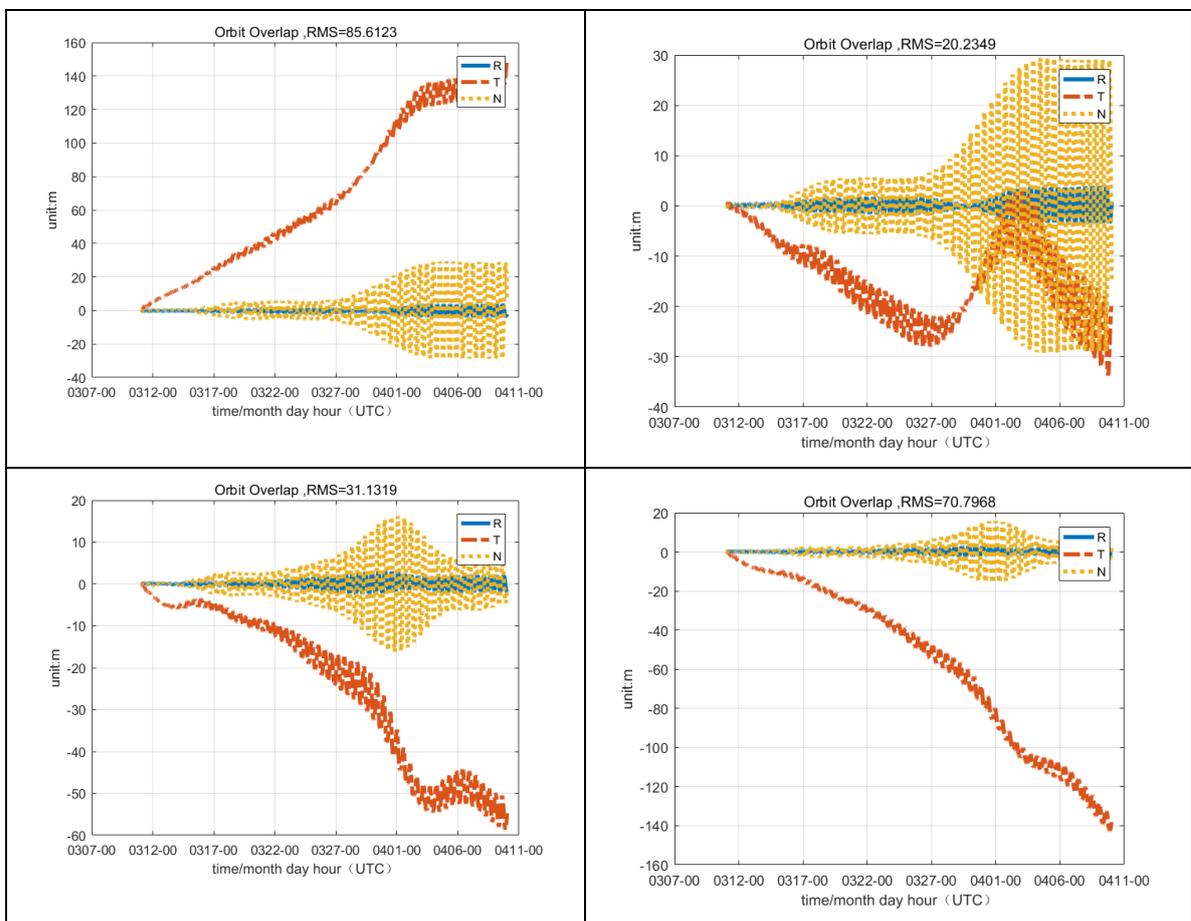


图 2.2.1.9 日月低精度坐标与 JPL 星历在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (30 天)

2.2.2 用低精度太阳分析解坐标代替日月历表的北斗卫星轨道差异

表 7: 太阳低精度坐标与 JPL 星历在轨道计算中的差异统计 (1 天)

卫星型号	R(m)	T(m)	N(m)	3D(m)
C01	1.0352	4.2982	0.4027	4.4394
C03	0.8087	2.1813	0.4063	2.3617

C04	0.847	3.5051	0.3808	3.6261
C05	0.9967	4.2457	0.2867	4.3705
C06	0.8545	4.2582	0.5513	4.3779
C07	0.7243	2.2094	0.4482	2.3679
C08	0.3679	0.876	0.521	1.0836
C09	0.6666	2.9052	0.4376	3.0127
C10	0.5663	1.4177	0.3557	1.5675
C11	0.1577	1.3601	0.2019	1.384
C12	0.0567	0.3094	0.1925	0.3688
C13	0.0678	0.145	0.1001	0.1888
C14	0.0693	0.5032	0.0981	0.5174
MEAN	0.5553	2.1703	0.3371	2.282

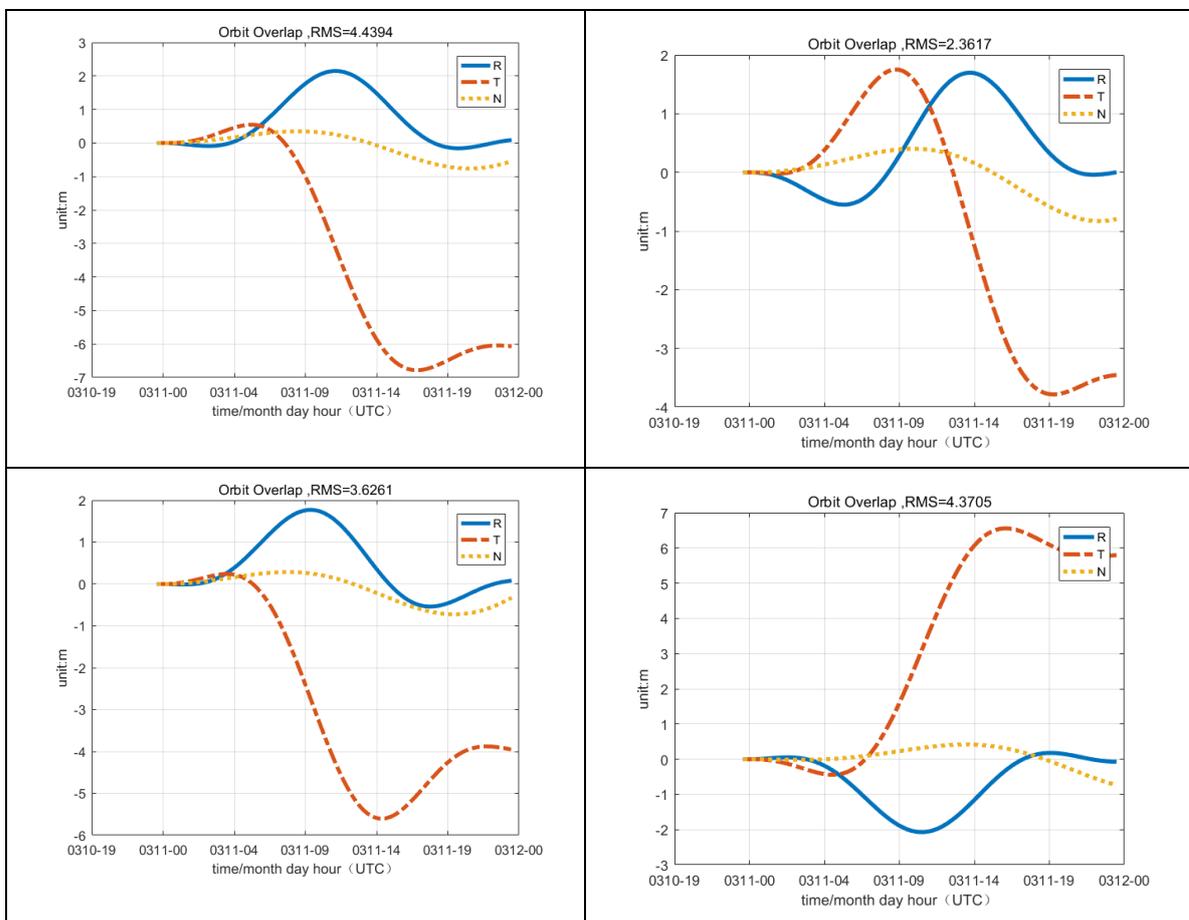


图 2.2.2.1 太阳低精度坐标与 JPL 星历在 GEO 北斗导航卫星轨道计算的差异 (1 天)

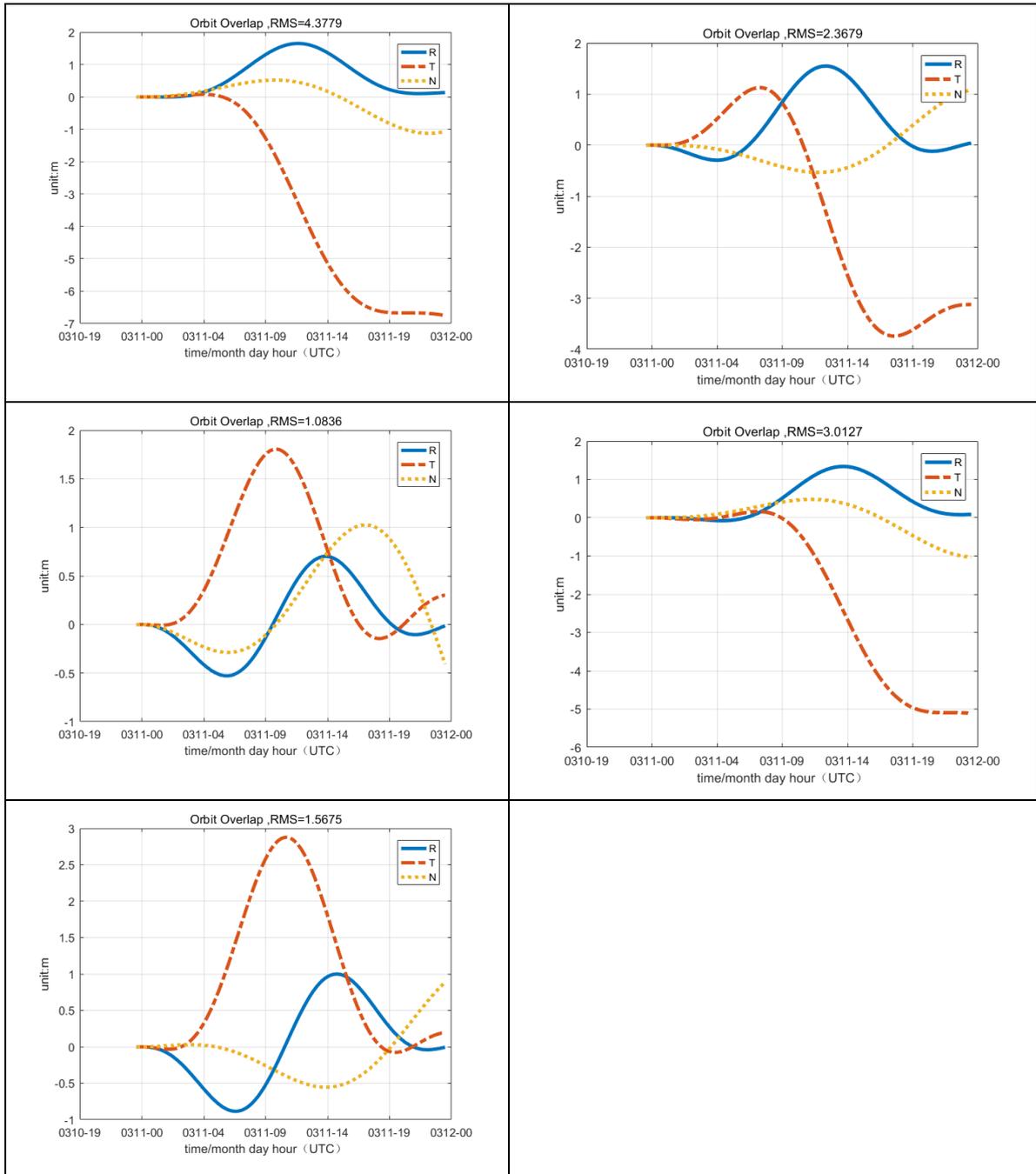


图 2.2.2.2 太阳低精度坐标与 JPL 星历在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (1 天)

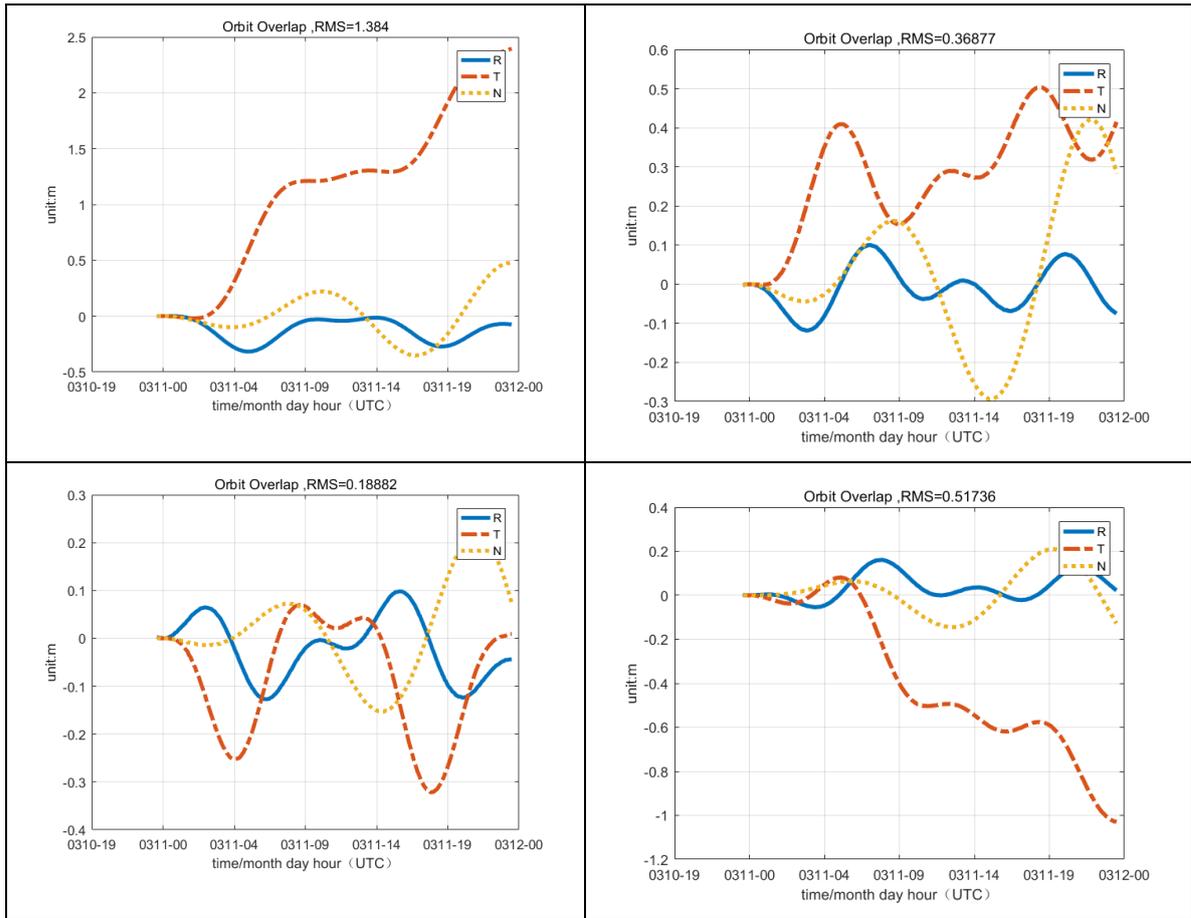


图 2.2.2.3 太阳低精度坐标与 JPL 星历在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (1 天)

表 8: 太阳低精度坐标与 JPL 星历在轨道计算中的差异统计 (30 天)

卫星型号	R(m)	T(m)	N(m)	3D(m)
C01	1.4981	93.9066	9.2628	94.3742
C03	1.1494	42.5105	9.3875	43.5498
C04	1.8807	48.4162	9.5118	49.3775
C05	1.1322	92.7726	9.4943	93.264
C06	1.0155	94.1362	19.2066	96.081
C07	1.4732	65.429	12.3582	66.6022
C08	1.5895	22.1959	20.2586	30.0931
C09	0.8463	73.6718	18.2141	75.8947
C10	1.1549	6.234	12.3801	13.9091
C11	1.0022	32.1133	6.7583	32.832
C12	1.0361	3.2845	6.7838	7.608
C13	0.6881	3.4932	5.4509	6.5106
C14	0.7391	31.838	5.4968	32.3174
MEAN	1.1696	46.9232	11.1203	49.4164

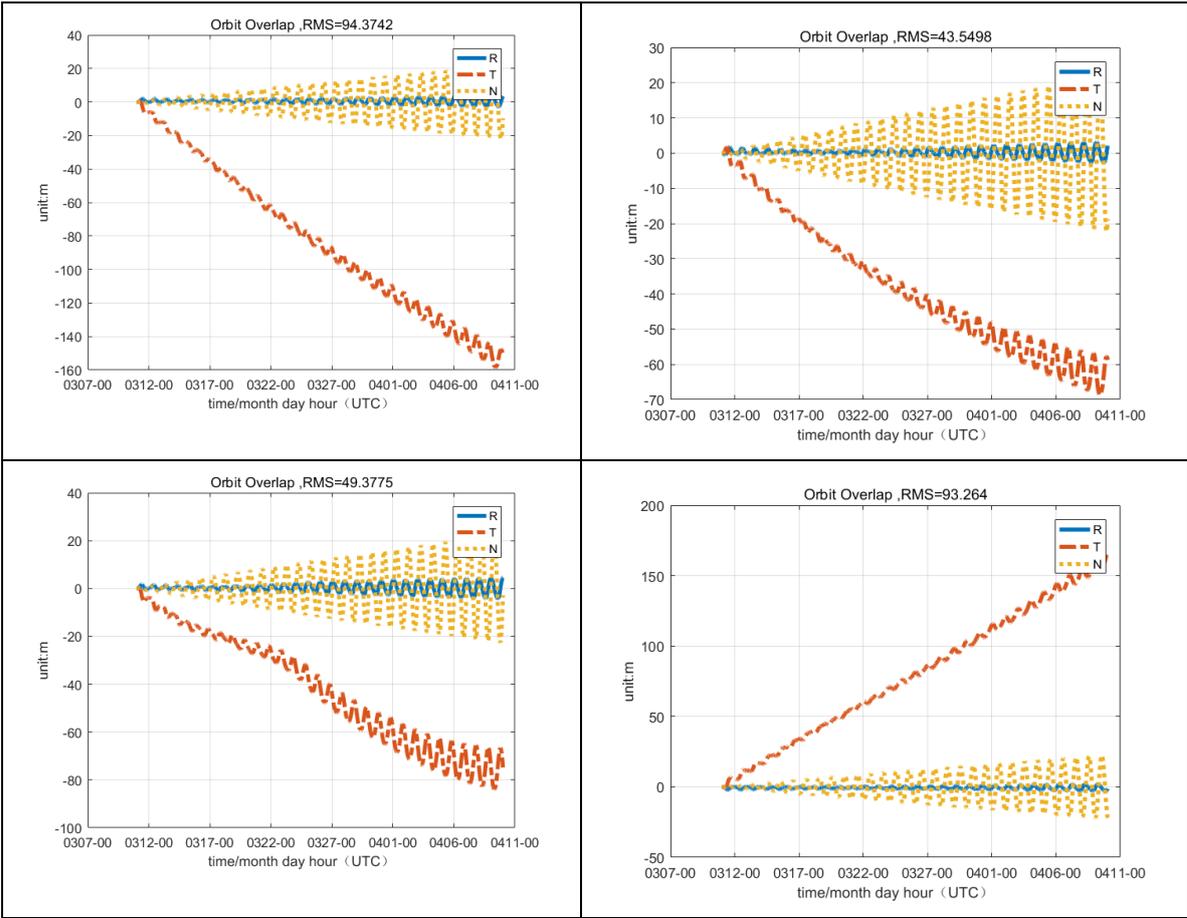
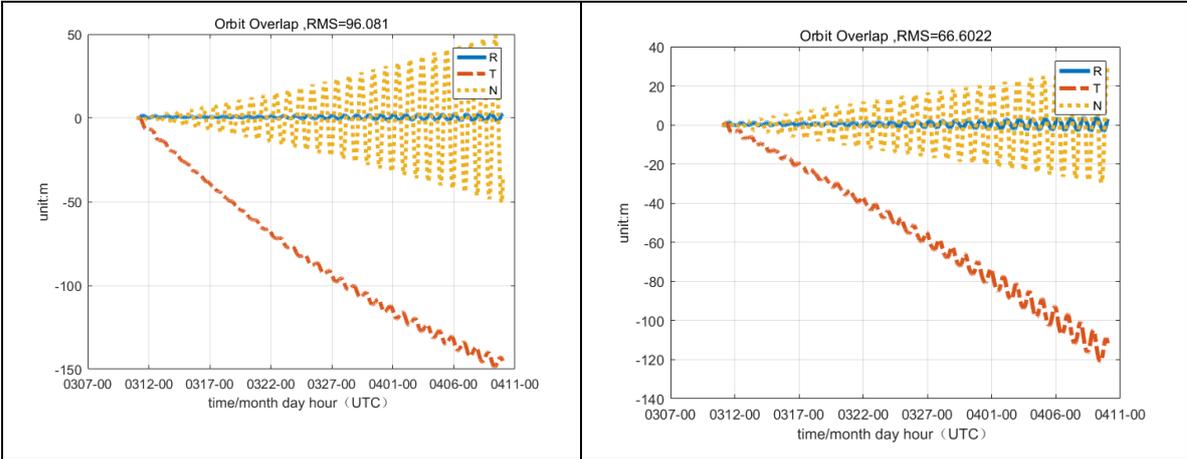


图 2.2.2.4 太阳低精度坐标与 JPL 星历在 GEO 北斗导航卫星轨道计算的差异 (30 天)



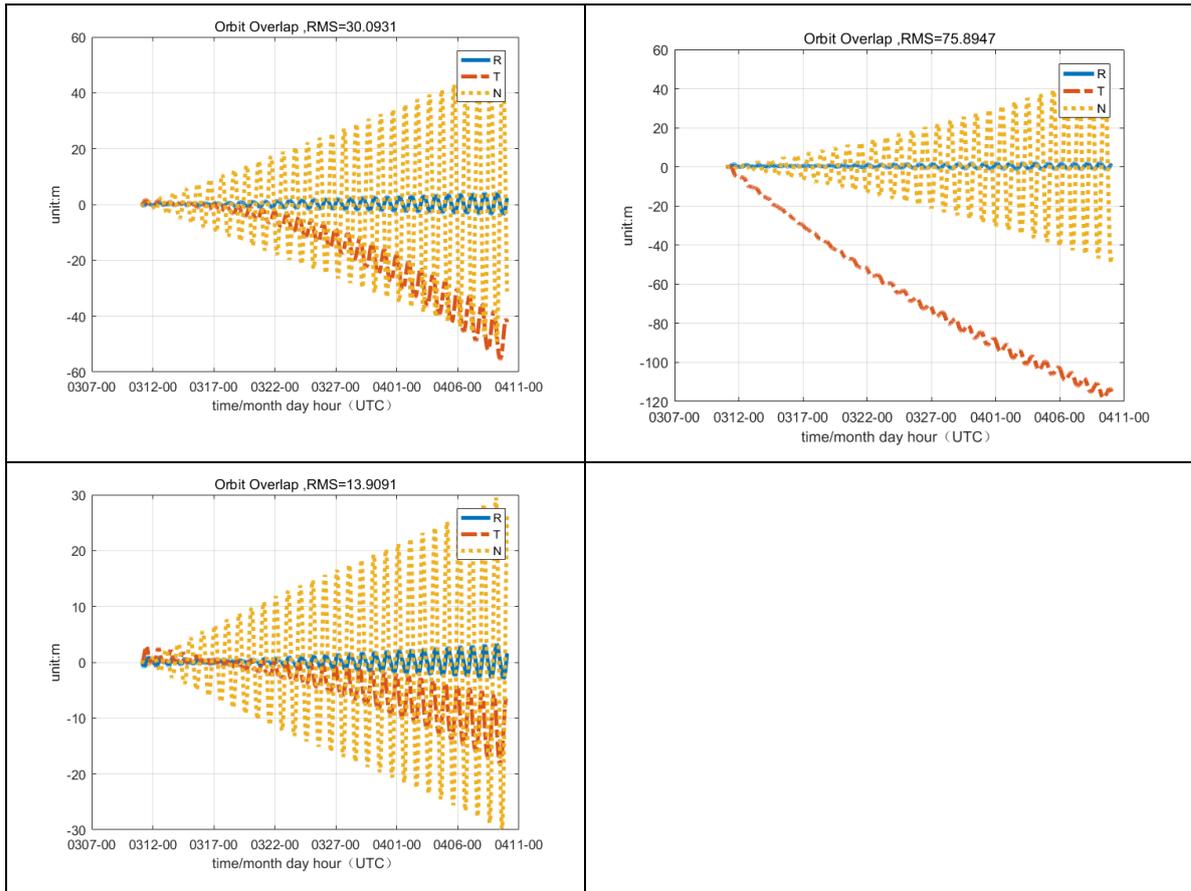
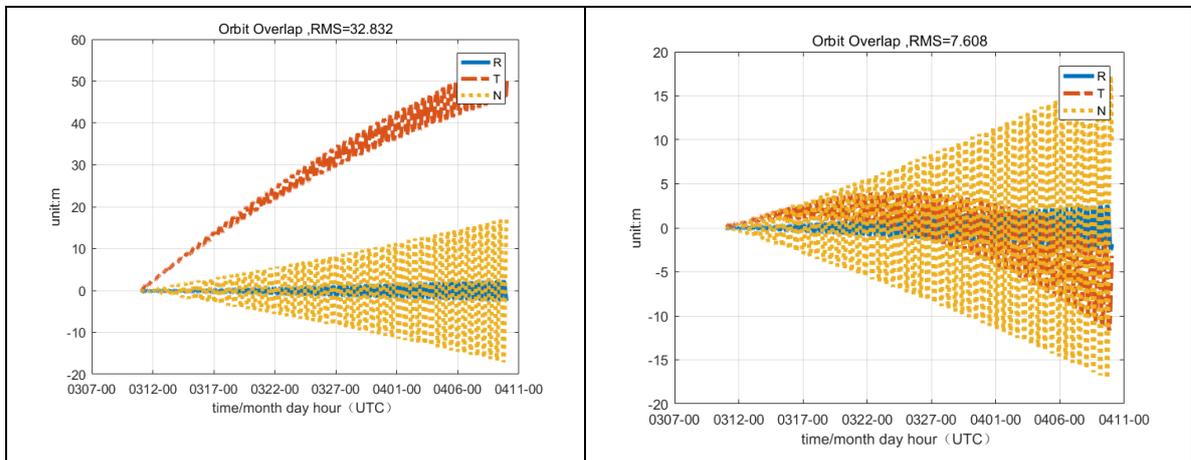


图 2. 2. 2. 5 太阳低精度坐标与 JPL 星历在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (30 天)



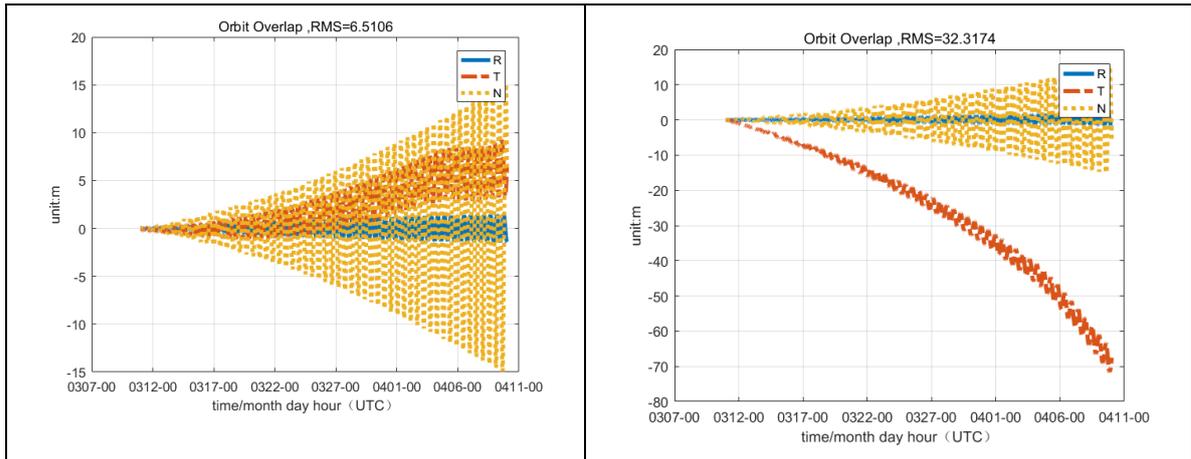


图 2.2.2.6 太阳低精度坐标与 JPL 星历在 IGSO 北斗导航卫星轨道计算的差异 (30 天)

2.2.2 用月亮低精度坐标的北斗卫星轨道差异

表 9: 月亮低精度坐标与 JPL 星历在轨道计算中的差异统计 (1 天)

卫星型号	R(m)	T(m)	N(m)	3D(m)
C01	0.9389	2.9045	0.9747	3.2043
C03	1.2523	4.9376	1.1846	5.2298
C04	0.9966	2.2352	0.94	2.6216
C05	0.9859	2.5216	1.3087	3.0072
C06	0.7682	4.9708	0.3848	5.0445
C07	1.2868	4.1631	0.3681	4.373
C08	1.1421	2.8713	0.3182	3.1064
C09	1.0037	5.9538	0.3385	6.0473
C10	1.3799	4.393	0.4184	4.6236
C11	0.2183	1.69	0.2195	1.7182
C12	0.2093	0.768	0.2202	0.8259
C13	0.1883	1.5796	0.285	1.6161
C14	0.2211	1.937	0.2458	1.965
MEAN	0.8147	3.1481	0.5543	3.3371

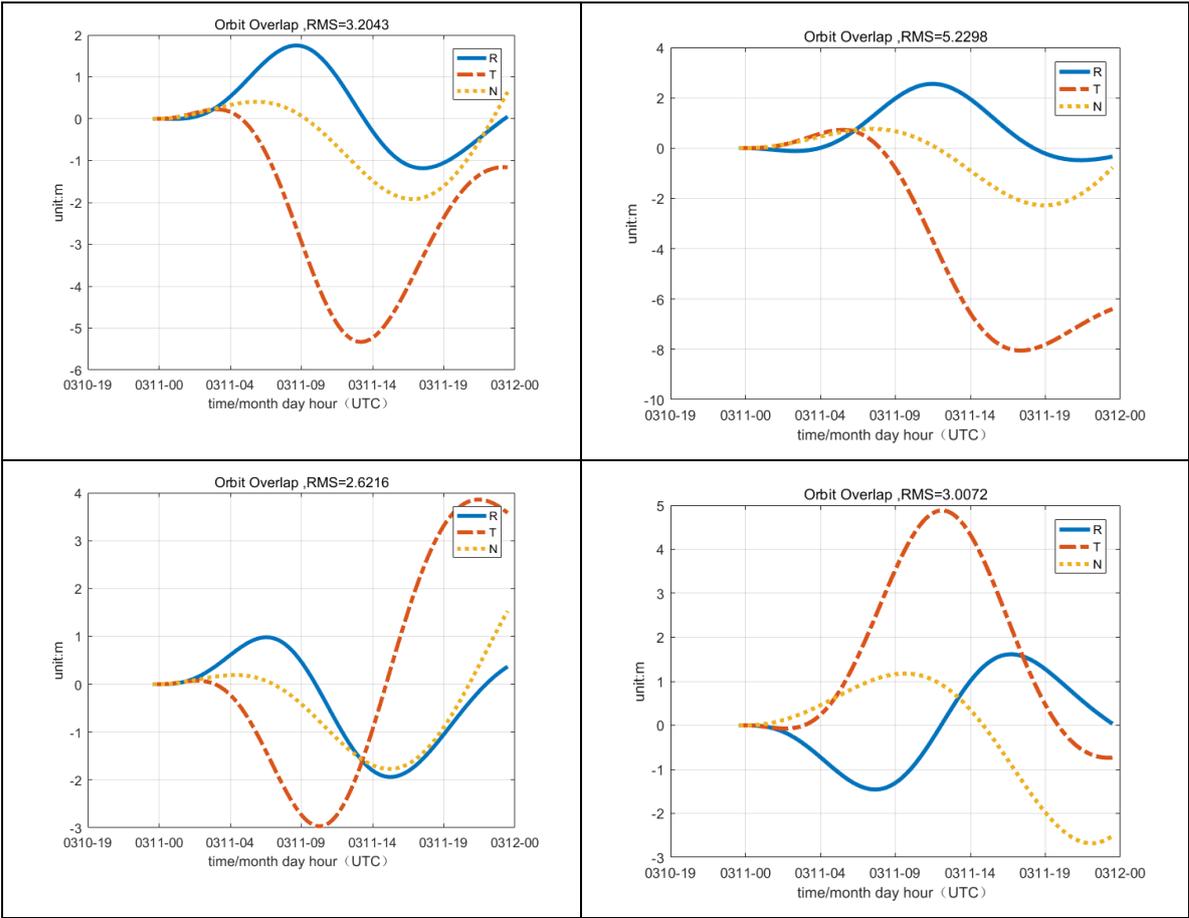
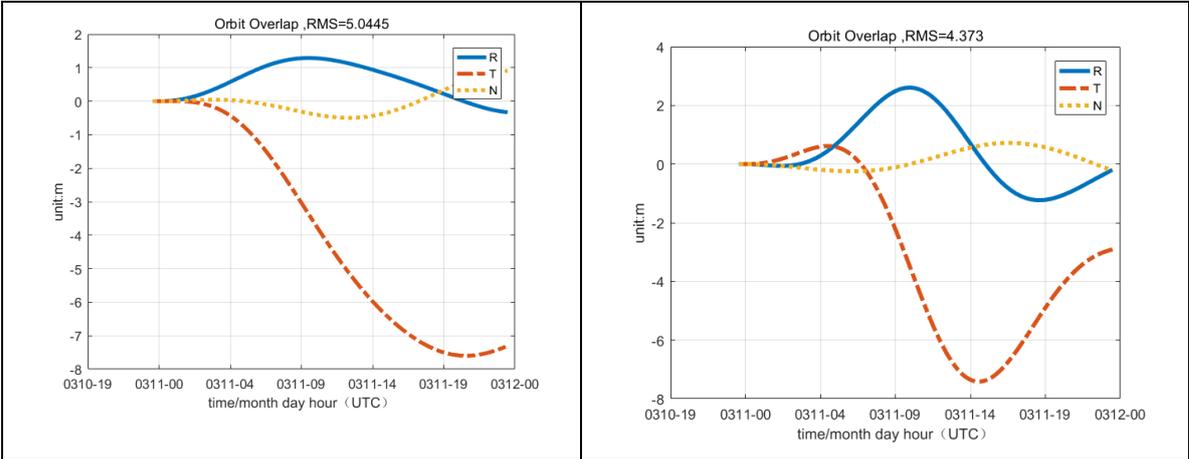


图 2.2.3.1 月球低精度坐标与 JPL 星历在 GEO 北斗导航卫星轨道计算的差异 (1 天)



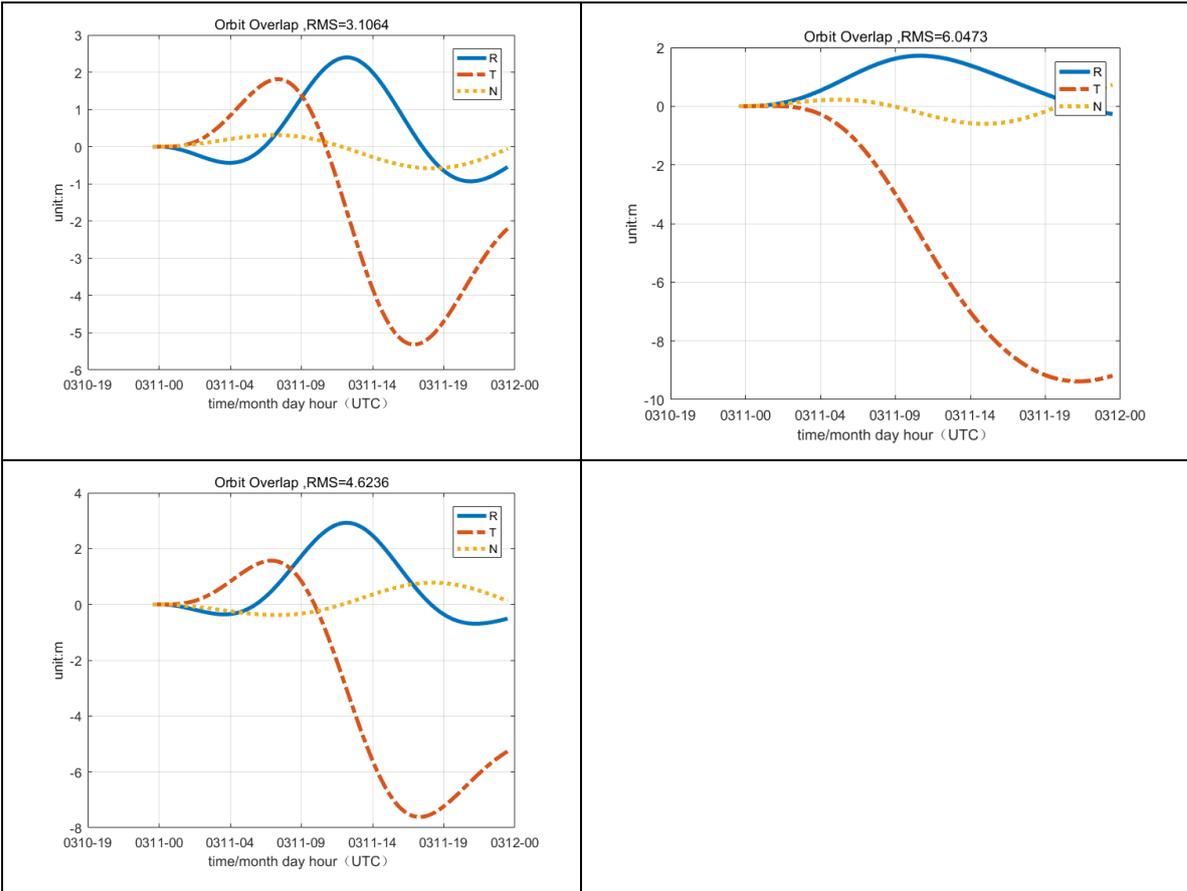
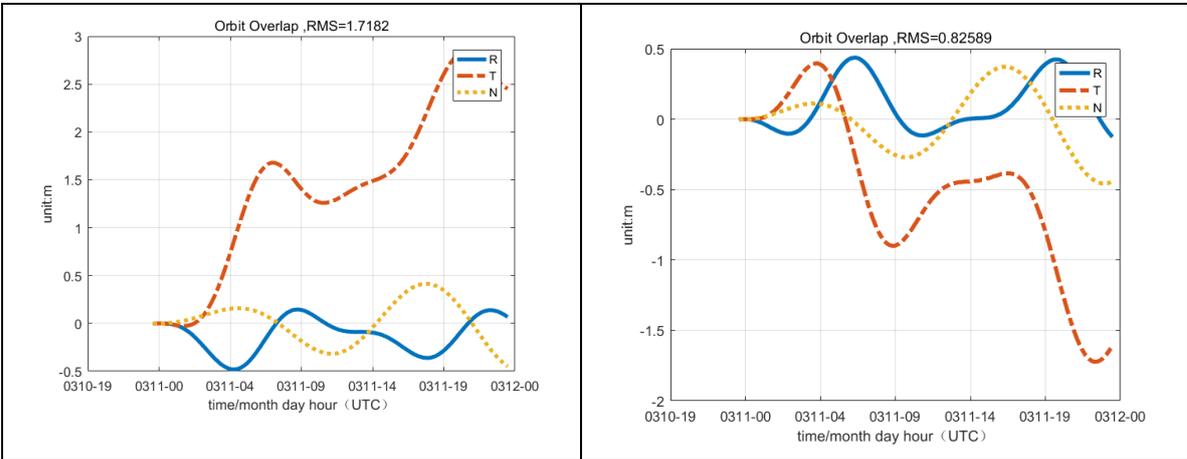


图 2.2.3.2 月球低精度坐标与 JPL 星历在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (1 天)



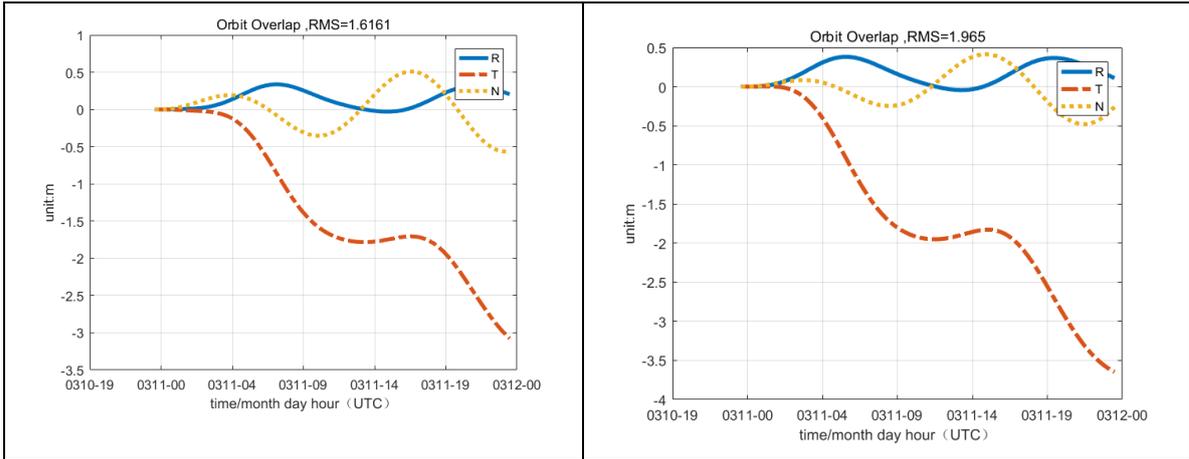
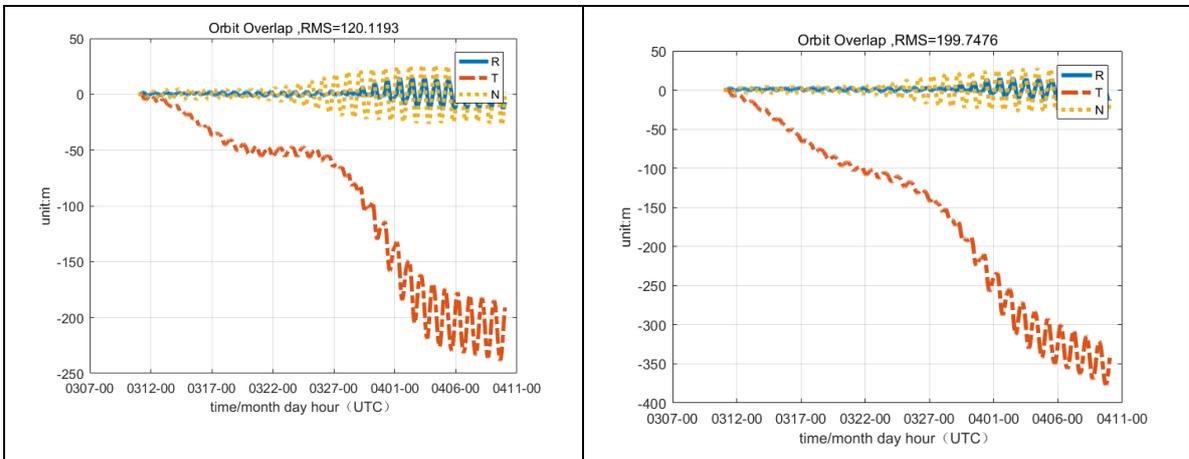


图 2.2.3.3 月球低精度坐标与 JPL 星历在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (1 天)

表 10: 月亮低精度坐标与 JPL 星历在轨道计算中的差异统计 (30 天)

卫星型号	R(m)	T(m)	N(m)	3D(m)
C01	5.404	119.3707	12.2502	120.1193
C03	5.4199	199.2569	12.9005	199.7476
C04	5.0683	38.9024	12.9782	41.3222
C05	5.4475	83.293	12.0561	84.3371
C06	2.2733	71.6265	21.8943	74.9325
C07	2.2269	140.8657	29.3305	143.9041
C08	5.4992	47.5064	32.1784	57.6416
C09	2.3996	99.1886	23.8124	102.0351
C10	2.2101	171.0313	29.6518	173.5968
C11	1.3682	53.3218	12.1265	54.7005
C12	1.3212	16.162	12.1173	20.2431
C13	0.5436	33.7604	10.2633	35.2902
C14	0.5348	38.9435	10.1172	40.2398
MEAN	3.0551	85.633	17.8213	88.3161



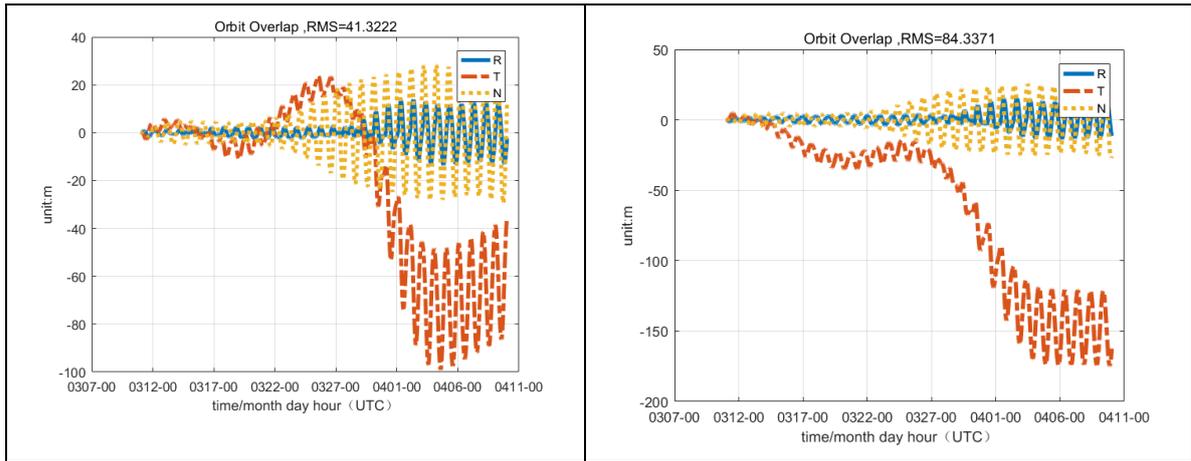
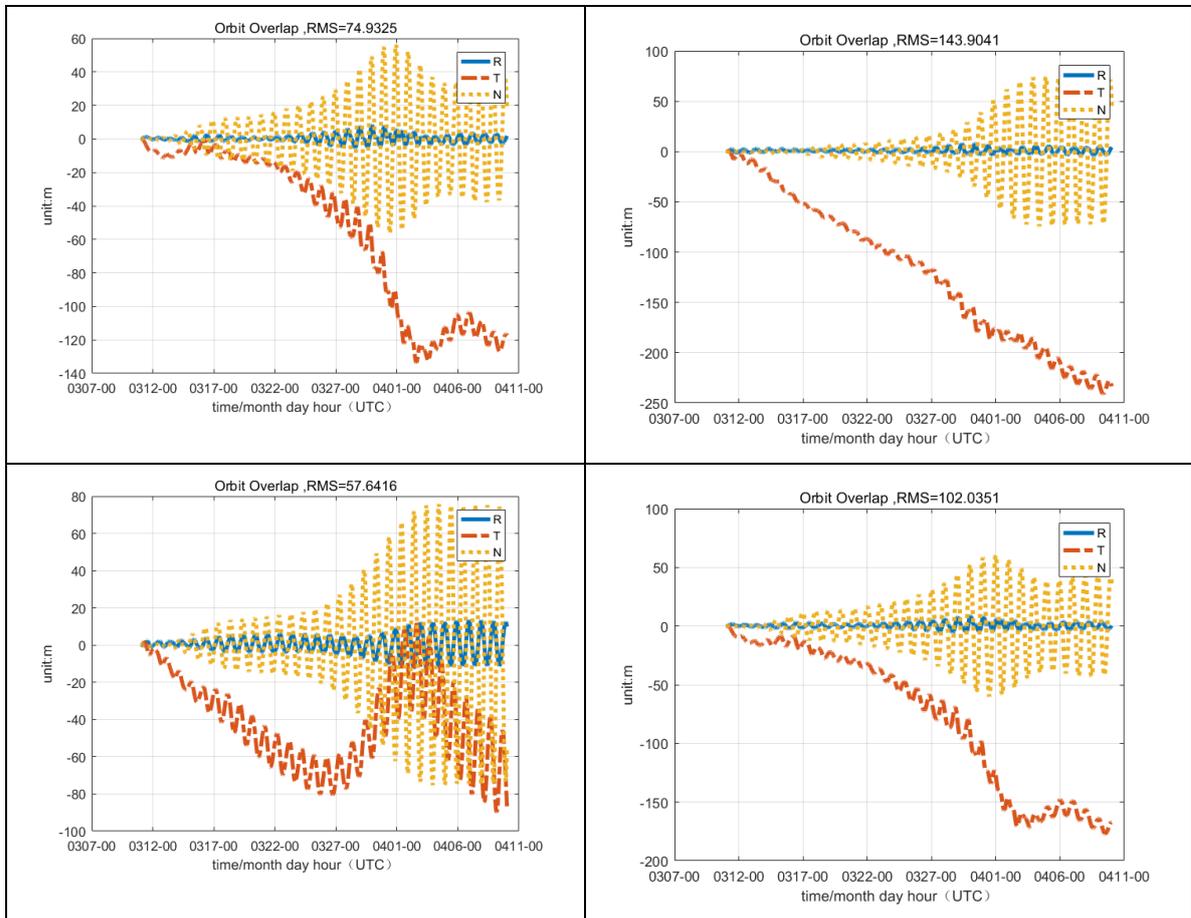


图 2.2.3.4 月球低精度坐标与 JPL 星历在 GEO 北斗导航卫星轨道计算的差异 (30 天)



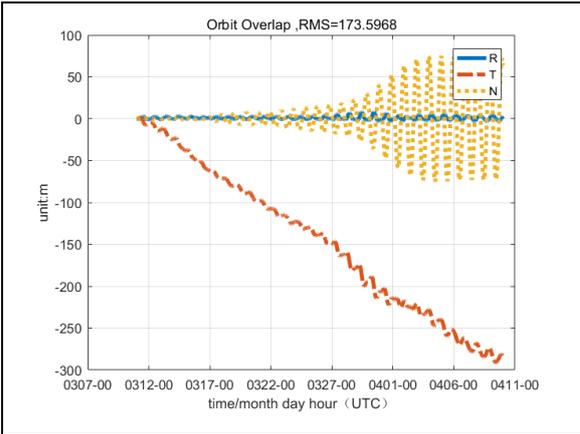


图 2. 2. 3. 5 月球低精度坐标与 JPL 星历在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (30 天)

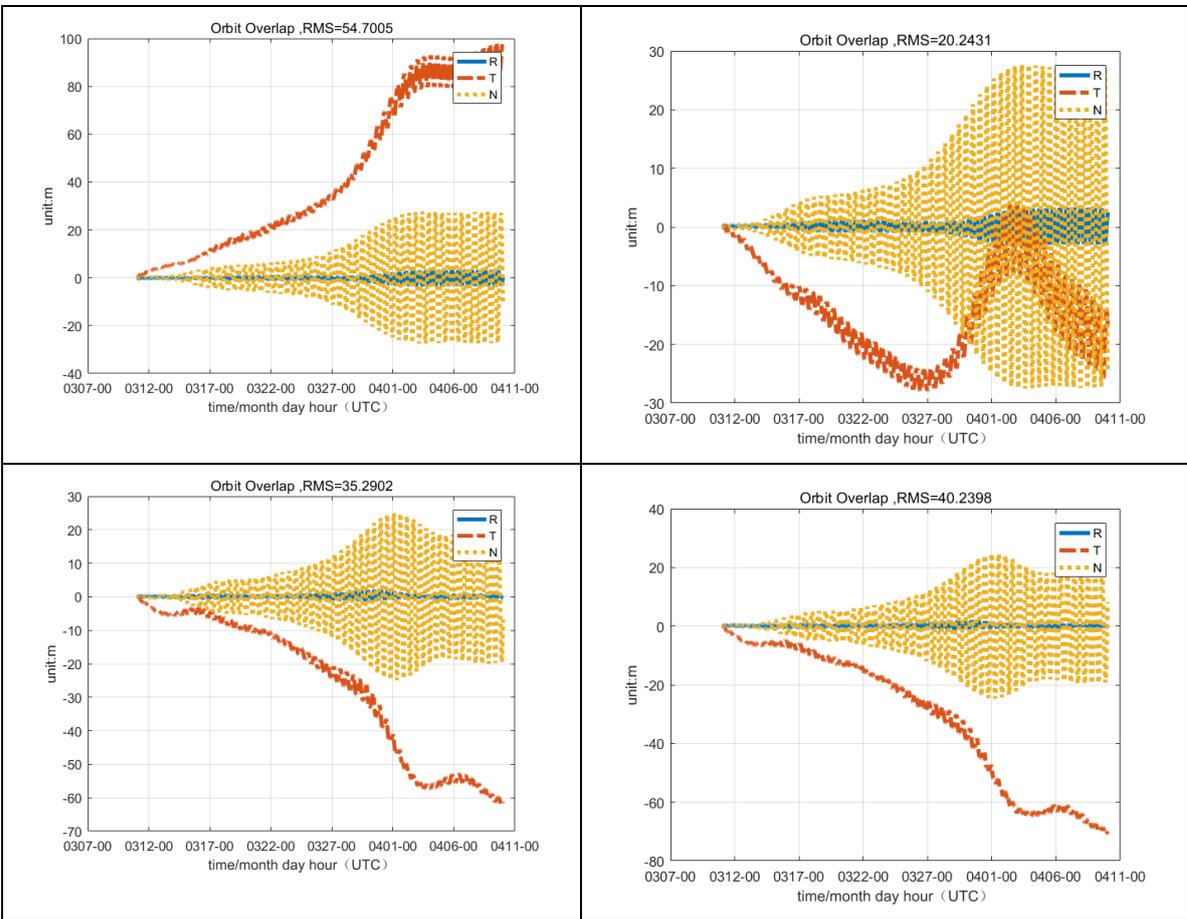


图 2. 2. 2. 6 月球低精度坐标与 JPL 星历在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (30 天)

2. 2. 3 差异分析

从 2. 2 中的图可以看出，其日月分析坐标产生的 RMS 是由太阳和月亮两部分组合而成，且这两者所起的贡献在不同时间和不同方向中也是不一样的。

下表统计了上述 GEO 、 IGS0、 MEO 各方向在不同时长中的平均 RMS

表 11 积分 1 天不同轨道北斗卫星平均 RMS

1 天	R 方向 RMS (m)			T 方向 RMS (m)			N 方向 RMS (m)			RMS (m)		
	太 阳	月 亮	日 月	太 阳	月 亮	日 月	太 阳	月 亮	日 月	太 阳	月 亮	日 月
GEO	0.92 2	1.04 3	1.68 6	3.55 8	3.15 0	5.91 2	0.36 9	1.10 2	1.36 0	3.69 9	3.51 6	6.30 4
IGS 0	0.63 6	1.11 6	1.62 9	2.33 3	4.47 0	6.28 0	0.46 3	0.36 6	0.41 2	2.48 2	4.63 9	6.53 4
MEO	0.08 8	0.20 9	0.25 3	0.57 9	1.49 4	1.92 7	0.14 8	0.24 3	0.17 6	0.61 5	1.53 1	1.96 0

表 12 积分 30 天不同轨道北斗卫星平均 RMS

30 天	R 方向 RMS(m)			T 方向 RMS (m)			N 方向 RMS (m)			RMS (m)		
	太 阳	月 亮	日 月	太 阳	月 亮	日 月	太 阳	月 亮	日 月	太 阳	月 亮	日 月
GE 0	1.4 15	5.3 35	5.4 34	69.4 01	110. 206	141. 104	9.41 4	12.5 46	20.2 01	70.1 41	111. 382	143. 821
IG SO	1.2 16	2.9 22	3.5 39	52.3 33	106. 044	156. 503	16.4 84	27.3 73	24.9 30	56.5 16	110. 422	159. 788
ME 0	0.8 66	0.9 42	1.3 33	17.6 82	35.5 47	50.5 93	6.12 2	11.1 56	8.53 2	19.8 17	37.6 18	51.9 44

从表中可以看出。月亮分析坐标在 RMS 上的贡献无论从 30 天上还是从 1 天上来看,都要大于太阳分析坐标带来的 RMS。从轨道上来看,IGSO>GEO>>MEO,这可以认为是跟日月相关的摄动力,如第三体摄动,相对于地球引力变大导致的。

R 方向上:

R 方向相对于其他两个方向,其 RMS 非常小,从 2.2 中的图表可以看出是在绕 0 点附近来回振荡,其频率成分比较复杂,且振幅是逐渐增大的。对于月亮而言 其幅值与线性增长很接近,但是对于月亮而言,其幅值是变化的,而且在某一段时间内会发生迅速增长。

从表 5 来看,积分一天后,GEO 和 IGS0 积分一天的 R 方向上 RMS 的差异在 1.4m-2.0m 之间,MEO 的差异为分米量级,在 0.1dm-0.4dm 之间。如果积分 30 天,GEO 卫星上的 RMS 差异为 5m 左右,而 IGS0 则为 2m-5m,CEO 为 1m-1.6m。

T 方向上:

从 30 天的积分图可以看出, T 方向发现许多频率不同的小振幅构成的振荡以外。最明显的特征就是其差异会随着时间明显增大, 故可以认为存在一个长期项或大振幅长周期项 $T(t)$, 使得差异逐渐放大, 其可以分解成 $T_{sun}(t)$ 和 $T_{moon}(t)$ 。其次, 发现存在一个周期大约在 7-10 天左右的周期振荡, 是由月球的低精度分析解坐标产生的。

由于存在 $T_{sun}(t)$ 和 $T_{moon}(t)$, 且其斜率在 30 天内基本上大于各个周期项, 其绝对值成正相关, 故其差异会随着时间边长而逐渐变大。因此这也构成了卫星 RMS 最主要的来源。对于积分 1 天而言, 太阳和月亮低精度分析坐标在 T 方向产生的差异的量级为米。如果积分 30 天, 对于 GEO 和 IGS0 卫星, 太阳的贡献为十米量级, 月亮的贡献为百米量级。对于 MEO 卫星, 太阳和月亮的贡献都为十米量级。

N 方向上:

同其他方向一样, 可以看成其是由月亮和太阳共同贡献而成。对于太阳而言, 同一颗卫星其频率比较单一, 振幅至少与 t 是正相关的。对于月球而言, 其幅值既有周期相关的成分, 又有与时间 t 正相关的成分。但是对于该方向上的 RMS 的贡献而言, 尽管存在周期部分, 但是其贡献依旧大于太阳。

N 方向上的差异位于 T 方向和 R 方向之间, 对于积分一天而言, 太阳低精度分析坐标贡献的 RMS 量级为分米, 月亮低精度分析坐标在 GEO 卫星上的 RMS 量级贡献为米, 在 MEO 卫星和 IGS0 卫星上的量级贡献为分米

2.3 由不同重力场阶数产生的北斗卫星轨道差异

2.3.1 不同重力场阶数对北斗卫星轨道积分的影响

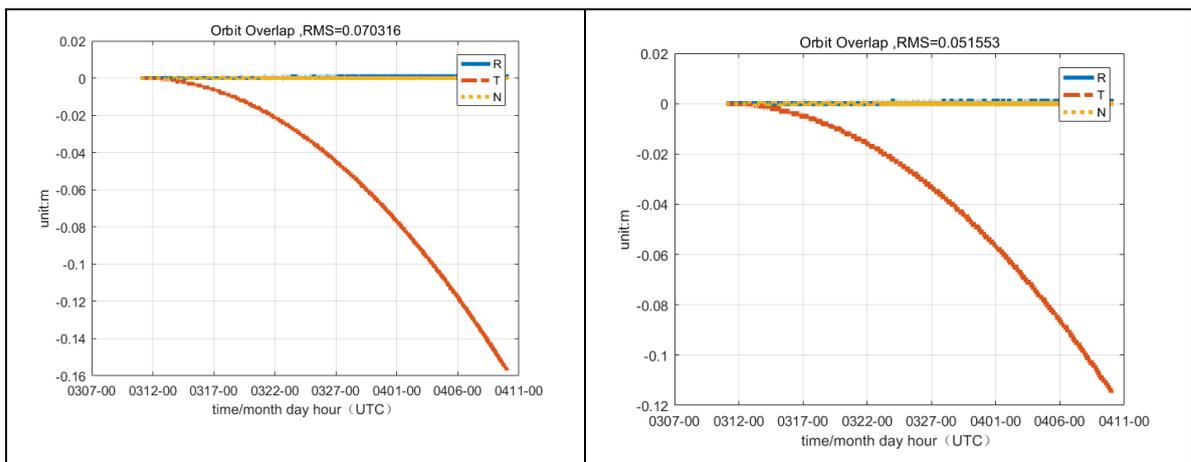
表 13: GRACE 8 阶重力场和 10 阶重力场在轨道计算中的差异统计 (1 天)

卫星型号	R(m)	T(m)	N(m)	3D(m)
C01	0.0002	0.0002	0	0.0003
C03	0.0002	0.0003	0	0.0004
C04	0.0002	0.0002	0.0001	0.0003
C05	0.0003	0.0003	0	0.0004
C06	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003
C07	0.0001	0.0002	0.0001	0.0002
C08	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

C09	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
C10	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
C11	0.0004	0.0006	0.0005	0.0009
C12	0.0004	0.0006	0.0005	0.0009
C13	0.0007	0.0034	0.0005	0.0035
C14	0.0004	0.0006	0.0005	0.0009
MEAN	0.0002	0.0005	0.0002	0.0007

表 14: GRACE 模型 8 阶重力场和 10 阶重力场在轨道计算中的差异统计 (30 天)

卫星型号	R(m)	T(m)	N(m)	3D(m)
C01	0.0008	0.0703	0.0004	0.0703
C03	0.0007	0.0515	0.0005	0.0516
C04	0.0007	0.0492	0.0004	0.0492
C05	0.0013	0.1266	0.0004	0.1266
C06	0.0005	0.0028	0.0005	0.0029
C07	0.0005	0.0025	0.0005	0.0026
C08	0.0005	0.0047	0.0005	0.0048
C09	0.0005	0.016	0.0005	0.016
C10	0.0005	0.0139	0.0005	0.0139
C11	0.0007	0.0194	0.0005	0.0194
C12	0.0008	0.0574	0.0005	0.0575
C13	0.0007	0.081	0.0005	0.081
C14	0.0007	0.0558	0.0005	0.0558
MEAN	0.0007	0.0424	0.0005	0.0424



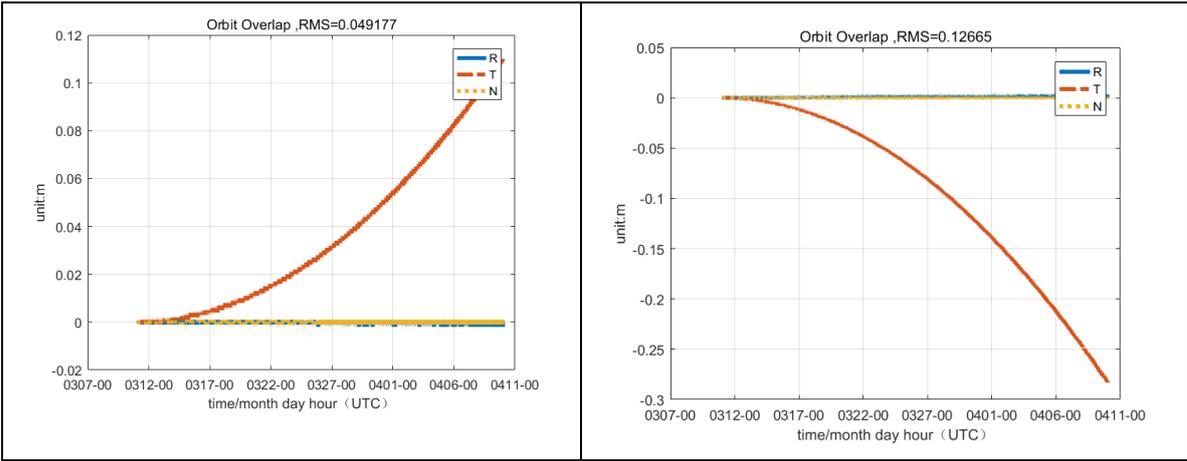
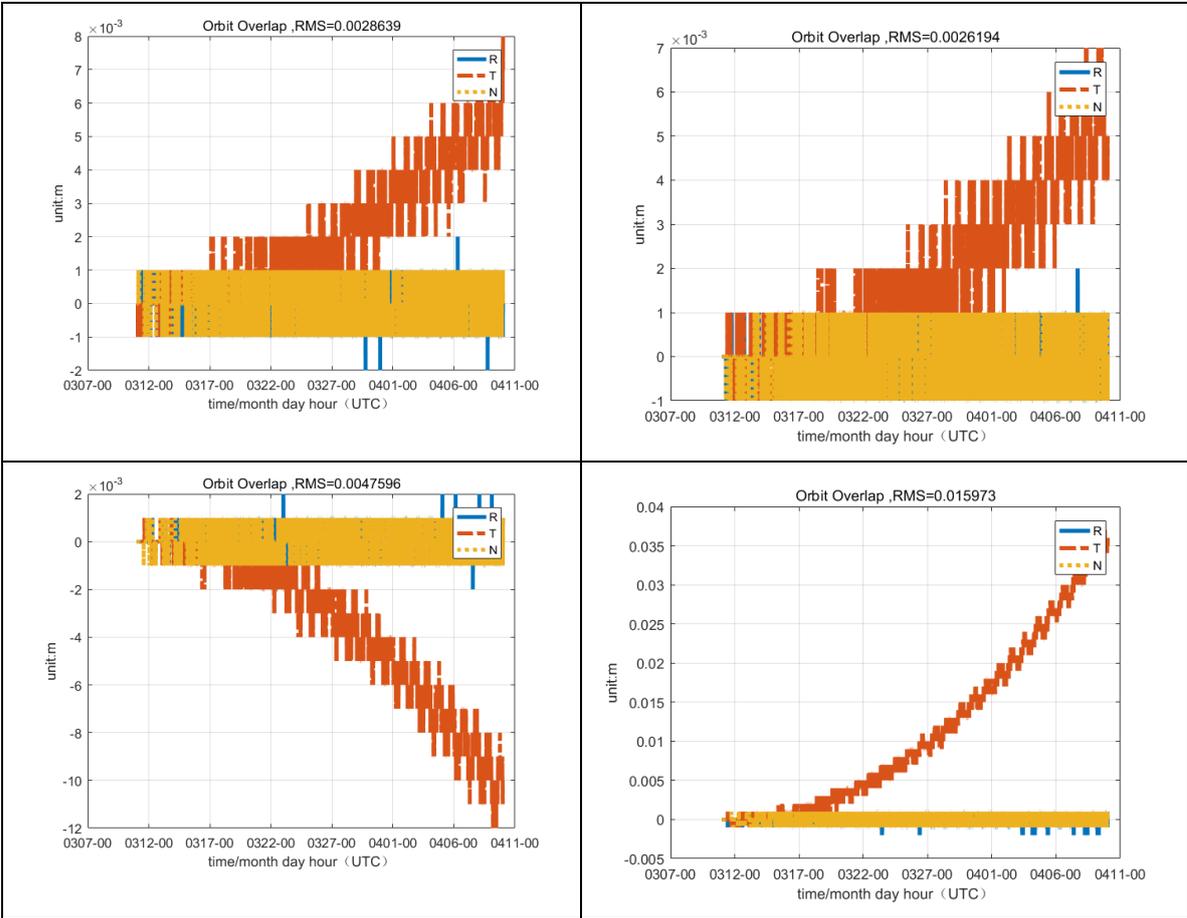


图 2.3.1.1 GRACE 模型 8 阶重力场和 10 阶重力场在 GEO 北斗导航卫星轨道计算的差异 (30 天)



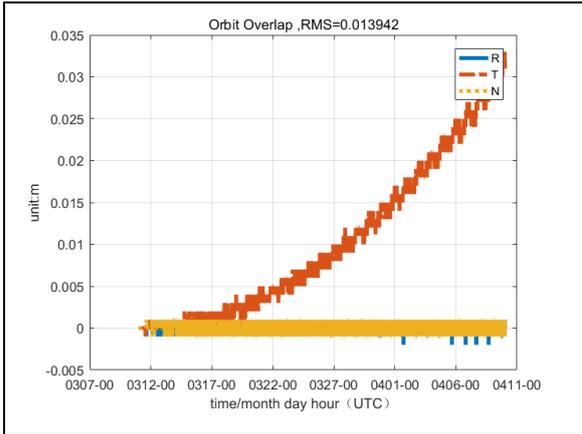


图 2.3.1.2 GRACE 8 阶重力场和 10 阶重力场在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (30 天)

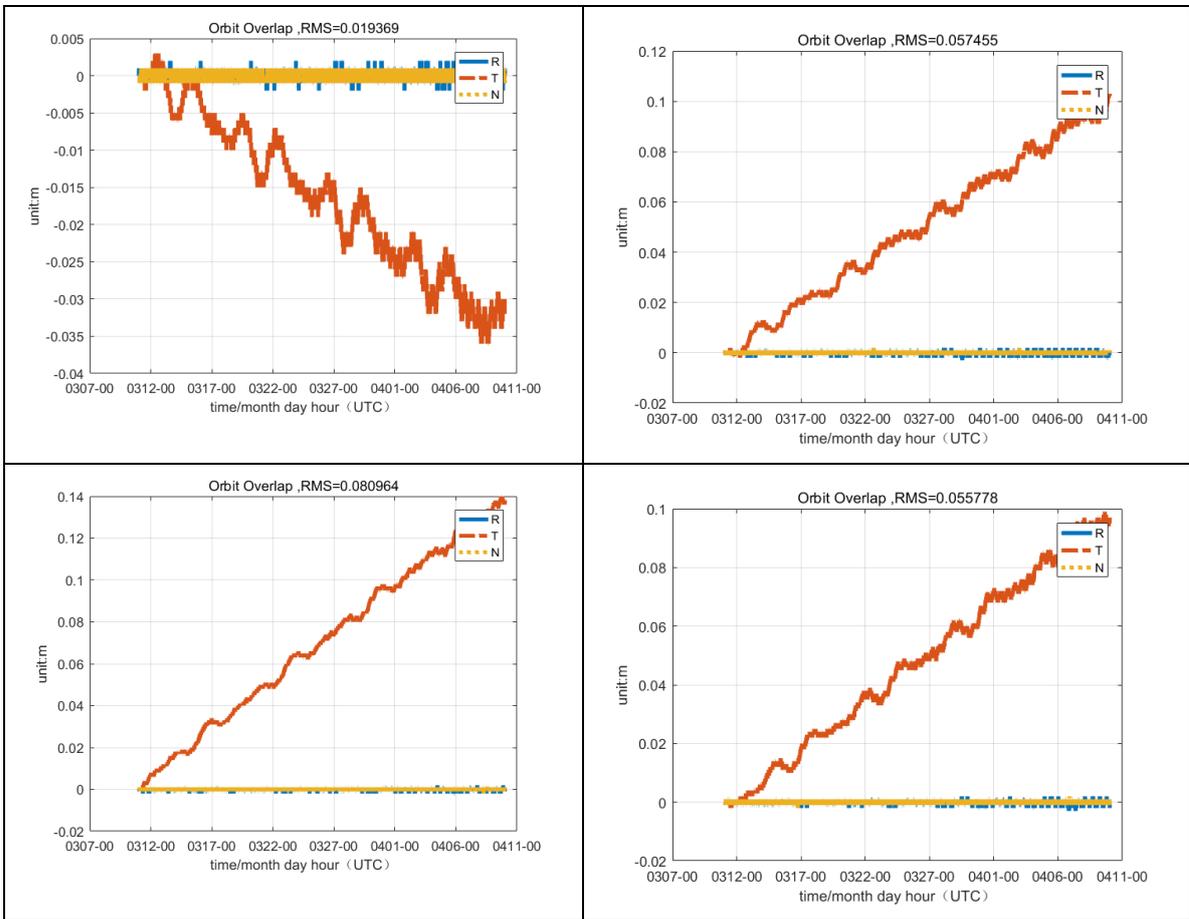


图 2.3.1.3 GRACE 8 阶重力场和 10 阶重力场在 IGS0 北斗导航卫星轨道计算的差异 (30 天)

表 13: GRACE 模型 10 阶重力场和 20 阶重力场在轨道计算中的差异统计 (30 天)

卫星型号	R(m)	T(m)	N(m)	3D(m)
C01	0.0004	0.0009	0.0001	0.001
C03	0.0003	0.0004	0.0001	0.0005
C04	0.0004	0.0015	0.0001	0.0016

C05	0.0004	0.0009	0.0001	0.001
C06	0.0003	0.0005	0.0004	0.0007
C07	0.0003	0.0004	0.0004	0.0006
C08	0.0002	0.0002	0.0002	0.0004
C09	0.0003	0.0004	0.0003	0.0005
C10	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003
C11	0.0005	0.0044	0.0005	0.0044
C12	0.0005	0.0063	0.0005	0.0064
C13	0.0004	0.0008	0.0004	0.0009
C14	0.0004	0.003	0.0004	0.003
MEAN	0.0003	0.0015	0.0003	0.0016

2.3.2 差异分析

目前，对于北斗卫星而言，比较主流的解算阶数为 8 阶，因此，从 8 阶开始进行对比。从表 13 上来看，8 阶和 10 阶 GRACE 重力场产生的 RMS 低于积分器的精度为 1mm，所以从一天的长度上来看，轨道是没有差异的。

对比 8 阶和 10 阶重力场，从 30 天的积分中来看，我们可以看到，对于 R 和 N 方向上的差异也低于 1mm，但是对于 T 方向上来看，其 RMS 随时间成正相关，其量级在厘米到分米之间（GEO 存在量级为分米的卫星）。因此 RMS 值基本等于 T 方向上的 RMS 值。对比不同轨道，我们发现

$$\text{RMS (GEO)} > \text{RMS (MEO)} > \text{RMS (IGSO)}$$

其原因从 2.3 的图可以看出，对于 MEO 卫星，其存在大量的振荡频率，而对于 GEO 而言，则很难看到这种成分，固可以认为对于 GEO 卫星而言，其非球形造成的摄动加速度应该不存在周期变化。固 MEO 和 IGSO 的振荡成分是由于和地球的较差转动而产生的。

分别选取 10 阶和 20 阶地球模型，由表 13 可以看出，在 30 天的积分中，对于 GEO 轨道，其差异为 1mm，对于 MEO 轨道，其差异可达到 6mm，对于 IGSO 卫星，其差异低于 1mm，此时。

$$\text{RMS (MEO)} > \text{RMS (GEO)} > \text{RMS (IGSO)}$$

3. 总结与讨论

3.1 总结

通过上述分析，我们可以知道对倍于北斗导航卫星而言由以下结论：

1. 由于选取不同 IERS 规范进行坐标系转化，北斗卫星轨道各向差异应满足 (51) 式，且

$$T_C(\text{GEO}) < T_C(\text{MEO}) < T_C(\text{IGSO})$$

$$A_{NC}(\text{MEO}) < A_{NC}(\text{IGSO}) < A_{NC}(\text{GEO})$$

故是稳定的，在很长的一段时间内不用担心因为积分长度过大会使轨道差异变大。因此，无论积分多久，当精度要求在 10 米以下时，需要考虑和明确是否采用 IERS1996 协议。若需求精度达到厘米的量级时，则需要明确采用的是 IERS2010 协议还是 IERS2003 协议。

2. 当使用低精度日月分析坐标代替 JPL 日月星历时，其差异因为积分时长和轨道半长径增加而增加，其中差异的主要贡献来自月球。当积分一天时，对于 GEO 和 IGSO 卫星，其轨道差异在 1m 的量级，对于 MEO 卫星，其轨道差异的量级为 1dm。当积分 30 天时，对于 GEO 和 IGSO 卫星，其轨道差异在 100m 的量级，对于 MEO 卫星，其轨道差异的量级为 10m。因此在用低精度日月坐标进行轨道积分时，在考虑精度之余，更需要考虑积分的长度。

3. 对于 GRACE 卫星重力场，轨道差异也跟积分时长有关，在积分 1 天时，选取 8 重力场阶就可以达到 1mm 的精度。对于 30 天的积分，若精度要达到米的范围，则需要考虑 10 阶重力场，若要求要达到 1mm，则需要考虑 20 阶重力场。

3.2 讨论

由于卫星数值轨道积分的复杂性，这些精细的差异很难通过数学的形式进行直观分析，因此，章节 2 中的图像不太可能通过数学推导得出。不过通过平均根数法的思想，确实可以把这些差异看成由长期项，长周期项，短周期项组合而成。不过尽管从轨道差异图中存在很多频率，但就如 GEO, MEO 的 w_{AC} 和与地球自转角速度的比例近似成 1: 1 和 1: 2 的关系一样，存在一定的物理意义。虽然其产生原因和其他许多频率的物理意义尚不清楚，但是如果将图中的频谱成分提取出来，与日月的一些周期项或者轨道的周期进行对比，或许会有一些有趣的发现。

对于重力场而言，若比较 EGM08 和 EIGEN_G_01 两种重力场文件，当取到 8 阶项时，其 RMS 在 3mm-7mm 之间，此时由重力场文件不同导致的误差已经大于由文件本身阶数产生的误差了，因此在 1 天的积分中，若要采用阶数大于 8 的地球重力场或者进行精度到毫米的北斗卫星轨道积分时，需要说明采用的地球重力场文件。

4. 参考文献

[1] Mueller, I.L, 1969, Spherical and Practical Astronomy as applied to Geodesy, F. Ungar Publishing Co., Inc.

[2] Aoki, S., Guinot, B., Kaplan, G. H., Kinoshita, H., McCarthy, D. D., and Seidelmann, P. K., 1982, "The New Definition of Universal Time," *Astron. Astrophys.*, 105, pp. 359–361.

[3] J. H., Lederle, T., Fricke, W., and Morando, B., 1977, "Expression for the Precession Quantities Based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants," *Astron. Astrophys.*, 58, pp. 1–16.

[4] Dennis D. McCarthy (ed.): IERS Conventions (1996). (IERS Technical Note ; 21) Paris: Central Bureau of IERS – Observatoire de Paris, 1996. [ii], ii, 97 p.

[5] IERS Conventions (2003). Dennis D. McCarthy and Gérard Petit. (IERS Technical Note ; 32) Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2004. 127 pp., paperback, ISBN 3-89888-884-3

[6] IERS Conventions (2010). Gérard Petit and Brian Luzum (eds.). (IERS Technical Note ; 36) Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010. 179 pp., ISBN 3-89888-989-6

- [7] 马高峰, 马国强, 张捍卫. GCRS 与 ITRS 的两种坐标转换模型计算与比较. 测绘科学技术学报, 2016 Vol. 33 No. 3.
- [8] LEI W W, LI K, ZHANG H W. Improvement and comparison of empirical formula for conversion between universal time and terrestrial time [J]. Journal of Spacecraft TT & C Technology, 2015, 34(6) : 552-557.
- [9] 黄海, 李健文, 韩雪峰, 罗璠, 李晨 行星位置算法对卫星轨道预报的影响. GNSS World of China, Vol. 38 No. 4 August, 2013
- [10] Oliver Montenbruck, Eberhad Gill. Satellite Orbits Models, Methods and Applications.
- [11] van Flandern T. C Pulkkinen K. F; low precision formulae for planetary positions; Astrophysical Journal Supplement Series 41, 391 (1979).
- [12] Oliver Montenbruck. ; Practical ephemeris Calculations Springer; Springer Verlag, Heideberg (1989).
- [13] Oliver Montenbruck., Pfleger T. ; Astronomy on the personal Computer, Springer Verlag, Heidelberg; 4th edition (2000).
- [14] Milani A., Nobili AM., Farinella P. ; Non-gravitational perturbations and satellite geodesy; Adam Hilger, Bristol (1987).
- [15] Cunningham L. E. ; On the Computation of the Spherical

Harmonic Terms needed during the Numerical Integration of the
Orbital Motion of an Artificial Satellite; *Celestial Mechanics*
2, 207–216 (1970).

5. 致谢

这项工作是在 17 年暑期上海天文台开始的，当时参与了上海天文台的暑期实习。论文也是暑期实习的延续，因此非常感谢上海天文台提供的实习机会，也同时非常感谢学院在暑期支持我在上海天文台实习。

这项工作由上海天文台宋叶志老师提议，并且工作中许多参考书籍，程序都是他提供的。在工作中遇到困难时，他会非常细心和耐心的指导，这项工作的完成离不开宋叶志老师的帮助。在此表示诚挚的谢意。

大学四年的科研能力，是由本科的学术指导老师李川细心栽培的。而且在选择校外做毕业设计时，李川老师给予了巨大的支持，在此非常感谢李川老师的教导与支持。

同时，工作中遇到一些问题时，我会询问上海天文台的学长学姐，也会和学院同学讨论，因此非常感谢他们在工作提供的帮助。