

空间飞行器轨道确定的 B 样条逼近方法*

宋叶志^{1†} 黄 勇¹ 胡小工¹ 李培佳¹ 曹建峰^{1,2}

(1 中国科学院上海天文台 上海 200030)

(2 北京航天飞行控制中心 北京 100094)

摘要 动力学定轨是空间飞行器精密轨道确定的基本方法. 然而, 有些情况下, 对飞行器进行精确的力学建模是困难的. 基于函数逼近理论, 给出了 B 样条逼近空间飞行器统计意义下的轨道确定方法. 为了验证方法的有效性, 分别对 LEO (Low Earth Orbit)、MEO (Medium Earth Orbit) 和 HEO (Highly Eccentric Orbit) 卫星进行了轨道确定数值试验, 计算结果证实方法精度可靠、解算稳定. B 样条逼近轨道确定方法与坐标系的选择无关, 既可以在协议天球坐标系下解算, 又可以在协议地球坐标系下解算. B 样条逼近可以直接计算飞行器位置和速度, 不需要对动力学状态方程进行积分, 也不需要计算状态转移矩阵, 使得定轨计算量相对于动力学定轨大幅减少. 方法既有一定的理论意义, 又可以作为工程应用中空间飞行器轨道确定的一个常规算法.

关键词 航天器, 天体力学: 轨道计算和定轨, 方法: 数值

中图分类号: P 136; **文献标识码:** A

1 引言

在空间飞行器轨道确定中, 状态方程与测量方程可以用以下系统描述:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \\ \mathbf{Y}_i = \mathbf{G}(\mathbf{X}_i, t_i) + \varepsilon_i \end{cases}, \quad (1)$$

其中 \mathbf{X} 为飞行器轨道状态量, \mathbf{Y} 为观测量, ε 为测量噪声. 由于线性估计理论较为成熟, 所以轨道确定中通常对以上系统进行线性化处理. 定轨中有两个矩阵的计算甚为重要, 分别为观测量对状态量的偏导数矩阵 $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}}$ 和状态转移矩阵 $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}_0}$. 为获得状态转移矩阵, 一般的做法是对变分方程

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t, t_0) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t)}{\partial \mathbf{X}(t)} \Phi(t, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}_n \end{cases} \quad (2)$$

进行数值积分^{[1]3-5[2-5]}. 其中 t_0 为初始历元, Φ 为状态转移矩阵, \mathbf{I} 为单位矩阵. 如果飞行器是卫星, 且定轨弧段不太长, 可以用近似解析公式, 在文献 [4]、[6] 中做了详

2012-07-27 收到原稿, 2012-12-17 收到修改稿

* 国家自然科学基金项目 (11073047, 11173049)、863 项目 (2012AA121603)、上海市导航实验室开放课题 (Y224353002)、上海市科学技术委员会 (06DZ22101)、中国科学院行星科学重点实验室资助

† syz@shao.ac.cn

细的讨论. 无论采用何种近似方法计算状态转移矩阵, 只有当映射 (这里为观测量对状态量的偏导数矩阵与状态转移矩阵的乘积) 是压缩映射时, 才会收敛.

在定轨过程中, 状态量的积分与状态转移矩阵的计算通常情况下是无法避免的, 而这两部分恰恰是定轨过程中运算量较大的部分. 虽然, 一定情况下可以简化状态转移矩阵的计算, 如采用差分方法或者前面提到的解析近似, 但本质上都利用了积分 (无论是解析的还是数值的) 的结果. 动力学批处理方法轨道确定的必要条件是能够较为准确地对飞行器轨道力学进行建模, 并且数值积分的方法是较为可靠的 (现代计算方法的发展使得这一条在一定弧段内已经不是问题). 以上两条, 如果有一条背离真实情况较为严重的话, 就有可能引起定轨失败.

而在根据无线电外弹道测量确定飞行器运动状态的实践中, 经常会遇到对飞行器主要作用力不知或知道不准确的情况, 这时动力学方法将会无法进行轨道确定. 如深空探测器的着落部分, 传感器要频繁测量着落面信息并反馈信号, 进行变轨控制. 这样的弧段是测控中的关键节点, 其运动状态的确定至关重要, 对其方法做深入研究也就很有必要. 以往做法是在变轨前后分别用动力学定轨, 变轨期间用多项式拟合轨道^[7], 最后进行拼接. 众所周知, 多项式只能适合于短的弧段, 对于长弧段, 多项式不能做到有效逼近.

描述一般的飞行器轨道力学微分方程, 其力函数 $F(\mathbf{X}, t)$ 在矩形区域 Γ 上是 C^1 的 (飞行器进出地影时也满足), 并且 $F(\mathbf{X}, t)$ 对于状态量 \mathbf{X} 满足 Lipschitz 条件, 则微分方程的解存在且唯一^[8-9]. 然而, Joseph Liouville 的工作表明, 许多微分方程不能求得显式解, 即难以给出显式表达式 $\mathbf{X}_t = \phi(\mathbf{X}_0, t_0, t, \boldsymbol{\mu})$, 其中 $\boldsymbol{\mu}$ 为参数向量.

微分方程的解构成了相空间到自身的映射 $g^t: R^6 \rightarrow R^6$, 映射 g^t 构成相空间微分同胚的一个单参数群, 此映射族 g^t 也称伴随于飞行器动力学方程的相流. 虽然给不出方程解的显式表达式, 但是解是存在的, 可以绕过力学分析, 用函数逼近论的方法, 直接逼近微分方程的解, 这也构成了本文的基本思想.

2 轨道确定的 B 样条逼近方法

2.1 B 样条函数介绍

近几十年, 函数逼近在理论研究与实际应用中均取得重大进展, 其中样条函数的研究就是其中十分活跃的一个分支. 样条理论中 B 样条以其优美的理论和数值计算中的典型性著称. B 样条目前已经成为计算机辅助几何设计中的基本工具, 广泛应用于车辆、舰船、航空飞行器等外形设计. B 样条为自由曲线、曲面提供了统一的数学方法.

早期将样条逼近方法应用于航天测控系统中, 可能源于一些靶场试验, 在外测数据事后处理中用样条逼近导弹弹道. 对此, 我国学者已经把这一理论应用在工程中^[10].

有很多方法可以用来定义 B 样条基, 这里给出递推定义方法. 给定参数 u 轴的一个划分 $U: \{u_i\}_{i=-\infty}^{+\infty} (u_i \leq u_{i+1}, i = 0, \pm 1, \dots)$. 用下列递推方式所确定的函数 $N_{i,p}(u)$ 称为

对应于划分 U 的 p 次 (即 $p+1$ 阶) B 样条基

$$\begin{cases} N_{i,p}(u) = \begin{cases} 1, u \in [u_i, u_{i+1}) \\ 0, \text{otherwise} \end{cases}, \\ N_{i,p}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u), p \geq 2 \end{cases}, \quad (3)$$

以上公式中如果出现 $\frac{0}{0}$, 规定 $\frac{0}{0} = 0$, 其中 $[u_i, u_{i+1})$ 为节点区间, 其长度可以为零, 即允许节点是重复的. 对于等距节点样条, 也可以按照如下方式定义^{[11]315-331}. 记

$$u_+^m = \begin{cases} u^m, (u \geq 0) \\ 0, (u < 0) \end{cases}, \quad (4)$$

称为 m 次半截单项式, 其中 $m = 1, 2, \dots$, 并规定

$$u_+^0 = \begin{cases} 1, (u > 0) \\ \frac{1}{2}, (u = 0) \\ 0, (u < 0) \end{cases}. \quad (5)$$

设 B_k 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数,

$$B_k = \frac{\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{k+1}{j} (x + \frac{k+1}{2} - j)_+^k}{k!} \quad (6)$$

称之为 k 次基样条或 B 样条. 如

$$B_3 = \begin{cases} 0, & |x| \geq 2 \\ \frac{1}{2}|x|^3 - x^2 + \frac{2}{3}, & |x| \leq 1 \\ -\frac{1}{6}|x|^3 + x^2 - 2|x| + \frac{4}{3}, & 1 < |x| < 2 \end{cases}, \quad (7)$$

以 $B(\tau)$ 记为 3 阶标准 B 样条, 若样本数据处理区间为 $[T_2, T_{P-1}]$, 记

$$\begin{cases} h = \frac{(T_{P-1}-T_2)}{P-3} \\ s(t) = \sum_{j=1}^P b_j B\left(\frac{t-T_j}{h}\right), T_j = T_2 + (j-2)h, \end{cases} \quad (8)$$

其中 P 表示区间分段数, h 表示区间长度,

$$\begin{cases} T_1 = T_2 - h \\ T_P = T_2 + (P-2)h = T_{P-1} + h \end{cases}. \quad (9)$$

实际应用时, 也可以选择一些 B 样条的拓展函数逼近方法, 如非均匀有理 B 样条等. 文献 [12]、[13] 中, 给出了样条基的高效计算方法, 并对样条理论做了深入分析.

2.2 轨道确定的 B 样条逼近方法

这里不对一般的逼近形式展开, 就对本文采用的 B 样条方法进行讨论, 可以自然地推广到其他逼近形式的轨道确定情形.

采用 B 样条逼近方法, 则对飞行器状态逼近形式为

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{j=1}^P \alpha_j B\left(\frac{t-T_j}{h}\right) \\ y(t) = \sum_{j=1}^P \beta_j B\left(\frac{t-T_j}{h}\right) \\ z(t) = \sum_{j=1}^P \gamma_j B\left(\frac{t-T_j}{h}\right) \end{cases}, \begin{cases} h = \frac{T_{P-1}-T_2}{P-3} \\ T_j = T_2 + (j-2)h \end{cases}, \quad (10)$$

定轨线性化方程为

$$\mathbf{O} - \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Xi \\ \Theta \end{bmatrix} \Delta \psi, \quad (11)$$

其中 $\psi = [\alpha_1, \dots, \alpha_P, \beta_1, \dots, \beta_P, \gamma_1, \dots, \gamma_P]^T$ 为待估参数, $\Delta \psi$ 为参数改正量. Ξ 为参数到位置向量的线性映射矩阵, \mathbf{O} 为观测量, \mathbf{C} 为观测量理论值. 可以看到, 这里并不是非线性关系, 而是直截了当的线性问题. Θ 为参数到速度向量的线性映射矩阵.

进一步地, 定轨方程 (11) 的非线性仅仅是由于观测量对状态量的非线性引起的, 如果观测量是状态量的线性组合, 则整个定轨过程都是线性问题, 不需要进行迭代求解.

下面给出矩阵的具体形式, 其形式非常简单. 记以下向量

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = \left[B\left(\frac{t_1-T_1}{h}\right) \quad B\left(\frac{t_1-T_2}{h}\right) \quad \dots \quad B\left(\frac{t_1-T_P}{h}\right) \right] \\ \mathbf{B}_2 = \left[B\left(\frac{t_2-T_1}{h}\right) \quad B\left(\frac{t_2-T_2}{h}\right) \quad \dots \quad B\left(\frac{t_2-T_P}{h}\right) \right] \\ \vdots \\ \mathbf{B}_m = \left[B\left(\frac{t_m-T_1}{h}\right) \quad B\left(\frac{t_m-T_2}{h}\right) \quad \dots \quad B\left(\frac{t_m-T_P}{h}\right) \right] \end{cases}, \quad (12)$$

则

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{B}_m & \mathbf{B}_m & \mathbf{B}_m \end{bmatrix}. \quad (13)$$

在有些情况下, 资料也可能是速度的函数, 如瞬时多普勒资料. 这时候不宜采用数值微分的方法计算速度理论值. 而是直接采用样条本身计算与速度相关的变量. 下面介绍速度的表达形式.

对于以上 B 样条, 速度分量为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{j=1}^P \frac{\alpha_j \dot{B}(\frac{t-T_j}{h})}{h} \\ \dot{y}(t) = \sum_{j=1}^P \frac{\beta_j \dot{B}(\frac{t-T_j}{h})}{h} \\ \dot{z}(t) = \sum_{j=1}^P \frac{\gamma_j \dot{B}(\frac{t-T_j}{h})}{h} \end{cases}, \quad (14)$$

其中

$$\dot{B} = \begin{cases} 0, & |x| \geq 2 \\ \frac{3}{2}|x|^2 \times \kappa - 2x, & |x| < 1 \\ -\frac{1}{2}|x|^2 \times \kappa + 2x - 2 \times \kappa, & 1 \leq |x| < 2 \end{cases},$$

$$\kappa = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}.$$

记

$$\begin{cases} \dot{B}_1 = \left[\dot{B}(\frac{t_1-T_1}{h}) \quad \dot{B}(\frac{t_1-T_2}{h}) \quad \dots \quad \dot{B}(\frac{t_1-T_P}{h}) \right] \\ \dot{B}_2 = \left[\dot{B}(\frac{t_2-T_1}{h}) \quad \dot{B}(\frac{t_2-T_2}{h}) \quad \dots \quad \dot{B}(\frac{t_2-T_P}{h}) \right] \\ \vdots \\ \dot{B}_m = \left[\dot{B}(\frac{t_m-T_1}{h}) \quad \dot{B}(\frac{t_m-T_2}{h}) \quad \dots \quad \dot{B}(\frac{t_m-T_P}{h}) \right] \end{cases}, \quad (15)$$

则参数到速度向量的映射矩阵为 (可以理解为速度关于参数的偏导数矩阵, 实际为线性关系)

$$\Theta = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \dot{B}_1 & \dot{B}_1 & \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 & \dot{B}_2 & \dot{B}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dot{B}_m & \dot{B}_m & \dot{B}_m \end{bmatrix}. \quad (16)$$

至此, 已经给出了 B 样条逼近方法定轨的完整公式.

2.3 动力学约束轨道估计

前面已经给出了 B 样条逼近轨道的定轨方法. 纯粹的 B 样条逼近方法, 并未利用轨道的力学信息, 从某种意义上而言是信息的丢失. 如果测量数据较少, 则采用 B 样条逼近方法解算效果可能不一定会理想. 这时候可以采用飞行器动力学对轨道进行约束.

若已知飞行器 t_k 时刻满足力学方程

$$\ddot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{f}(\mathbf{X}_k, t_k), \quad (17)$$

其中 \mathbf{r} 为飞行器位置. 记

$$\ddot{B}_k = \left[\ddot{B}(\frac{t_k-T_1}{h}) \quad \ddot{B}(\frac{t_k-T_2}{h}) \quad \dots \quad \ddot{B}(\frac{t_k-T_P}{h}) \right], \quad (18)$$

其中, $\ddot{B}(x)$ 可以由 $\dot{B}(x)$ 求 1 阶导数得到. 由此定义

$$\mathbf{H}_k = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \ddot{B}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddot{B}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddot{B}_k \end{bmatrix}, \quad (19)$$

则飞行器动力学方程可以表示为

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \ddot{B}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddot{B}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddot{B}_k \end{bmatrix} \psi = \begin{bmatrix} f_x(\mathbf{X}_k, t_k) \\ f_y(\mathbf{X}_k, t_k) \\ f_z(\mathbf{X}_k, t_k) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

即

$$\mathbf{H}_k \psi = \mathbf{f}_k(\mathbf{X}_k, t_k). \quad (21)$$

如此, 飞行器轨道的力学约束由微分方程转化为代数方程. 在方程 (21) 中, 由于力是关于状态量的非线性函数, 所以该方程仍然是非线性方程. 然而, 在参数解算时, 由于测量方程是非线性的, 通常需要迭代求解, 故而可以把以上方程与测量方程同步迭代. 即方程在参数估计时, 只要把方程左边当成线性函数, 而右边则由当次迭代参数估值给出力函数值.

记

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (22)$$

现在欲求约束条件下最小二乘解问题

$$\min \left\| \mathbf{O} - \mathbf{C} - \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \right] \begin{bmatrix} \Xi \\ \Theta \end{bmatrix} \Delta \psi \right\|_{\mathbf{H} \psi = \mathbf{f}}^2,$$

可以采用拉格朗日乘子法将约束优化问题转为无约束优化问题. 这里略去推导, 直接给出结论

$$\begin{bmatrix} \left[\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \right] \begin{bmatrix} \Xi \\ \Theta \end{bmatrix} \right]^T \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \psi \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \right] \begin{bmatrix} \Xi \\ \Theta \end{bmatrix} \right]^T \\ \mathbf{O} - \mathbf{C} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

λ 为约束乘子向量. 以上已经为适定方程, 方程系数为对称正定, 可以采用 Cholesky 分解^{[11]36-40}方法进行解算.

在以上方法中, 默认飞行器在给定时刻约束条件的力学建模是精确的. 可以看到, 在这一过程中, 随着约束的增加, 要求解算的方程的维数也在变大, 这对计算提出了更高的要求. 这里可以采用另一种思路: 承认飞行器力学建模是存在一定误差的 (事实也是

如此), 对约束误差进行评估, 最终与测量数据一起平差. 这里略去推导, 直接给出最终平差公式

$$\left\{ \sum_{l=1} \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \end{bmatrix}_l \begin{bmatrix} \Xi \\ \Theta \end{bmatrix}_l \right]^T \mathbf{R}_l^{-1} \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \end{bmatrix}_l \begin{bmatrix} \Xi \\ \Theta \end{bmatrix}_l \right] + \sum_{k=1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{H}_k^T \right\} \Delta \psi$$

$$= \sum_{l=1} \left[\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \\ \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} \end{bmatrix}_l \begin{bmatrix} \Xi \\ \Theta \end{bmatrix}_l \right]^T \mathbf{R}_l^{-1} [\mathbf{O}_l - \mathbf{C}_l] + \sum_{k=1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{Q}_k^{-1} \mathbf{f}_k, \quad (24)$$

上式中 \mathbf{R}_l^{-1} 为测量资料的协方差阵, \mathbf{Q}_k^{-1} 为约束的轨道噪声协方差阵. 采用后一种思路, 其方程维数与无约束情况相同, 计算量较小且程序设计方便.

需要说明的是, 在解算方程 (24) 时, 应先用方程 (11) 获得参数的初始估值, 进一步用方程 (24) 进行平差. 在利用轨道力学约束时, 其对力学条件的要求比动力学方法定轨要低. 后者要求整个弧段力学都是明确的, 而这里仅仅需要知道部分时刻的力学状态.

3 计算验证

3.1 LEO 卫星轨道确定算例

为了验证 B 样条逼近轨道确定方法的有效性, 本文分别对 LEO 卫星、MEO 卫星及 HEO 卫星进行了轨道解算. 历元 2012-07-01T12:00:00.000 的初始开普勒轨道根数为: $a = 7717.377350$ km, $e = 0.001285$, $i = 62.336^\circ$, $\Omega = 285.635^\circ$, $\omega = 123.601^\circ$, $M = 205.151^\circ$.

这里轨道计算采用 KSG (Krogh-Shampine-Gordon) 积分器, 该积分器是对 Adams-Cowell 积分器的改进, 直接解算 2 阶微分方程组, 是目前人卫轨道计算中常用的高精度积分器之一, 文献 [1]246-250、[6] 对积分器的构造做了较为详细的阐述.

轨道外推中考虑摄动力有: (1) 地球非球形引力摄动, (2) 大气摄动, (3) 日、月质点引力摄动, (4) 光压摄动, (5) 固体潮、海潮摄动, (6) 广义相对论效应.

为简单起见, 观测量就取 X 、 Y 、 Z , 数据采样为 2 s 每个点, 测量噪声取标准差为 10 cm 的高斯分布噪声. $P = 30$ 时, 定轨结果与标称轨道比较如图 1 所示. R 、 T 、 N 分别表示径向、切向和法向. 为了比较不同节点数的 B 样条逼近性能, 图 2 给出了 $P = 20$ 时的定轨结果.

3.2 MEO 卫星轨道确定算例

MEO 卫星在历元 2012-07-01T12:00:00.000 的初始开普勒轨道根数为: $a = 26781.970665$ km, $e = 0.00725$, $i = 62.336^\circ$, $\Omega = 207.672^\circ$, $\omega = 180.658^\circ$, $M = 316.319^\circ$. 考虑的摄动力有: (1) 地球非球形引力摄动, (2) 光压摄动, (3) 日、月引力摄动, (4) 固体潮与海潮摄动, (5) 广义相对论效应.

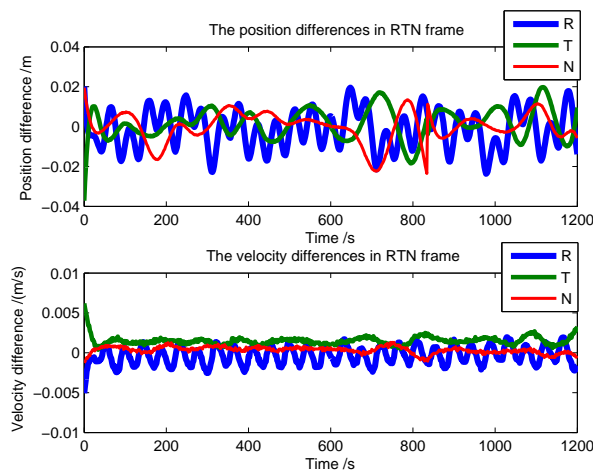


图 1 LEO 卫星轨道解算在 RTN 框架的误差 ($P = 30$)

Fig.1 The calculated orbital errors of LEO satellites in RTN frame ($P = 30$)

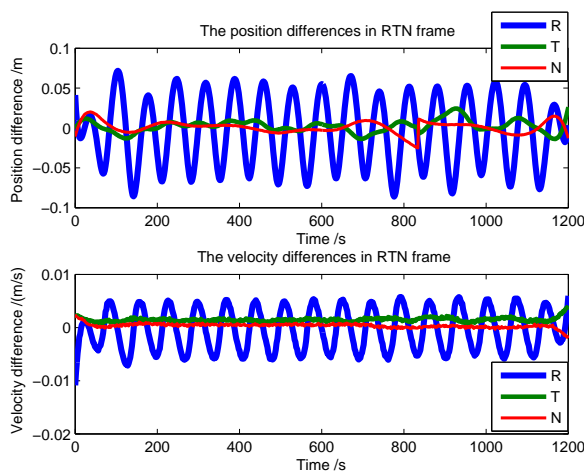


图 2 LEO 卫星轨道解算在 RTN 框架的误差 ($P = 20$)

Fig.2 The calculated orbital errors of LEO satellites in RTN frame ($P = 20$)

MEO 试验卫星测量资料采样间隔及噪声与低轨卫星相同。 $P = 30$ 时, 定轨结果如图 3 所示。图 4 给出了 $P = 20$ 时的定轨结果。可以看出, 对于 MEO 卫星而言, 由于地球非球形引力摄动量级减小, 轨道摄动的高频信号较低轨卫星弱, 周期项没有低轨卫星明显。理论上而言, 节点数越多越能更好地逼近轨道, 但实际应用时, 需要在测量资料与轨道变化幅度等因素之间权衡考虑。如算例中, 对于低轨卫星, 节点数多的情况逼近效果要优于节点数少的情况。而对于 MEO 卫星, 由于轨道变化高频信号幅度比低轨卫星弱, 所以增加节点数未必能提高轨道的逼近性能。

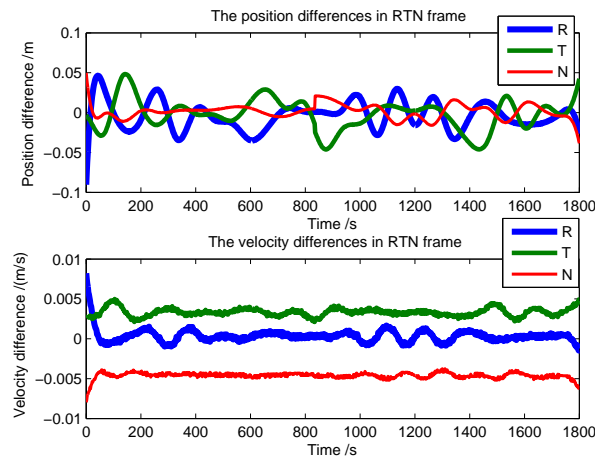


图 3 MEO 卫星轨道解算在 RTN 框架的误差 ($P = 30$)

Fig. 3 The calculated orbital errors of MEO satellites in RTN frame ($P = 30$)

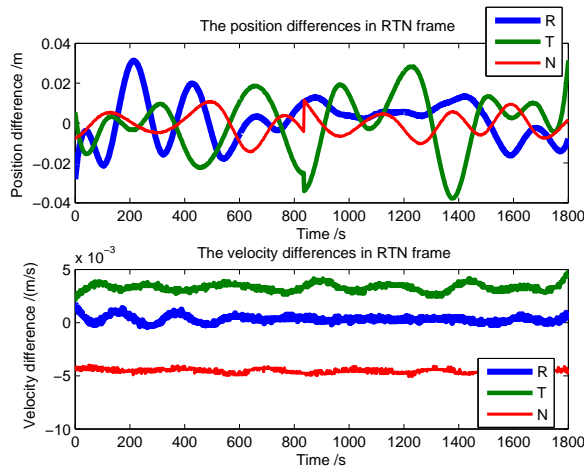


图 4 MEO 卫星轨道解算在 RTN 框架的误差 ($P = 20$)

Fig. 4 The calculated orbital errors of MEO satellites in RTN frame ($P = 20$)

3.3 HEO 卫星轨道确定算例

前面两个算例都是针对小偏心率轨道, 这里对较大偏心率的轨道进行了解算. 历元 2012-07-01T12:00:00.000 的初始开普勒轨道根数为: $a = 27907.356436$ km, $e = 0.4$, $i = 75.967^\circ$, $\Omega = 61.359^\circ$, $\omega = 131.577^\circ$, $M = 306.077^\circ$. 噪声与采样率与前两个算例相同, 这里取 $P = 24$, 定轨结果如图 5 所示. 由于函数逼近方式是对飞行器位置和速度直接进行逼近, 所以与轨道类型无特别大的关系, 此算例也证实了这一点.

至此, 给出了 3 个有一定代表性类型轨道的解算情况. 解算结果证实了采用 B 样条

逼近方法可以实现对飞行器轨道确定, 在一定程度上可以说明方法的有效性.

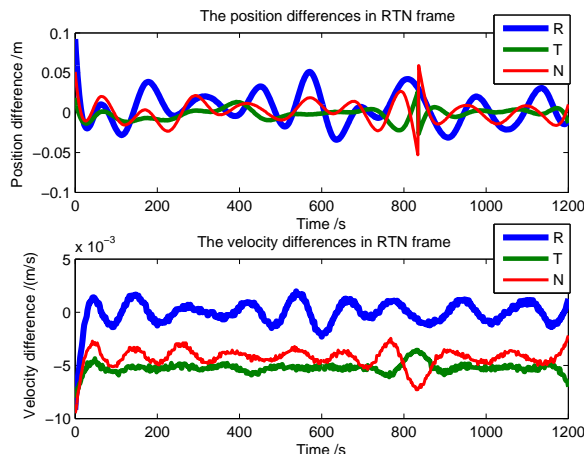


图 5 HEO 卫星轨道解算在 RTN 框架的误差 ($P = 24$)

Fig. 5 The calculated orbital errors of HEO satellites in RTN frame ($P = 24$)

4 结论与探讨

由理论和算例分析, 初步得出采用 B 样条逼近轨道的一些优点如下:

(1) 在轨道机动较为频繁的情况下, 有时甚至无从知道何时变轨的情况下, 动力学方法难以建模, B 样条逼近方法轨道确定则很容易处理.

(2) 与坐标系的选择无关. 以地球导航卫星为例, 通常用户只关心地固坐标系下的星历, 采用 B 样条逼近方法可以直接在地固坐标系下进行轨道确定. 不同坐标系下, 轨道形式完全一样, 仅仅是系数不同.

(3) B 样条逼近方法既适合环绕轨道确定也适合转移轨道确定. 如地球卫星再入返回时, 从低轨到高轨段、过渡段、再入段, 可以实现不间断弹道确定. 当然, 在这种情况下, 本文介绍的 B 样条逼近方法能否满足工程精度、实时性等需求, 需要进一步的研究.

(4) 可以与动力学方法相互验证, 互为备份.

(5) 由于函数逼近可以直接计算飞行器位置及其速度, 不需要对状态量进行轨道积分, 也不需要计算状态转移矩阵, 所以轨道确定程序极大简化, 运算量也大幅降低. 在星载轨道确定中计算资源较为紧张, 如果能减少计算负担, 显然是有意义的.

(6) B 样条逼近对初轨无特别要求. 如因某些原因没有初轨, 动力学方法难以实现轨道确定, 而采用 B 样条逼近方法可以快速直接确定轨道. 通过对地球卫星和月球卫星多次定轨试验表明, 即便初始参数全部取零, 也未出现解算不收敛的情况.

本文也有以下一些局限性与不足:

(1) 既然是非动力学方法, 就失去了轨道力学本身的意义, 文中的方法不能用于轨道外推. 这也说明, 数学技巧的使用在一定条件下对工程和理论都是有益的, 但并不能代

替轨道力学研究本身. 这是需要注意的.

(2) 本文采用的资料类型较为简单, 这就使得观测量相对于状态量的偏导数矩阵退化为单位阵. 实际工程中, 往往观测量并不是状态量的线性组合, 这就要求观测量关于状态量偏导数的矩阵, 该过程并无原则上的困难, 不妨碍本文方法的讨论.

顺便提及一下, 近些年由于测量技术的发展, 使得一些飞行器能够在—个时刻获得较为充足的测量数据, 可以直接对飞行器进行定位, 进而拟合出轨迹, 有学者称为运动学定轨. 但是本文的方法与之有一些基本的区别, 表现为:

(1) 运动学轨迹确定是对飞行器各点进行定位, 忽略了飞行器轨道本身之间的内在联系.

(2) 运动学轨迹确定要求—次的观测量较为充足, 否则不能实现定位, 也无法确定最终轨迹. 这一要求, 在有些情况下是较难满足的. 而文中的数值逼近方法即便是一次只有一个测距资料, 同样可以实现飞行器轨道确定.

为了验证 B 样条方法对轨道的逼近性能, 我们还把该方法应用到月球探测器着落段轨道确定中, 分别对 VLBI (甚长基线干涉)、USB (统一 S 频段雷达系统) 等类型的测量数据进行定轨, 都显示了较好的稳健性.

近几十年定轨方法本身并无太大变化. 然而, 随着国内外航天技术的发展, 测控要求、条件的多样化, 许多新的问题开始出现, 这就需要有合适的方法以应对不同的情形. 就本文而言, 除了样条之外, 神经网络与 SVM (Support Vector Machine) 体系^[14]等都是函数逼近的有效手段, 将其引入到轨道确定中, 以应对经典方法不易处理的问题, 许多工作有待进一步展开.

致谢 感谢审稿人对本文提出的宝贵意见.

参 考 文 献

- [1] 李济生. 人造卫星精密轨道确定. 北京: 解放军出版社, 1995
- [2] Long A C, Cappellari J O, Velez C E, et al. Goddard Trajectory Determination System. Goddard Space Flight Center, 1989: 42-45
- [3] Tapley B D, Schutz B E, Born G H. Statistical Orbit Determination. London: Elsevier Academic Press, 2004: 159-167
- [4] Montenbruck O, Gill E. Satellite Orbits Models, Methods, and Applications. Berlin: Springer, 2000: 234-242
- [5] Milant A, Gronchi G F. Theory of Orbit Determination. New York: Cambridge University Press, 2009: 18-20
- [6] 刘林. 人造地球卫星精密定轨. 南京: 南京大学天文系讲义, 2005: 26-28
- [7] 李培佳, 胡小工, 黄勇, 等. 天文学进展, 2009, 28: 290
- [8] Arnold V I. 常微分方程. 沈家骥, 周宝熙, 卢亭鹤, 译. 北京: 科学出版社, 2001: 219-231
- [9] 列夫·庞特里亚金. 常微分方程. 林武忠, 倪明康, 译. 北京: 高等教育出版社, 2006: 130-140
- [10] 刘利生. 外弹道测量数据处理. 北京: 国防工业出版社, 2002: 431-435
- [11] 宋叶志, 茅永兴, 赵秀杰. Fortran 95/2003 科学计算与工程. 北京: 清华大学出版社, 2011
- [12] Piegl L, Tiller W. The NURBS Book. Berlin: Springer, 1997: 47-78
- [13] Farin G. Curves and Surfaces for CAGD. 5th ed. San Francisco: Academic Press, 2002: 119-176
- [14] 宋叶志, 胡小工, 黄勇, 等. 飞行器测控学报, 2012, 31: 80-85

Spacecraft Orbit Determination with B Spline Approximation Method

SONG Ye-zhi¹ HUANG Yong¹ HU Xiao-gong¹ LI Pei-jia¹ CAO Jian-feng^{1,2}

(1 *Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030*)

(2 *Beijing Aerospace Flight and Control Center, Beijing 100094*)

ABSTRACT It is known that the dynamical orbit determination is the most common way to get the precise orbit of spacecraft. However, it is hard to describe the precise orbit of spacecraft sometimes. In order to solve this problem, the technique of the orbit determination with the B spline approximation method based on the theory of function approximation is presented in this article. Several simulation cases of the orbit determination including LEO (Low Earth Orbit), MEO (Medium Earth Orbit), and HEO (Highly Eccentric Orbit) satellites are performed, and it is shown that the accuracy of this method is reliable and stable. The approach can be performed in the conventional celestial coordinate system and conventional terrestrial coordinate system. The spacecraft's position and velocity can be calculated directly with the B spline approximation method, which means that it is unnecessary to integrate the dynamics equations and variational equations. In that case, it makes the calculation amount of orbit determination reduce substantially relative to the dynamical orbit determination method. The technique not only has a certain theoretical significance, but also can be as a conventional algorithm in the spacecraft orbit determination.

Key words spacecraft, celestial mechanics: orbit calculation and determination, methods: numerical