

# 中国科学技术大学

# 硕士学位论文



## 小行星撞击监测分析方法的研究

作者姓名： 郑航

学科专业： 天体物理

导师姓名： 朱青峰 副教授 宋叶志 高级工程师

完成时间： 二〇二四年三月十日



University of Science and Technology of China  
A dissertation for master's degree



# Research on analysis methods for asteroid impact monitoring

Author: Hang Zheng

Speciality: Astrophysics

Supervisors: Associate Professor Qingfeng Zhu, Senior Engineer Yezhi Song

Finished time: March 10, 2024



## 中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名： 郑航

签字日期： 2024.5.21

## 中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

控阅的学位论文在解密后也遵守此规定。

公开  控阅 (\_\_\_\_ 年)

作者签名： 郑航

导师签名： 朱青峰

签字日期： 2024.5.21

签字日期： 2024.5.21



## 摘 要

本文从小行星研究的基础出发,详细介绍了时空理论框架、小行星动力学模型以及小行星定轨方法。定轨精度与评估小行星风险关系密切,本文评估了地面光学观测提升小行星定轨精度效能,获得了光学观测数据对定轨精度可以产生可观提升的结论。使用控制变量的方法研究了影响定轨精度的因素以及这些因素的影响力强弱,研究的影响因素包括:观测数据点数目、观测数据弧长、观测数据弧段分布。得出的结论是,观测数据弧长对提高轨道精度的影响非常强,即使观测弧末端只有少量观测数据,较长的观测弧也能带来较高的轨道精度。本文详细描述了目前发展的小行星撞击概率的计算方法。针对目前已有的小行星撞击监测系统之间结论不一致的现状,本文研究了变化线撞击监测系统所用到的线性近似方法,得出此方法获得的轨道分布相对于理论轨道分布的偏离随着轨道传播时间变长逐渐显著的结论。本文使用蒙特卡洛方法计算了一些小行星实例的撞击概率,与蒙特卡洛撞击监测系统进行比较,结果是所用的6个小行星实例里差别最大的目标差别为 $2.1\sigma$ 。本文也对小行星2020 VV在2056年10月内的撞击样本进行了细致分析,描绘了撞击样本随时间和空间的分布图像,获得了和CNEOS一致的结论。关于不同撞击监测系统间的比较,本文得出的结论是蒙特卡洛撞击监测系统和变化线撞击监测系统目前各有优劣:前者不会引入线性近似方法带来的误差,但计算成本高;后者所用到的线性近似方法将带来误差,但可以找出一些撞击概率低的、可能会被前者遗漏的虚拟撞击源,并且计算成本相对较低。

**关键词:** 撞击监测; 行星防御; 撞击概率; 小行星轨道; 定轨

## ABSTRACT

Starting from the fundamentals of asteroid research, this paper describes in detail the spatio-temporal theoretical framework, asteroid dynamics modeling and asteroid orbit determination methods. The orbit accuracy is closely related to the assessment of asteroid risk, and this paper evaluates the effectiveness of ground-based optical observations in improving the orbit accuracy of asteroids, and obtains the conclusion that the optical observation data can produce a considerable improvement in the orbit accuracy. The factors affecting the orbit accuracy and the strength of the influence of these factors are investigated by using the method of controlling variables, including the number of observation data points, the length of the observation data arc, and the distribution of the observation arc. It is concluded that the effect of observation data arc length on improving orbit accuracy is very strong, longer observation arc leading to higher orbit accuracy even if there are only a few observations at the end of the arc. This paper describes in detail the currently developed methods for calculating the probability of asteroid impact. Aiming at the status quo of inconsistency between existing asteroid impact monitoring systems, we investigated the linear approximation method used by the Line Of Variations impact monitoring system, and concludes that the deviation of the orbit distribution obtained by this method from the theoretical orbit distribution becomes more significantly as the orbital propagation time becomes longer. We calculated the impact probabilities of some asteroid instances using the Monte Carlo method, and compared them with the Monte Carlo impact monitoring system, which resulted in a difference of  $2.1\sigma$  for the most different of the six asteroid instances used. We also analyzed the impact samples of the asteroid 2020 VV in October 2056 in detail, and depicted the distribution of the impact samples over time and space, and obtained conclusions consistent with those of CNEOS. Regarding the comparison between different impact monitoring systems, we concludes that Monte Carlo impact monitoring systems and Line Of Variations impact monitoring systems currently have their own advantages and disadvantages: The former does not introduce the errors associated with linear approximation method, but is computationally expensive; The linear approximation method used in the latter will introduce errors, but it can identify virtual impactor with low probability of impact that may be missed by the former, and the computational cost is relatively low.



**Key Words:** Impact monitoring; Planetary defense; Impact probability; Asteroid orbit; Orbit determination



## 目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 研究现状	2
1.3 研究内容	3
第 2 章 时间系统、坐标系与动力学模型以及轨道确定	4
2.1 时间系统	4
2.2 参考系和坐标系	7
2.2.1 天球参考系和坐标系	7
2.2.2 地球参考系和坐标系	8
2.2.3 坐标系间的转换	9
2.2.4 其他坐标系	10
2.3 小行星动力学模型	10
2.4 定初轨	11
2.5 精密定轨	12
2.6 本章小结	15
第 3 章 定轨精度演化研究	16
3.1 小行星 2015 XF261 定轨	16
3.2 光学观测提升定轨精度效能评估	18
3.2.1 光学观测条件	18
3.2.2 定轨精度提升效能评估	19
3.3 定轨精度影响因素	20
3.3.1 观测数据点数目对定轨精度的影响	21
3.3.2 观测数据弧长对定轨精度的影响	22
3.3.3 极限情况	23
3.3.4 观测数据弧段分布对定轨精度的影响	25
3.4 本章小结	26
第 4 章 小行星撞击监测	27
4.1 解析理论	27
4.2 撞击概率计算方法	29
4.2.1 蒙特卡洛方法	29
4.2.2 变化线方法	30

## 目 录

---

4.2.3 重要性抽样	32
4.2.4 长期轨道撞击风险评估	33
4.2.5 特殊情况	34
4.3 变化线撞击监测系统误差	35
4.4 撞击概率分析实例	36
4.5 本章小结	41
第 5 章 总结和展望	42
参考文献	44
致谢	47
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	48

## 插图清单

图 2.1	时间转换关系	7
图 2.2	时间差异, 以原子时为基础	7
图 2.3	几何关系	12
图 2.4	计算轨道、观测点与残差	12
图 3.1	小行星 2015 XF261 定轨残差	17
图 3.2	小行星 2015 XF261 定轨精度 50 年演化	18
图 3.3	小行星 2015 XF261 观测窗口	19
图 3.4	增加光学观测对小行星 2015 XF261 定轨精度的提升影响	20
图 3.5	不同观测数据点数目下定轨精度演化	22
图 3.6	不同观测数据弧长下定轨精度演化	23
图 3.7	极限情况所用数据示意图	23
图 3.8	观测数据极限情况下定轨精度演化	24
图 3.9	不同观测数据弧段分布下定轨精度演化	25
图 4.1	目标平面几何示意图	28
图 4.2	引力聚焦几何示意图	28
图 4.3	变化线几何示意图	31
图 4.4	线性映射几何示意图	32
图 4.5	包含伪观测点进入真实观测数据	33
图 4.6	小行星 2020 VV 在轨道平面上的虚拟小行星坐标分布	36
图 4.7	6 个小行星定轨残差	37
图 4.8	小行星 2020 VW 的虚拟小行星轨道参数分布	38
图 4.9	小行星 2020 VV 可撞击虚拟小行星数目随接近日期的频数分布	38
图 4.10	小行星 2020 VV 2056 年 10 月的可撞击虚拟小行星 MJD 分布	39
图 4.11	小行星 2020 VV 的目标平面坐标系内虚拟小行星分布	39



## 表格清单

表 2.1	地心坐标系 ·····	9
表 3.1	小行星 2015 XF261 定轨结果 (MJD 60400) ·····	16
表 3.2	小行星 2015 XF261 接近地球事件 ·····	17
表 4.1	6 个小行星定轨结果以及差异指标 $\delta$ ·····	37
表 4.2	6 个小行星撞击概率分析结果 ·····	37
表 4.3	小行星 2020 VV 2056 年 10 月虚拟撞击源 ·····	40





## 符号说明

$a$	椭圆轨道半长轴
$e$	椭圆轨道偏心率
$i$	椭圆轨道轨道倾角
$\Omega$	椭圆轨道升交点在基本面上的角坐标
$\omega$	椭圆轨道近点幅角
$M$	椭圆轨道平近点角
$\Gamma$	最小二乘定轨过程中产生的矩阵，包含定轨精度的信息，也用于定义置信区域



# 第1章 绪 论

## 1.1 研究背景及意义

太阳系中，一些小行星和彗星受附近行星的引力影响，改变轨道，因而能够进入地球附近，这些天体叫做近地天体（Near-Earth Objects, NEO）。按照轨道特点定义，近地天体是近日点距离小于 1.3 AU 的小行星和彗星。绝大多数近地天体是小行星，称为近地小行星（Near-Earth Asteroids, NEA）。根据近日点距离、远日点距离和轨道半长轴可以将近地小行星分为四种类型：Atiras 型、Atens 型、Apollos 型、Amors 型。近地小行星中，与地球的最小轨道交会距离（minimum orbital intersection distance, MOID）为 0.05 AU 或更小、绝对星等为 22 或更亮的小行星都被视为潜在威胁小行星（Potentially Hazardous Asteroid, PHA）。

由于近地小行星的轨道接近地球，因此有机会与地球发生撞击。小行星撞击地球的事件时有发生，地球上发生过的 22 次不同程度的生物灭绝事件，至少 10 次由近地小行星撞击地球导致 [1]。据估计，每年降落于地球的陨石大概有 4 万吨，其中质量大于 10 克的陨石约有 20000 颗。大部分撞向地球的小行星都比较小，大部分在大气层中摩擦消耗殆尽，或者燃烧爆炸。仍然剩余物质的小行星会到达地球表面，已被人们发现的陨石坑遍布全球。6500 万年前，北美墨西哥湾尤卡坦半岛发生的小行星撞击事件，是恐龙灭绝的重要假说。直径为 10 km 的小行星撞击后，导致全球大面积森林被抛射物点燃，燃烧的灰尘进入平流层遮蔽阳光，导致作为食物链底层的植物无法进行光合作用而大量死亡，最终导致全球超过 70% 的物种灭绝。最近影响较大的一次小行星撞击事件是 2013 年 2 月 15 日发生的俄罗斯车里雅宾斯克火流星事件，一颗直径约为 20 米的小行星冲入地球大气层，在高度约为 30 公里的空中爆炸，事件造成了周边 6 个城市 1500 多人受伤。更早的震惊世界的通古斯（Tunguska）大爆炸，发生在 1908 年的俄罗斯西伯利亚。直径在 30 米到 50 米的小行星在大气层中爆炸，导致方圆几十公里内的树木大规模倾倒和被烧毁，爆炸产生相当于约 200 倍广岛原子弹爆炸能量。

小行星撞击监测，就是要找出高撞击风险的小行星，并给出预警信息，以备后续的撞击应对措施参考。所以撞击监测是行星防御的重要环节，任何防御对策手段被采取之前，都需要撞击监测系统指出需要防御的目标。

小行星的威胁不可忽视，这也引起了国际社会的普遍重视。2013 年联合国推动成立了国际小行星预警网络（IAWN）和空间飞行任务规划咨询小组（SMPAG），旨在协助各国政府分析小行星撞击的后果和规划对策，为国际应对近地天体威胁做准备，中国国家航天局（CNSA）已经加入成为这两个组织的正式成员。2016 年，美国国家航天局成立了面向小行星防御任务的行星防御协调办公室（Planetary

Defense Coordination Office, PDCO)。欧洲航天局(欧空局, European Space Agency, ESA)以及德国、英国、俄罗斯、日本等国家也先后成立了近地天体监测预警防御中心。相比之下,我国近地小行星撞击风险应对工作起步较晚。2021年,国家航天局联合有关部委,启动了我国近地小行星撞击风险应对的中长期发展规划论证工作,旨在系统性加强近地小行星撞击风险应对处置能力[2]。2023年,我国提出了近地小行星防御的发展蓝图,未来计划实现对小行星的动能撞击。

综上所述,这个课题的意义:小行星撞击对地球生物具有潜在威胁,行星防御相关的研究对人类的生命安全具有重大意义。小行星撞击监测是行星防御的重要环节,撞击监测给出的撞击预警信息是后续应对工作的重要参考,没有准确的撞击预警结果,后续的撞击应对便无法进行。小行星撞击是全人类共同面对的重大潜在威胁,引起全世界的重视,我国将论证建设近地小行星防御系统作为未来重要航天项目之一。

## 1.2 研究现状

小行星撞击监测目前已经发展出了多种分析方法[3]。首先是最基本的线性方法[4],直接使用线性近似方法获得所求时刻的小行星轨道分布,以此分析撞击概率。线性方法简单快速,容易实现,但是在一些情况下引入的误差较大。即使如此,它仍然是重要的分析方法,目前主流撞击监测系统所使用的主要方法之一——变化线(Line Of Variations, LOV)[5]方法,也会用到线性方法处理轨道分布的传播。第一个小行星撞击监测(impact monitoring, IM)系统 CLOMON 于1999年在比萨大学(University of Pisa)运行,使用变化线——贯穿置信区域(confidence region, CR)最狭长方向的1维空间,来进行撞击概率分析。2002年左右,第二代撞击监测系统开始运行:包括比萨大学的 CLOMON2 和美国国家航天局喷气推进实验室(Jet Propulsion Laboratory, JPL)的 Sentry。CLOMON2 相比 CLOMON 第一代,使用新的天体测量误差模型[6]。第一代 Sentry 使用与 CLOMON 相同的分析方法[7],即变化线方法。Sentry-II 使用蒙特卡罗(Monte Carlo, MC)方法在6维轨道参数空间中抽样。为了实现在可接受的计算资源消耗下获得精度较高的结果, Sentry-II 使用重要性抽样(importance sampling)的方法,对易撞击的轨道参数空间区域进行重点抽样[8]。此外,还有欧洲航天局近地天体协调中心(NEO Coordination Center, NEOCC)的 AstOD,由 SpaceDyS 开发,使用与 CLOMON2 类似的算法,但具有不同的计算引擎[9],适用于不同的操作系统。CLOMON2、Sentry-II 和 AstOD 的预警信息分别发布在 NEODyS、CNEOS 和 NEOCC,后文提到的撞击监测系统,均以信息发布网站名指代。

传统撞击监测的时间尺度是100年左右,传播时间过长会导致轨道非常弥

散以至于无法准确预测，Oscar 等人 [10] 提出千年的大时间尺度上小行星撞击风险的评估方法。传统撞击监测系统所考虑的目标特点是观测数据比较充分，可以通过最小二乘（Least Squares, LS）定轨过程获得精度较高的轨道，定轨信息可用于描述小行星轨道分布，进而分析小行星撞击概率。如果目标观测数据较少，例如观测弧不足  $1^\circ$ ，则不能获得较高精度的轨道和轨道分布，分析方法也需要做出改变。在可以通过最小二乘定轨收敛求解的情况下，置信区域会呈现出 2 维盘状的特征，导致轨道分布置信区域无法用变化线代表，可以使用 2 维变化线处理 [11]；在最小二乘定轨不收敛的情况下，可以通过允许区域（The Admissible Region, AR）[12] 分析轨道分布。此特殊情况的撞击监测系统有喷气推进实验室的 Scout[13]，相关信息发布在 CNEOS。比萨大学的 NEOScan[14]，相关信息发布在 NEODyS。还有赫尔辛基大学（University of Helsinki）的 NEORANGER[15]。

### 1.3 研究内容

目前已经发展了多种撞击监测分析方法，本文对这些撞击监测方法进行了详细介绍，梳理了目前撞击监测的分析研究体系。传统撞击监测系统之间结论不一致：CNEOS 中累计撞击概率最高的 3 个目标在 NEOCC 中没有给出预警，而两个系统共有的预警目标，撞击概率也存在区别（2024 年 4 月 15 日）。本文针对此情况，分析了变化线撞击监测系统会引入的误差，也使用蒙特卡洛方法计算了一些小行星实例的撞击概率，对已有蒙特卡洛撞击监测系统的结果进行验证。

本文第 1 章介绍了小行星撞击监测预警的研究背景，总结了此课题的研究意义。第 2 章介绍了不同的时间系统和坐标系以及它们之间的转化关系，介绍了小行星的动力学模型，为小行星轨道研究提供了基础。介绍了定轨方法，包括定初轨以及精密定轨，为研究定轨精度变化规律以及分析小行星撞击概率提供了基础。第 3 章评估了光学观测对定轨精度的提升效能，使用控制变量的方法研究了影响定轨精度的因素以及这些因素的影响力强弱。定轨精度是确定轨道分布的基础，也是分析撞击概率的基础。第 4 章详细描述了撞击监测目前所发展的撞击概率的计算方法，对一些行星实例进行了撞击概率计算并分析了结果。第 5 章是总结全文，以及对相关工作的展望。

## 第 2 章 时间系统、坐标系与动力学模型以及轨道确定

### 引言

时间和空间是现代物理学研究的基础，本章介绍不同的时间系统和坐标系以及它们之间的转化关系。本章介绍小行星的动力学模型，为小行星轨道研究提供基础。从观测数据获得小行星轨道，这个过程叫做定轨。进行小行星撞击监测，首先需要小行星的轨道信息。本章介绍定轨方法，包括定初轨以及精密定轨。定轨结果为后续小行星撞击风险评估提供依据，是小行星撞击监测工作的基础。

### 2.1 时间系统

首先介绍儒略日（Julian date, JD）的概念。它是一种长期纪日法，从公元前 4713 年儒略历 1 月 1 日格林尼治平正午起连续累计平太阳日数及日的小数。为了方便使用，定义了简化儒略日（modified Julian date, MJD）：

$$\text{MJD} = \text{JD} - 2400000.5 \quad (2.1)$$

下面介绍不同的时间系统。

#### (1) 恒星时、太阳时与世界时

恒星时与太阳时分别是以春分点（或遥远恒星）和太阳为参考点制定的时间系统，在数值上分别等于春分点和太阳中心相对于本地子午圈的时角。春分点连续两次经过本地的上子午圈的时间间隔被称为一个恒星日，太阳中心连续两次经过本地的上子午圈的时间间隔则被称为一个太阳日。太阳时可以分为真太阳时和平太阳时。真太阳时亦称视太阳时，以太阳的周日视运动为依据，真太阳指的是太阳视圆面中心。由于地球绕太阳运动的轨道是椭圆，地球又受到月球和行星的摄动作用，所以太阳在黄道上的运动随时间不均匀变化。另外，由于太阳不是在天赤道上运行，而是在黄道上运行，赤道面与黄道面有夹角，所以即使太阳在黄道上运动随时间均匀变化，它的赤经的增加也是随时间不均匀变化的，因此真太阳时是随时间不均匀变化的。平太阳时简称平时，用平太阳的时角来计量。平太阳是 19 世纪美国天文学家纽科姆（Newcomb, S.）引入的一个假想的参考点，它在天赤道上匀速运动，其速度与太阳在黄道上的平均运行速度相等。恒星时与太阳时都是以地球自转作为时间基准，主要的差异在于测量时所选取的参考点不同。由于地球环绕太阳的公转运动，恒星日比平太阳日（也就是日常生活中所使用的日）短约  $\frac{1}{365}$  日。具体转换关系为：

$$24^h(T_s) = 23^h56^m04^s.09053(T_{\odot}) = (1-\nu) \times 24^h(T_{\odot}) \quad (2.2)$$

或者：

$$24^h(T_{\odot}) = 24^h03^s56^s.55537(T_s) = (1+\mu) \times 24^h(T_s) \quad (2.3)$$

其中  $1-\nu=0.997269566329084$ ,  $1+\mu=1.002737909350975$ 。

世界时 (Universal Time, UT) 就是格林尼治的平太阳时。UT1 是 UT 消除了由极移造成的观测台站经度变化导致的测量变化。UT2 是 UT1 消除了地球自转速度季节性变化导致的测量变化。

### (2) 原子时 (Temp Atomique Internationale (法语), TAI)

原子时是一种基于原子钟的计时系统。它比传统的基于地球自转的计时系统 (如世界时) 更精确。定义一秒为：铯-133 原子基态两个超精细能级间跃迁辐射振荡 9,192,631,770 周所持续的时间。它由世界各地的原子钟实验室共同维护, 被广泛应用于科学、技术和日常生活等领域。例如, 它被用于卫星导航系统、全球定位系统 (GPS)、电信网络和计算机系统等。

### (3) 协调世界时 (Coordinated Universal Time, UTC)

原子时是以原子跃迁时间为定义的时间, 不受地球自转变化影响。而世界时是由地球自转定义的, 见上文。地球自转长期减慢, 所以原子时与世界时之间差别会逐渐增加, 为了解决这个问题, 国际计量大会定义了协调世界时, 加入闰秒 (leap second), 也叫跳秒, 使其与原子时不会积累差别并尽可能与世界时接近, 具体为与 UT1 差别小于 0.9 秒。国际地球自转服务 (International Earth Rotation and Reference Systems Service, IERS) 组织会定时公布调整方案, 在每年年中或者年末最后一秒进行调整。

### (4) 力学时

广义相对论理论框架下运动方程的自变量。在太阳系质心惯性系中叫做质心力学时 (Barycentric Dynamical Time, TDB), 在地心惯性系中叫做地球力学时 (Terrestrial Dynamical Time, TDT), 后改名为地球时 (Terrestrial Time, TT)。质心坐标时 (Barycentric Coordinate Time, TCB) 和地心坐标时 (Geocentric Coordinate Time, TCG) 是日心惯性系和地心惯性系中的时间坐标, TDB 和 TT 分别是 TCB 和 TCG 的线性变换, 进行这样的线性变换主要是为了同一事件的时间参数在数值上差不多, 并且顾及了历史延续性。经过这样的线性变化后, 地球时 TT (也即 TDT) 与原子时 TAI 步长相同, 数值上差一个常数: 32.184 s。

质心力学时以太阳系质心为参考系, 因此其精度不受地球自转变化和极移的影响。用于计算太阳系中行星运动和行星际飞船的轨道以及岁差、章动。地球

时用于与地球参考系相关的活动中，比如地球人造卫星的运动等。

### (5) 时间系统间的转换

上文中已经介绍了不同的时间系统，在其中也介绍了原子时与地球时之间的转化：

$$TT = TAI + 32.184s \quad (2.4)$$

介绍了协调世界时是在 UT1 基础上调整，以使得协调世界时与原子时不积累差别但又符合日常生活的需要。地球时、太阳系质心力学时分别是地心坐标时和质心坐标时的线性变换：

$$\begin{aligned} TCG - TT &= \left( \frac{L_G}{1 - L_G} \right) \times (JD_{TT} - T_0) \times 86400s \\ TDB &= TCB - L_B \times (JD_{TCB} - T_0) \times 86400s + TDB_0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中

$$\begin{aligned} L_G &= 6.969290134 \times 10^{-10}, L_B = 1.550519768 \times 10^{-8} \\ T_0 &= JD2443144.5003725, TDB_0 = -6.55 \times 10^{-5}s \end{aligned} \quad (2.6)$$

地心坐标时和质心坐标时之间的变换通过广义相对论理论实现，具体形式为：

$$\frac{dTCG}{dTCB} \simeq 1 - \frac{U_{ext}(\vec{r}_E)}{c^2} - \frac{|\dot{\vec{r}}_E|^2}{2c^2} \quad (2.7)$$

其中  $U_{ext}$  是除了地球以外的太阳和行星的引力位， $\vec{r}_E$  是地心在质心天球参考系 (BCRS) 中的位置矢量。此关系来自广义相对论，具体可见下文对地心天球参考系和日心天球参考系间坐标转换的介绍。

通过地心坐标时和质心坐标时之间的变换，参考式 (2.7)，以及地球时和太阳系质心力学时与地心坐标时和质心坐标时之间的线性变换关系，可以获得地球时和太阳系质心力学时之间的变换关系。这里给出近似表达：

$$TDB \simeq TT + 0.^s001657 \sin g \quad (2.8)$$

其中  $g = 6.24 + 0.017202 \times (JD_{TT} - 2451545)$ 。

综上所述，不同时间系统之间转换关系如图 2.1。

不同时间系统时间差异如图 2.2。



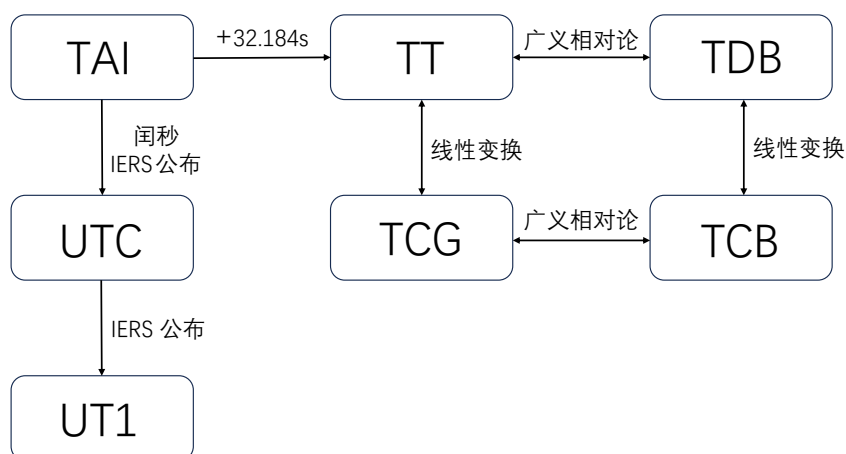


图 2.1 时间转换关系

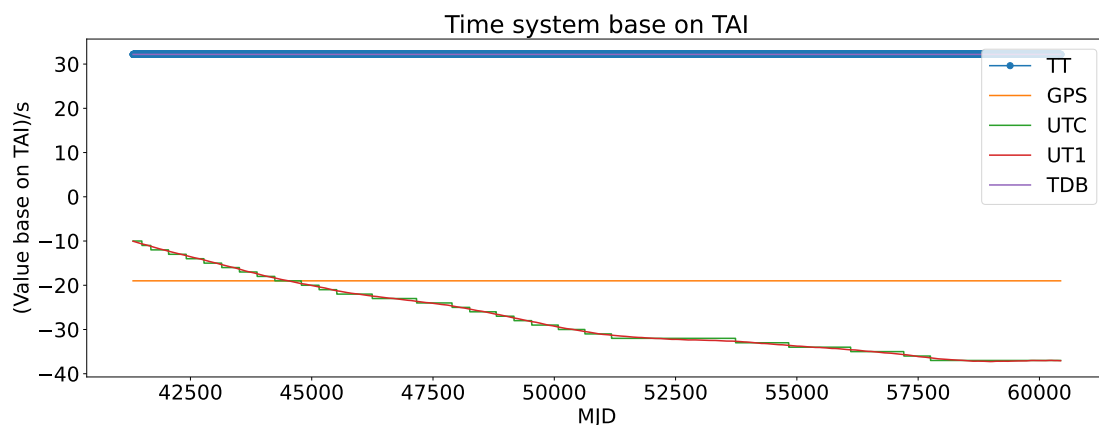


图 2.2 时间差异，以原子时为基础

注：横轴是 MJD，纵轴是以原子时为基础的值，即与原子时的差

## 2.2 参考系和坐标系

### 2.2.1 天球参考系和坐标系

这里先介绍国际天球参考系（International Celestial Reference System, ICRS）的概念，其定义依赖国际天球参考架（International Celestial Reference Frame, ICRF）。国际天球参考架是一系列河外源的精确位置，通过 VLBI —— 甚长基线射电干涉测量技术将这些射电源的位置精确到数个毫角秒以内。通过参考这些目标确定国际天球参考系。

#### (1) 质心坐标系

是以太阳系质心为原点的坐标系。将原点设为太阳系质心的国际天球参考系——质心天球参考系（Barycentric Celestial Reference System, BCRS），在此参

考系上建立的坐标系就是一种质心坐标系，其度规张量：

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{2}{c^2}w - \frac{2}{c^4}w^2 + O(c^{-5}) \\ g_{0i} = \frac{4}{c^3}w^i + O(c^{-5}) \\ g_{ij} = \delta_{ij}(1 - \frac{2}{c^2}w) + O(c^{-4}) \end{cases} \quad (2.9)$$

其中引力位  $w$  和  $w^i$  为：

$$\begin{aligned} w &= G \int d^3x' \frac{\sigma}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3x' \sigma |\vec{x} - \vec{x}'| \\ w^i &= G \int d^3x' \frac{\sigma^i}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned} \quad (2.10)$$

其中  $\sigma$  和  $\sigma^i$  满足：

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2}(T^{00} + T^{ii}) \\ \sigma^i &= \frac{1}{c}T^0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中  $T$  是能动张量，以上各式中的  $c$  是光速。

## (2) 地心坐标系

是以地球质心作为原点的坐标系。将原点设为地球质心的国际天球参考系——地心天球参考系（Geocentric Celestial Reference System, GCRS），在此参考系上建立的坐标系就是一种地心坐标系，其度规张量：

$$\begin{cases} G_{00} = -1 + \frac{2}{c^2}W - \frac{2}{c^4}W^2 + O(c^{-5}) \\ G_{0i} = \frac{4}{c^3}W^i + O(c^{-5}) \\ G_{ij} = \delta_{ij}(1 - \frac{2}{c^2}W) + O(c^{-4}) \end{cases} \quad (2.12)$$

其中引力位  $W$  和  $W^i$  为：

$$\begin{aligned} W &= G \int d^3x' \frac{\sigma}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3x' \sigma |\vec{x} - \vec{x}'| \\ W^i &= G \int d^3x' \frac{\sigma^i}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \end{aligned} \quad (2.13)$$

形式上与质心天球参考系（BCRS）一致。

## 2.2.2 地球参考系和坐标系

与国际天球参考系相似，国际地球参考系（International Terrestrial Reference System, ITRS）以国际地球参考架（International Terrestrial Reference Frame, ITRF）

为参考定义。地球参考系上建立的坐标系都以地心为原点，都是地心坐标系。

### 2.2.3 坐标系间的转换

质心天球参考系（BCRS）和地心天球参考系（GCRS）间坐标转换：

$$\begin{cases} T = t - \frac{1}{c^2}[A(t) + \dot{\vec{r}}_E \cdot \vec{r}_E] + \frac{1}{c^4}[B(t) + B^i(t)r_E^i + B^{ij}(t)r_E^i r_E^j + C(t, \vec{x})] \\ \quad + O(c^{-5}) \\ X^a = \delta_{ai}[r_E^i + \frac{1}{c^2}(\frac{1}{2}\dot{r}_E^i \dot{\vec{r}}_E \cdot \vec{r}_E + w_{ext}(\vec{x}_E)r_E^i + r_E^i \ddot{\vec{r}}_E \cdot \vec{r}_E - \frac{1}{2}a_E^i r_E^2)] \\ \quad + O(c^{-4}) \end{cases} \quad (2.14)$$

其中：

$$\begin{aligned} \vec{r}_E &= \vec{x} - \vec{x}_E \\ \frac{d}{dt}A(t) &= \frac{1}{2}|\dot{\vec{r}}_E|^2 + w_{ext}(\vec{x}_E) \\ \frac{d}{dt}B(t) &= -\frac{1}{8}|\dot{\vec{r}}_E|^4 - \frac{3}{2}|\dot{\vec{r}}_E|^2 w_{ext}(\vec{x}_E) + 4\dot{r}_E^i w_{ext}(\vec{x}_E) + \frac{1}{2}w_{ext}^2(\vec{x}_E) \\ B^i(t) &= -\frac{1}{2}|\dot{\vec{r}}_E|^2 \dot{r}_E^i + 4w_{ext}^i(\vec{x}_E) - 3\dot{r}_E^i w_{ext}(\vec{x}_E) \\ B^{ij} &= -\dot{r}_E^i \delta_{ai} Q^a + 2\frac{\partial}{\partial x^j} w_{ext}^i(\vec{x}_E) - \dot{r}_E^i \frac{\partial}{\partial x^j} w_{ext}(\vec{x}_E) + \frac{1}{2}\delta^{ij} \dot{w}_{ext}(\vec{x}_E) \\ C(t, \vec{x}) &= -\frac{1}{10}r_E^2 (\ddot{\vec{r}}_E \cdot \vec{r}_E) \end{aligned} \quad (2.15)$$

其中  $w_{ext}$  是除了地球以外的太阳和行星的引力位,  $\vec{x}, t$  为质心天球参考系（BCRS）中的位置矢量和时间坐标,  $\vec{X}, T$  为地心天球参考系（GCRS）中的位置矢量和时间坐标,  $\vec{x}_E$  是地心在质心天球参考系（BCRS）中的位置矢量。

根据前文，地心坐标系可以分为天球坐标系（天球参考系的坐标系）和地球坐标系（地球参考系的坐标系）。多种地心坐标系汇总，如表 2.1。

**表 2.1 地心坐标系**

坐标系	原点	参考平面	x 轴方向
历元平赤道地心系	地心	历元平赤道	指向该历元的平春分点
瞬时平赤道地心系	地心	瞬时平赤道	指向瞬时平春分点
瞬时真赤道地心系	地心	瞬时真赤道	指向瞬时真春分点
准地固坐标系	地心	瞬时真赤道	参考平面与格林尼治子午线的交线方向
地固坐标系	地心	与地心和 CIO <sup>①</sup> 连线正交平面	参考平面与格林尼治子午线的交线方向

不同的地心坐标系之间通过旋转变换互相转化。旋转变换过程：历元平赤道地心系消除岁差获得瞬时平赤道地心系，继续消除章动获得瞬时真赤道地心系，

<sup>①</sup>天球中间零点（Celestial Intermediate Origin），天球中间参考系的经度起算点。

继续消除自转获得准地固坐标系，继续消除极移获得地固坐标系，使用的矩阵具体形式可以参考 [16]。

### 2.2.4 其他坐标系

除了质心坐标系和地心坐标系，还有一些其他的坐标系值得关注。站心坐标系，以观测台站为坐标系原点，以赤道面为基本平面、春分点为基本点的是站心赤道坐标系；以地平面为基本平面、北点或者南点为基本点的是站心地平坐标系。研究轨道差异时， $RTN$  坐标系很有用， $RTN$  坐标系以某个轨道运动物体为坐标系原点， $R$  方向为力心指向物体的方向， $T$  方向在轨道平面上与  $R$  方向垂直且向着速度  $\vec{v}$  方向， $N$  方向垂直于轨道面，与  $R$  轴和  $T$  轴构成右手系。 $RTN$  坐标系更具体的数学定义：

$$\hat{R} = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}, \hat{N} = \frac{\vec{R} \times \vec{v}}{|\vec{R} \times \vec{v}|}, \hat{T} = \hat{N} \times \hat{R} \quad (2.16)$$

## 2.3 小行星动力学模型

小行星动力学模型，在主要的太阳引力影响外应该考虑的其他因素包括：

- 太阳系大行星以及其他主要天体的引力影响
- 相对论效应
- 形状摄动
- 太阳光压
- Yarkovsky 效应 [17]

太阳引力影响、太阳系大行星以及其他主要天体的引力影响是小行星动力学模型里最主要的成分，来自牛顿的运动学理论，具体表达：

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{|\vec{r}|^3} \vec{r} + \vec{a}_{other} \quad (2.17)$$

其中  $\mu = GM$  为中心天体引力常数，研究小行星的情况，中心天体就是太阳， $\vec{a}_{other}$  是太阳系大行星以及其他主要天体的引力导致的加速度。

相对论效应来自广义相对论理论，数学表达上是对牛顿理论结果的附加补充，附加加速度的具体表达：

$$\vec{a}_{GR} = \frac{\mu}{c^2 |\vec{r}|^2} \left[ \left( \frac{4\mu}{|\vec{r}|} - \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 \right) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} + 4 \frac{d}{dt} |\vec{r}| \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right] \quad (2.18)$$

形状摄动是在考虑了参与引力作用的物体偏离质点或者偏离中心旋转对称质量分布的球体的因素下的修正，形状摄动的具体表达可以参考 [16]。

太阳光压和 Yarkovsky 效应都是非引力效应。太阳光压是来自太阳光的压强造成的运动影响。Yarkovsky 效应是物体本身辐射或者蒸发物质逃逸的各向异性导致反推力各向异性，从而造成对自身运动的影响，计算模型参考 [17]。

## 2.4 定初轨

相对精密定轨获得的高精度轨道，定初轨获得相对粗糙的轨道，但仍然非常重要，因为初轨偏差过大会导致精密定轨失败。

几何关系如图 2.3。

这里介绍改进的 Laplace 方法 [16]。中心天体力模型：

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \quad (2.19)$$

式 (2.19)，使用 Taylor 公式将物体的位矢  $\vec{r}$  对时间变量  $t$  展开，并将所有的 2 阶及以上导数转化为  $\vec{r}_0$  和  $\dot{\vec{r}}_0$  表达（通过式 (2.19) 实现），然后化为提取出  $\vec{r}_0$  和  $\dot{\vec{r}}_0$  的表达形式：

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \vec{r}_0^{(i)} \Delta t^i \\ &= F(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) \vec{r}_0 + G(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) \dot{\vec{r}}_0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

其中  $\Delta t = t - t_0$ ， $F$  和  $G$  参考 [16]。由几何关系可得：

$$\hat{\rho} \times \vec{r} = \hat{\rho} \times [F(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) \vec{r}_0 + G(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, \Delta t) \dot{\vec{r}}_0] = \hat{\rho} \times (\vec{\rho} + \vec{R}) = \hat{\rho} \times \vec{R} \quad (2.21)$$

其中  $\hat{\rho} = (\lambda, \mu, \nu)^T$  是物体相对观测台站的位矢； $\vec{R} = (X, Y, Z)^T$  是观测台站相对力心的位矢。几何关系如图 2.3。将第  $i$  个观测数据写为 3 分量形式为：

$$\begin{cases} (F\nu_i)x_0 - (F\lambda_i)z_0 + (G\nu_i)\dot{x}_0 - (G\lambda_i)\dot{z}_0 = \nu_i X_i - \lambda_i Z_i \\ (F\nu_i)y_0 - (F\mu_i)z_0 + (G\nu_i)\dot{y}_0 - (G\mu_i)\dot{z}_0 = \nu_i Y_i - \mu_i Z_i \\ (F\mu_i)x_0 - (F\lambda_i)y_0 + (G\mu_i)\dot{x}_0 - (G\lambda_i)\dot{y}_0 = \mu_i X_i - \lambda_i Y_i \end{cases} \quad (2.22)$$

$\vec{r}_0$  本身是位置矢量，有 3 个自由度。从式 (2.21) 可以知道一个观测数据点所决定的  $\vec{r}_0$  有 1 个自由度，所以一个观测数据点消除了 2 个自由度，所以式 (2.22) 中有 2 个是独立的。

式 (2.22) 被写成了线性方程的形式，待解变量是  $\vec{r}_0$  和  $\dot{\vec{r}}_0$  一共 6 个分量，但其本质是非线性方程， $F$  和  $G$  是级数表达，其中包含  $\vec{r}_0$  和  $\dot{\vec{r}}_0$ 。可以使用迭代方

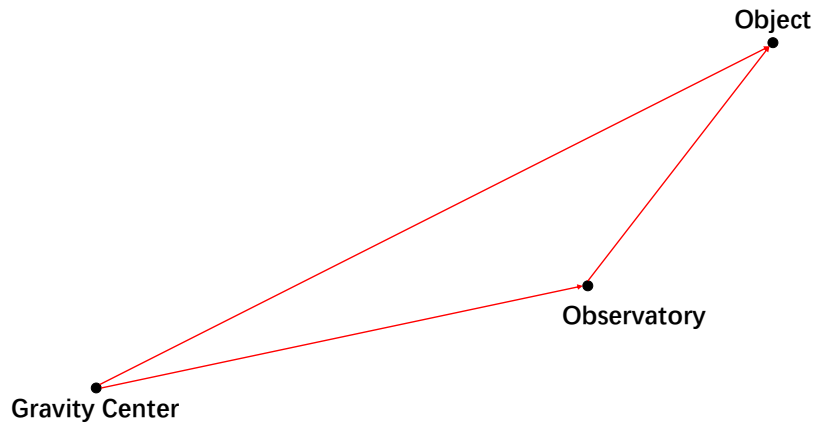


图 2.3 几何关系

法求解，首次迭代可以取用  $F$  和  $G$  的 0 阶项，不包含  $\vec{r}_0$  和  $\dot{\vec{r}}_0$ ，获得解之后带入  $F$  和  $G$  的级数表达再次求解，如此往复迭代，最终获得收敛的初轨。

## 2.5 精密定轨

也叫最小二乘定轨。相对定初轨，精密定轨会利用全部观测数据信息来获得更高精度的轨道。向量  $\vec{X}$  是轨道参数向量，它确定一条唯一的轨道。观测点与轨道  $\vec{X}$  决定的预测位置的差叫做残差 (Residual)，所有观测点的残差组成向量  $\vec{\rho}(\vec{X})$ 。示意图如图 2.4。

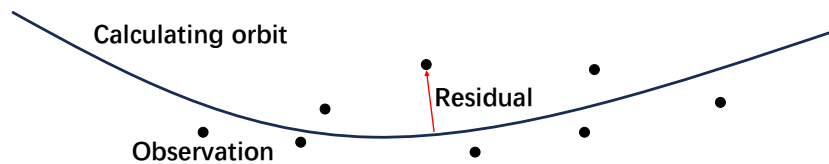


图 2.4 计算轨道、观测点与残差

定义成本函数 (cost function)  $Q$ ，也叫目标函数 (target function)：

$$Q(\vec{X}) = \frac{1}{m} \vec{\rho}(\vec{X})^T \mathbf{W} \vec{\rho}(\vec{X}) \quad (2.23)$$

其中  $m$  是观测点数目， $\mathbf{W}$  是权重矩阵。权重矩阵  $\mathbf{W}$  反映观测数据点的权重，这个矩阵常常这样取值：由  $1/\sigma_i^2$  组成其对角元素， $\sigma_i$  是第  $i$  个观测点的不确定度。使得  $Q$  最小的  $\vec{X}$  即为所求。 $Q$  对  $\vec{X}$  求导：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q}{\partial X_i} &= \frac{1}{m} \frac{\partial(\rho_k W_{kl} \rho_l)}{\partial X_i} = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial \rho_k}{\partial X_i} W_{kl} \rho_l + \rho_k W_{kl} \frac{\partial \rho_l}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{m} \left( \rho_l W_{kl} \frac{\partial \rho_k}{\partial X_i} + \rho_k W_{kl} \frac{\partial \rho_l}{\partial X_i} \right) \\
 &= \frac{1}{m} \left( \rho_k W_{lk} \frac{\partial \rho_l}{\partial X_i} + \rho_k W_{kl} \frac{\partial \rho_l}{\partial X_i} \right) = \frac{2}{m} \rho_k W_{kl} \frac{\partial \rho_l}{\partial X_i}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

相同指标求和，下文同样规定。定义：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q}{\partial \vec{X}} &\equiv \left( \frac{\partial Q}{\partial X_1} \quad \frac{\partial Q}{\partial X_2} \quad \dots \quad \frac{\partial Q}{\partial X_6} \right) \\
 \mathbf{B} &\equiv \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m)}{\partial(X_1, X_2, \dots, X_6)}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

$\mathbf{B}$  是  $\vec{\rho}$  对  $\vec{X}$  的 Jacobi 矩阵，可以拆分为测量矩阵和状态转移矩阵 [18]。则  $Q$  对  $\vec{X}$  的导数可以写为：

$$\frac{\partial Q}{\partial \vec{X}} = \frac{2}{m} \vec{\rho}^T \mathbf{W} \mathbf{B} \tag{2.26}$$

$Q$  取极值处  $\frac{\partial Q}{\partial \vec{X}}$  为 0，方程  $\frac{\partial Q}{\partial \vec{X}} = 0$  的根即为所求。可以通过 Newton 迭代方法实现求解。定义：

$$\vec{f} \equiv \left( \frac{\partial Q}{\partial \vec{X}} \right) = \left( \frac{\partial Q}{\partial X_1} \quad \frac{\partial Q}{\partial X_2} \quad \dots \quad \frac{\partial Q}{\partial X_6} \right)^T = \frac{2}{m} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \vec{\rho} \tag{2.27}$$

$\vec{f} = 0$  的根即为所求。 $\vec{f}$  对  $\vec{X}$  的 Jacobi 矩阵：

$$\vec{f}' \equiv \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(X_1, X_2, \dots, X_6)} \tag{2.28}$$

则：

$$\begin{aligned}
 \vec{f}'_{ij} &= \frac{\partial f_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\partial Q}{\partial X_i} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left( \frac{2}{m} \rho_k W_{kl} \frac{\partial \rho_l}{\partial X_i} \right) \\
 &= \frac{2}{m} \frac{\partial \rho_k}{\partial X_j} W_{kl} \frac{\partial \rho_l}{\partial X_i} + \frac{2}{m} \rho_k W_{kl} \frac{\partial^2 \rho_l}{\partial X_i \partial X_j} \\
 \therefore \vec{f}' &= \frac{2}{m} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{B} + \frac{2}{m} \mathbf{A}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

其中

$$A_{ij} = \rho_k W_{kl} \frac{\partial^2 \rho_l}{\partial X_i \partial X_j} \tag{2.30}$$

参考 [9]，忽略二阶导数成分。迭代具体表达：

$$\begin{aligned}
(\vec{X}_i - \vec{X}_{i+1})\vec{f}'|_{\vec{X}=\vec{X}_i} &= \vec{f}|_{\vec{X}=\vec{X}_i} \\
\Delta\vec{X} = \vec{X}_{i+1} - \vec{X}_i &= -(\vec{f}'^{-1}\vec{f})|_{\vec{X}} = -(\mathbf{B}^T\mathbf{W}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{W}\vec{\rho} = -\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}^T\mathbf{W}\vec{\rho}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

其中

$$\mathbf{\Gamma} \equiv (\mathbf{B}^T\mathbf{W}\mathbf{B})^{-1} \tag{2.32}$$

迭代最终获得解  $\vec{X}^*$ ，称为标称解（nominal solution），是最小二乘定轨的最终结果。在最小二乘定轨过程中可以获得以下结论：

$$\Delta Q = \frac{1}{m}\Delta\vec{X}^T\mathbf{B}^T\mathbf{W}\mathbf{B}\Delta\vec{X} = \frac{\Delta\vec{X}^T\mathbf{\Gamma}^{-1}\Delta\vec{X}}{m} \tag{2.33}$$

这是目标函数的变化量的近似表达。矩阵  $\mathbf{\Gamma}$  包含了定轨精度的信息。



## 2.6 本章小结

本章介绍了时间系统和空间系统，以及不同的时空系统之间的转换关系，是现代天文学研究的基础。时空系统间的转换，存在一些工具，包括 SOFA、Astropy 等软件包。本章也介绍了小行星的动力学模型，是小行星轨道研究的基础。介绍了定轨方法，包括定初轨以及精密定轨。这些算法是计算小行星轨道的基本过程。精密定轨之后不仅可以获得小行星的轨道，并且同时获得了定轨结果的精度，即矩阵  $\mathbf{I}$ ，为后文研究定轨精度变化规律以及分析小行星撞击概率提供基础。

## 第3章 定轨精度演化研究

### 引言

2023年,我国提出了近地小行星防御的发展蓝图,未来计划实现对小行星的动能撞击。在首次任务中,希望实现的三大工程目标:形成动能撞击在轨处置能力,突破不确定目标特性下的高速、高精度制导、导航和控制,以及高速动能撞击仿真与试验验证等关键技术;实现撞击效果高精度观测与评估,探索出地基监测和天基探测联合评估模式和方法;建设预警与处置决策支持平台,完善近地小行星撞击风险应对组织体系和工作机制,验证撞击风险应对业务化运行模式。计划的动能撞击试验的候选目标之一是小行星 2015 XF261,将此目标作为研究定轨精度的目标。对于动能撞击试验,需要目标较高精度的定轨结果。提高定轨精度则需要不断地增加观测数据的数目和提高观测数据质量。可以通过定轨协方差矩阵衡量定轨精度高低,也可以使用由协方差矩阵指出的每个轨道参数的不确定度。协方差矩阵包含定轨精度的全部信息,而轨道参数的不确定度的数学意义更明显,尤其是 Cartesian 类型的轨道参数(即笛卡尔坐标系 3 维位置 3 维速度构成的 6 维轨道参数)的不确定度。

本章评估光学观测对定轨精度的提升效能。研究影响定轨精度的因素以及这些因素的影响力强弱。本章使用的轨道计算工具是开源的小行星轨道计算软件 OrbFit。

### 3.1 小行星 2015 XF261 定轨

从小行星中心(MPC)上获得 74 个观测数据,使用这些数据进行定轨。定轨结果及其与小行星中心(MPC)和喷气推进实验室的 Horizon 结果比较如表 3.1。这些定轨结果非常相近,在 6 位有效数字下才出现区别。

**表 3.1 小行星 2015 XF261 定轨结果 (MJD 60400)**

轨道参数	本文计算结果	MPC	Horizon
半长轴 $a/AU$	0.989741	0.989741	0.989741
偏心率 $e$	0.318983	0.318984	0.318983
轨道倾角 $i/^\circ$	0.793737	0.793740	0.793737
升交点赤经 $\Omega/^\circ$	209.838	209.839	209.839
近点幅角 $\omega/^\circ$	100.893	100.893	100.893
平近点角 $M/^\circ$	245.662	245.662	245.662

定轨残差随 MJD 分布如图 3.1,观测数据残差大致对称地分布在正负区域,所有观测点的残差小于 3 角秒。

将小行星 2015 XF261 的轨道传播 30 年(到 2054 年),计算获得小行星 2015

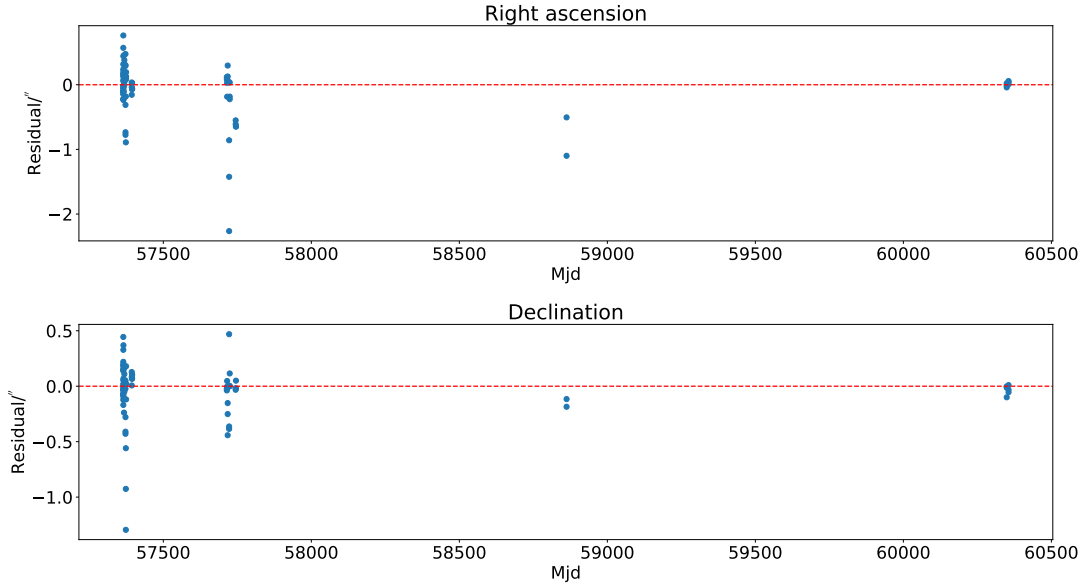


图 3.1 小行星 2015 XF261 定轨残差

XF261 接近地球事件如表 3.2。未来 30 年内（2054 年以前），小行星 2015 XF261 接近地球事件中最接近地球的事件发生在 2029 年 4 月 10 日，接近地球距离为 0.045 AU。小行星 2015 XF261 轨道半长轴小于 1.3 AU，是近地小行星。

表 3.2 小行星 2015 XF261 接近地球事件

日期	MJD	接近地球距离/AU
2016/11/22	57714	0.126
2017/12/08	58095	0.198
2028/04/06	61867	0.141
2029/04/10	62236	0.045
2030/04/08	62599	0.047
2031/04/05	62961	0.145

小行星 2015 XF261 的定轨精度演化如图 3.2。图 3.2 中可以看出小行星的定轨精度存在周期性变化。因此仅用某个历元的定轨精度描述小行星的定轨精度是不恰当的，应该使用如图 3.2 的定轨精度在一段时间内的演化来表征小行星定轨精度的总体情况。

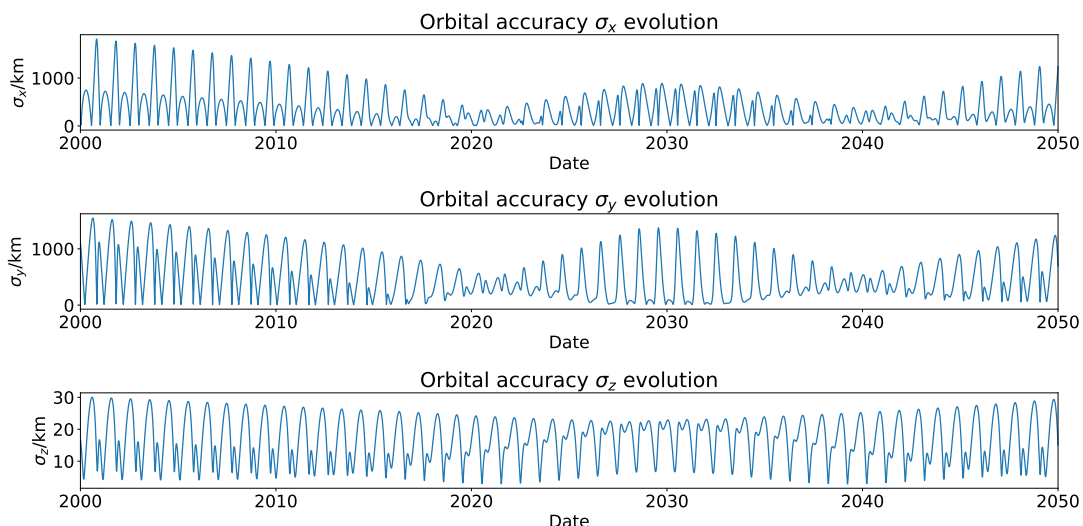


图 3.2 小行星 2015 XF261 定轨精度 50 年演化

注：横坐标是日期，跨度为 2000 年 1 月 1 日到 2050 年 1 月 1 日。三幅图像的纵坐标分别是 Cartesian 三维位置的不确定度，由定轨协方差矩阵给出。

## 3.2 光学观测提升定轨精度效能评估

本节分析光学观测提升小行星 2015 XF261 定轨精度的效能。通过将新增模拟的光学观测数据点加到原始真实观测数据上一起进行定轨，检验定轨精度的变化。

### 3.2.1 光学观测条件

光学观测存在限制条件，包括：地平高度角、太阳高度角、月相、目标与月亮角距离。

#### (1) 地平高度角

目标处于地平面以上。设定地平高度大于  $15^\circ$  满足目标升起条件。

#### (2) 太阳高度角

为避免太阳光强对观测的影响，需要太阳在地平面以下。设定太阳的地平高度小于  $15^\circ$  满足处于夜里条件。

#### (3) 月相

月亮光强周期性变化。设定月相大于  $\frac{5\pi}{6}$  满足月相条件，这里的月相定义： $0$  为满月， $\pi$  为新月。

#### (4) 目标与月亮角距离

为避免月亮光强对观测的影响，需要目标与月亮的角距离不能太小。设定目标与月亮的角距离大于  $30^\circ$  满足目标与月亮角距离条件。

除了以上条件限制，还指定了模拟观测台站为墨子巡天望远镜（Wide Field Survey Telescope, WFST or “Mozi”）。观测台站在地球上随着地球运动，不同的

台站在地球上的位置不同，将影响观测结果。指定台站，实际上要用到台站在地球上的位置信息，用来处理台站随地球运动对观测结果的影响；还要用到台站定位精度信息，用于定轨过程中决定观测数据的权重。

综合以上限制条件，使用从小行星中心（MPC）上获取的 68 个<sup>①</sup>观测数据点进行定轨以及模拟观测，获得小行星 2015 XF261 的观测窗口如图 3.3。小行星 2015 XF261 在 2024 年 1 月 1 日到 2030 年 1 月 1 日之间，在 2024 年、2026 年、2027 年、2028 年、2029 年有观测窗口，2028 年和 2029 年的观测窗口因为月相条件的限制被分成了两段。

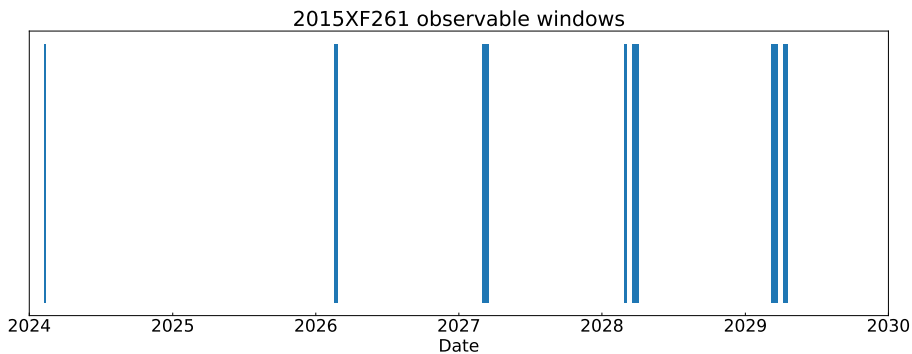


图 3.3 小行星 2015 XF261 观测窗口

### 3.2.2 定轨精度提升效能评估

从 2024 年 1 月 1 日开始到 2030 年 1 月 1 日，每隔 1 小时生成一个模拟观测点。根据上节介绍的观测条件筛选出可以被观测到的数据点，这些模拟观测数据点如观测窗口图 3.3 所示，分布在各个年份的观测窗口内。按照年份，将观测数据接连增添到从小行星中心（MPC）获取的 68 个观测数据点上。

按照年份增加模拟观测数据进行定轨，获得定轨精度演化如图 3.4。随着模拟观测数据逐年增加，定轨精度也逐步提高。模拟观测数据增加完毕，最终定轨精度相比开始有显著提升。

<sup>①</sup>在进行此工作的时候，小行星中心（MPC）上提供此目标的观测记录是 68 个数据点，2024 年 3 月 1 日之后已经增加到了 74 个数据点。

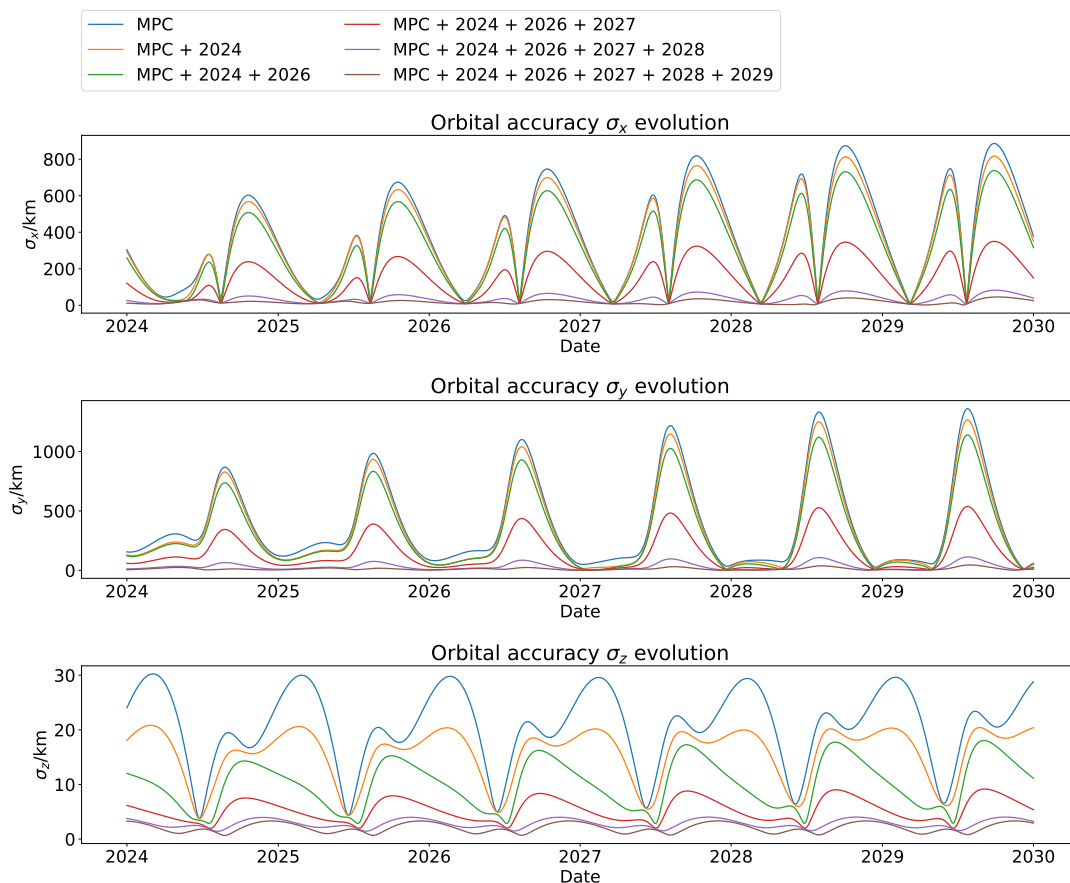


图 3.4 增加光学观测对小行星 2015 XF261 定轨精度的提升影响

注：横坐标是日期，跨度为 2024 年 1 月 1 日到 2030 年 1 月 1 日。三幅图像的纵坐标分别是 Cartesian 三维位置的不确定度，由定轨协方差矩阵给出。

“MPC”代表从小行星中心（MPC）上获取的 68 个观测数据点，“+”后面的年份代表增加的模拟观测数据属于该年的观测窗口。

### 3.3 定轨精度影响因素

受上节的研究内容的启发，产生问题：影响定轨精度的因素以及这些因素的影响力强弱是怎样的？在有限的观测资源下何种观测策略，可以最大限度地提高定轨精度？本节详细分析这些问题。

考虑到观测窗口由小行星的自然条件决定，观测条件筛选数据与小行星定轨精度没有本质关系，所以之后的模拟观测数据不再根据可观测条件筛选，以恒定时间间隔（具体为一天 2 个观测点）模拟观测数据，以获得更加连续且弧长跨度广的一系列模拟观测数据备用。本节使用的原始真实观测数据是从小行星中心（MPC）上获取的小行星 2015 XF261 的 74 个观测记录。

根据定轨计算的原理，定轨精度的影响因素有观测数据本身的精度，观测数据的分布情况。观测数据的分布情况更具体地描述：观测数据点数目；观测数据所跨过的弧长；观测数据分布整体情况，比如整体观测数据分布分散或是均匀。

观测数据点本身精度是由台站提供的，从指导观测计划角度上考虑不是可以人为调整的因素，而且观测点本身的精度一定会较大幅度地影响定轨精度。所以，本节主要考虑的影响因素是观测数据的分布情况对定轨精度的影响，具体为：观测数据点数目、观测数据弧长<sup>①</sup>、观测数据弧段分布。为了研究各个因素的影响，使用控制变量的方法，控制研究因素以外的因素保持一致，体现研究因素对定轨精度造成的影响。

### 3.3.1 观测数据点数目对定轨精度的影响

研究观测数据点数目对定轨精度的影响，控制观测数据弧长和观测数据弧段分布保持不变。定轨取用的数据是原始真实观测数据以及2029年3、4月份的模拟观测数据。使用2029年3、4月份的模拟观测数据没有特别的原因，只是这个时间段覆盖了2029年真实的观测窗口。

这些模拟观测数据分批次加到原始真实观测数据上，分别进行定轨。具体为：分为5个批次。增加模拟观测数据是接连发生的，后一个批次模拟观测数据增加，不会去除所有前面增加的批次。每一批增加过程，在原始真实观测数据基础上：（1）增加的模拟观测数据都具有相同的弧段分布，都是以2029年3月1日为起始点，以2029年4月30日为终点的观测弧段；（2）相比上一批增加了观测数据数目；（3）每批数据尽可能满足数据密度均匀，这是为了新增数据弧连续性更好。随着增加过程进行，观测数据弧长和观测数据弧段分布不变，观测数据点数目增加。

获得定轨精度演化如图3.5。图像中，原始真实观测数据孤立地处于最上方，新增观测数据会提升定轨精度，但是第一批观测数据增加之后就几乎达到了本例中最高的定轨精度，多批新增模拟观测数据获得的定轨精度演化图线之间相对变化极小。得出结论：观测数据点数目对定轨精度影响极小。这个结论为后文的研究提供了极大的便利，后文研究其他因素时不必再控制观测数据点数目保持不变。

<sup>①</sup>观测弧长的定义是观测弧在天球面上划过的弧长。对于某一个固定目标来说，观测弧长会随着观测数据时间跨度增加而增加，所以可以以观测数据时间跨度衡量观测弧长。

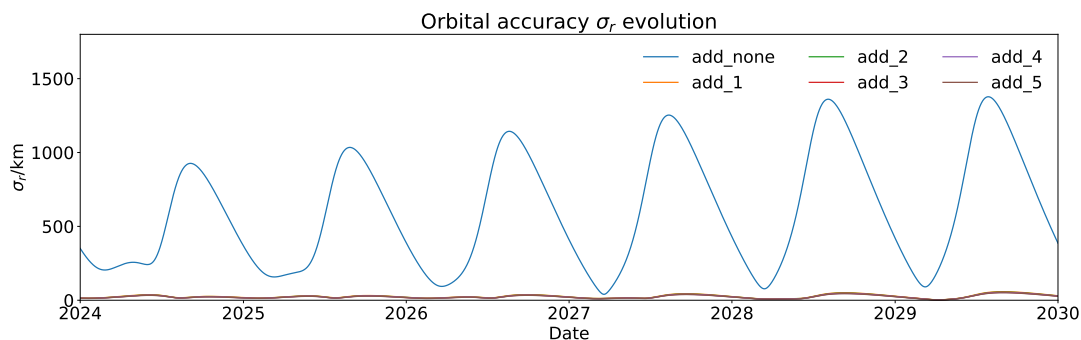


图 3.5 不同观测数据点数目下定轨精度演化

注：横坐标是日期，跨度为 2024 年 1 月 1 日到 2030 年 1 月 1 日。纵坐标是 Cartesian 三维位置的不确定度（由定轨协方差矩阵给出）的平方和开根号，用来表征小行星 2015 XF261 在空间中的位置的分布弥散程度。

“add\_none”代表原始真实观测数据定轨精度演化，“add\_”加数字代表新增模拟观测数据不同批次的定轨精度演化，规律为新增模拟观测数据数目越来越多。

### 3.3.2 观测数据弧长对定轨精度的影响

考虑观测数据弧长对定轨精度的影响，控制观测数据弧段分布保持不变。定轨取用的数据与上小节相同，是原始真实观测数据以及 2029 年 3、4 月份的模拟观测数据。

这些模拟观测数据分批次加到原始真实观测数据上，分别进行定轨。具体为：分为 11 个批次，每个批次的模拟观测数据都是一个单位的弧长<sup>①</sup>，第一个批次的模拟观测数据起点为 2029 年 3 月 1 日，后一个批次的起始点连接前一个批次的终点。增加模拟观测数据是接连发生的，后一个批次模拟观测数据增加，不会去除所有前面增加的批次。每一批增加过程，在原始真实观测数据基础上：（1）增加的模拟观测数据都具有相同的弧段分布，都是 2029 年 3 月 1 日为起始的弧段<sup>②</sup>；（2）相比上一批，定轨所用数据多了一个单位的弧长。随着增加过程进行，观测数据弧段分布不变，观测数据弧长增长。

获得定轨精度演化如图 3.6。图像中，增加模拟观测数据弧长，定轨精度明显提升，观测数据弧长不同时，定轨精度演化之间的区别明显。得出结论：观测数据弧长对于定轨精度提升影响非常强。

<sup>①</sup>一个单位的弧长具体为 2029 年 3 月 1 日到 2029 年 4 月 30 日的观测弧长除以分批次数，本例中是 11。

<sup>②</sup>弧段分布的终点不同，这是改变观测数据弧长所不可避免的。



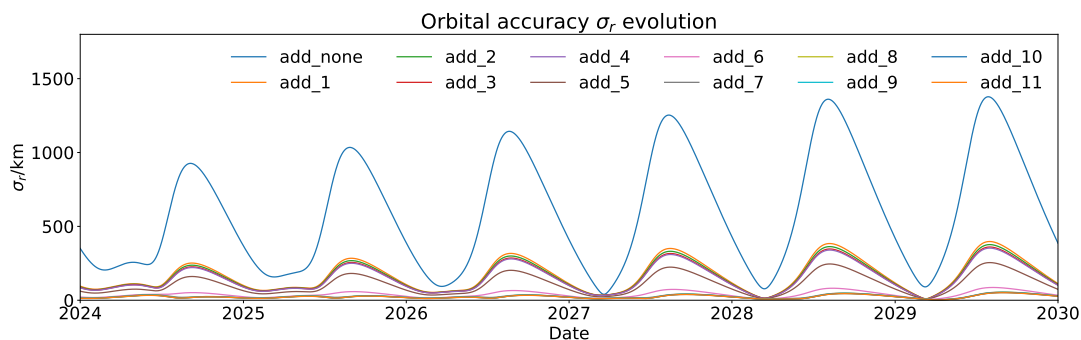


图 3.6 不同观测数据弧长下定轨精度演化

注：横坐标是日期，跨度为2024年1月1日到2030年1月1日。纵坐标是 Cartesian 三维位置的不确定度（由定轨协方差矩阵给出）的平方和开根号，用来表征小行星 2015 XF261 在空间中的位置的分布弥散程度。

“add\_none”代表原始真实观测数据定轨精度演化，“add\_”加数字代表新增模拟观测数据不同批次的定轨精度演化，规律为新增模拟观测数据弧长越来越长。

### 3.3.3 极限情况

考虑极限情况：

1. 只新增模拟观测数据所用弧段的首个模拟观测数据点
2. 只新增模拟观测数据所用弧段的最后一个模拟观测数据点
3. 只新增模拟观测数据所用弧段的首个和最后一个模拟观测数据点

所用数据参考示意图 3.7。考虑上这些极限情况，获取定轨精度演化如图 3.8。只新增模拟观测数据所用弧段的首个模拟观测数据点情况相比原始真实观测数据定轨精度有明显提升，只新增模拟观测数据所用弧段的最后一个模拟观测数据点情况和只新增模拟观测数据所用弧段的首个和最后一个模拟观测数据点情况下的定轨精度再次有明显提升，并且达到了使用新增模拟观测数据所用弧段上的所有模拟观测数据点情况下的定轨精度水平。

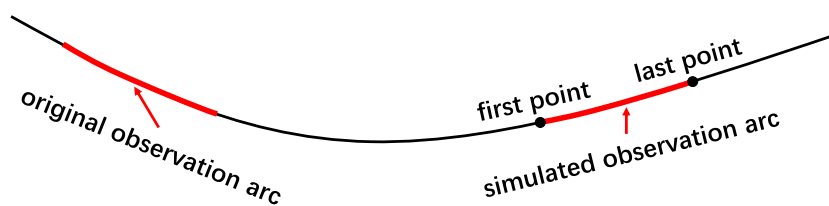


图 3.7 极限情况所用数据示意图

只新增模拟观测数据所用弧段的最后一个模拟观测数据点的情况，相当于把用于定轨的观测数据弧长直接提到了最大，直接获得了较高的定轨精度，这说明观测数据弧长对于定轨精度提升影响非常强；只新增模拟观测数据所用弧段的首个模拟观测数据点情况，观测数据弧长不及只新增模拟观测数据所用弧段的最后一个模拟观测数据点的情况，所以定轨精度也不及。以上两点是对观测数

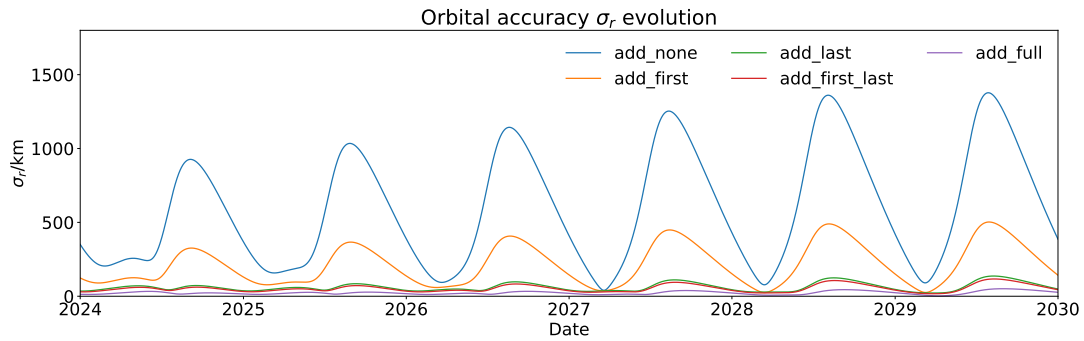


图 3.8 观测数据极限情况下定轨精度演化

注：横坐标是日期，跨度为 2024 年 1 月 1 日到 2030 年 1 月 1 日。纵坐标是 Cartesian 三维位置的不确定度（由定轨协方差矩阵给出）的平方和开根号，用来表征小行星 2015 XF261 在空间中的位置的分布弥散程度。

“add\_none”代表原始真实观测数据定轨精度演化，“add\_first”代表只新增模拟观测数据所用弧段的首个模拟观测数据点的定轨精度演化，“add\_last”代表只新增模拟观测数据所用弧段的最后一个模拟观测数据点的定轨精度演化，“add\_first\_last”代表只新增模拟观测数据所用弧段的首个和最后一个模拟观测数据点的定轨精度演化。“add\_full”代表新增模拟观测数据所用弧段（是研究观测数据弧长对定轨精度的影响时所使用的）上的所有模拟观测数据点的定轨精度演化。

据弧长对于定轨精度提升影响非常强这个结论的印证。在极限情况中，只新增一个或者两个模拟观测数据点的情况仍然得到高定轨精度，这是对观测数据点数目对定轨精度的影响极小的结论的印证。

### 3.3.4 观测数据弧段分布对定轨精度的影响

考虑观测数据弧段分布对定轨精度的影响，控制观测数据弧长保持不变。定轨取用的数据，是原始真实观测数据以及 2029、2028、2027、2026、2025 年 3 月份的模拟观测数据。

这些模拟观测数据分批次加到原始真实观测数据上，分别进行定轨。具体为：根据年份分为 5 个批次。第一个增加的批次是 2029 年的批次，后增加的批次按年份往前逐个进行。增加模拟观测数据是接连发生的，后一个批次模拟观测数据增加，不会去除所有前面增加的批次。每一批增加过程，在原始真实观测数据基础上：（1）都具有相同的观测数据弧长，都是原始真实观测数据弧段的起始点为起始点，2029 年 3 月 31 日为终点的观测弧；（2）相比上一批在整个观测弧中间增加了一个观测弧段。随着增加过程进行，观测数据弧长不变，观测数据弧段分布趋于均匀。

获得定轨精度演化如图 3.9。图像中，观测数据弧段分布趋于均匀，会一定程度提高定轨精度，但影响较小。

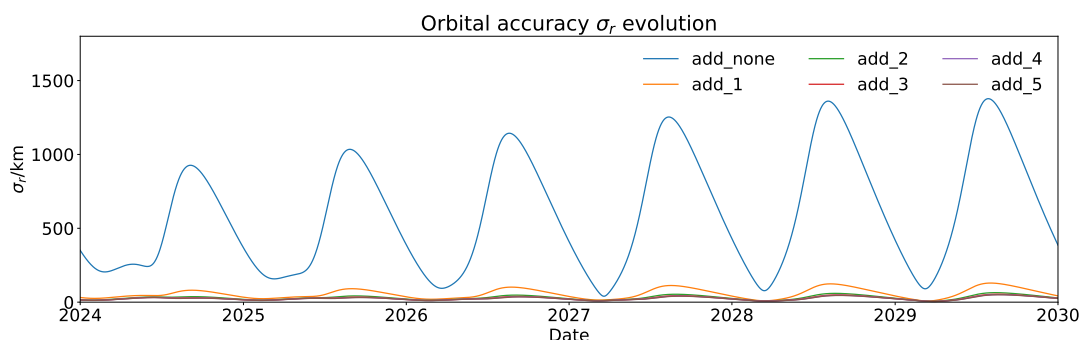


图 3.9 不同观测数据弧段分布下定轨精度演化

注：与图 3.4 类似，横坐标是日期，跨度为 2024 年 1 月 1 日到 2030 年 1 月 1 日。纵坐标是 Cartesian 三维位置的不确定度（由定轨协方差矩阵给出）的平方和开根号，用来表征小行星 2015 XF261 在空间中的位置的分布弥散程度。

“add\_none”代表原始真实观测数据定轨精度演化，“add\_”加数字代表新增模拟观测数据不同批次的定轨精度演化，规律为观测数据弧段分布趋于均匀。

### 3.4 本章小结

本章研究了小行星 2015 XF261 的定轨精度，评估了地面光学观测提升小行星定轨精度效能，使用控制变量的方法研究了影响定轨精度的因素以及相应的影响力强弱，研究的影响因素包括：观测数据点数目、观测数据弧长、观测数据弧段分布。获得结论：

- 轨道精度存在周期性变化。使用某个历元的定轨精度描述小行星的定轨精度是不恰当的，应该使用定轨精度在一段时间内的演化来表征小行星定轨精度的总体情况。
- 光学观测数据对定轨精度可以产生可观的提升。
- 观测数据点数目对定轨精度的影响极小。但是观测数据点数目对于搜寻小行星来说很重要。所以提高观测点数目，不需要从提高定轨精度的角度考虑，而是从提高小行星发现率的角度考虑。
- 观测数据弧长对于定轨精度提升影响非常强，即使在观测弧段尽头只有少量观测数据，长观测弧仍能获得高定轨精度。
- 观测数据弧段分布趋于均匀，会一定程度提高定轨精度，但影响较小。

这些结论为光学观测小行星提供了指导。另外，定轨精度是确定轨道分布的基础，与小行星撞击监测关系密切。

## 第 4 章 小行星撞击监测

### 引言

撞击监测的任务是找出高风险小行星。评估小行星的风险需要综合考虑小行星与地球发生撞击的概率、撞击发生距今时间以及破坏性。巴勒莫指标 (Palermo Scale, PS) [19] 是一个综合考虑了这些要素的指标, 其定义为:

$$\begin{aligned}
 PS &= \lg R \\
 R &= \frac{P_{Impact}}{f_B \times DT} \\
 f_B &= 0.03 \times E^{-\frac{4}{5}}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

其中  $P_{Impact}$  是撞击概率,  $DT$  是撞击发生距今时间, 以年为单位,  $E$  是小天体携带的能量, 以 TNT 当量为单位。小行星与地球的撞击概率是评估小行星风险的重要指标。本章详细描述目前所发展的撞击概率计算方法, 对一些小行星实例进行了撞击概率计算并分析结果。

### 4.1 解析理论

高风险小行星可以到达很接近地球的距离, 此情况称为接近 (close approach, CA), 一般判断为接近的距离阈值为 0.05 AU。接近发生时, 需要建立合适的参考系来研究小行星与地球的关系, 一般以目标平面 (Target Plane, TP) [20] 为基础建立参考系。目标平面是过地心的平面, 目标平面坐标系以地心为原点。目标平面的法向与小行星的地心速度平行。更具体地, 目标平面存在两种定义: 第一种称为目标平面或 B 平面 (B-plane), 它垂直于小行星无穷远处的速度方向。无穷远指在地球的引力影响范围之外, 且接近已经发生; 第二种称为改良目标平面 (Modified target plane, MTP), 它垂直于小行星最接近地球时的速度方向。参考几何示意图 4.1。这两种目标平面的主要区别在于: MTP 上, 小行星因地球引力聚焦作用而产生的偏转可以直接显示出来, 因为小行星轨迹在目标平面上的交点就是小行星最接近地球的点; 而 B 平面上, 引力聚焦的信息被隐藏。对于相对速度较大或与地球距离较远的接近事件, 小行星轨道偏转非常小, 两种目标平面之间的区别可以忽略不计。后文将使用 MTP 分析小行星撞击。

根据 Öpik 的理论 [21]: 小行星接近事件发生之前, 小行星的轨道是由太阳引力主导的椭圆轨道, 直到小行星进入由地球引力主导的区域, 此时轨道变成地球引力主导的双曲线轨道, 直到小行星离开地球的影响范围, 进入新的日心椭圆

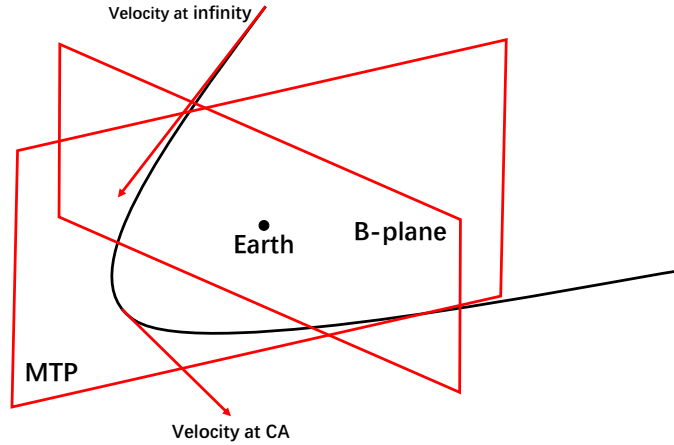


图 4.1 目标平面几何示意图

轨道。根据 [22] 中对 Öpik 理论的几何解析，可以通过小行星日心椭圆轨道轨道参数计算接近时小行星相对地球的速度和小行星速度矢量所在直线与地球的距离。参考几何示意图 4.2，双曲线轨道的两条渐近线的方向分别是接近前后的速度方向，通过双曲线上最接近力心的距离不能超过地球半径定义撞击截面半径：

$$R_{cross} = R_E \sqrt{1 + \frac{2GM}{R_E |\vec{U}|^2}} \quad (4.2)$$

其中  $R_E$  是地球半径， $M$  是地球质量， $G$  是引力常量， $\vec{U}$  是接近时小行星的地心速度矢量。撞击截面半径  $R_{cross}$  是目标平面 B 平面的  $b$  参数阈值， $b$  参数小于  $R_{cross}$ ，则小行星将因为引力聚焦撞击地球。引力聚焦偏转：

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{M}{b |\vec{U}|^2} \quad (4.3)$$

其中  $\gamma$  是引力聚焦偏转角。参考几何示意图 4.2。接近前后速度大小不变，方向变化由式 4.3 描述，由此获得接近后小行星的日心椭圆轨道。

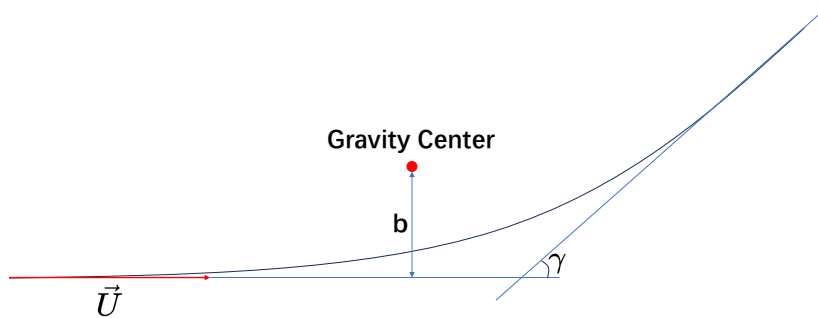


图 4.2 引力聚焦几何示意图

接近发生后，如果小行星和地球的轨道周期是整数比，则经过数个周期后小行星和地球都将再次回到上次相遇的状态，这样的后续相遇被称为共振回归

(resonant return)。如果周期的比值不是整数比，但很接近，那么后续的相遇也可能发生，但相遇状态会发生变化，可以解析计算 [23]。在此基础上，Chodas 引入 [24] 钥匙孔 (keyhole) 概念——一个  $B$  平面上的区域，如果小行星穿过其中，则小行星将在整数个周期运动后击中地球。解析理论虽然是近似的，但它提供了小行星接近和共振回归的物理图像，也引入了接近、目标平面等撞击分析中的重要概念。

## 4.2 撞击概率计算方法

小行星的轨道是通过观测数据计算获得的。观测数据存在不确定性，所以小行星的轨道亦存在不确定性。记轨道标称解为  $\vec{X}^*$ ，可以用以  $\vec{X}^*$  为平均值，以  $\Gamma$  (定轨协方差矩阵) 为协方差矩阵的 Gauss 分布估计轨道的分布 [5]:

$$q(\vec{X}) \sim N(\vec{X}^*, \Gamma) \quad (4.4)$$

轨道参数空间中的置信区域由最小二乘定轨的目标函数变化量给出，是小行星撞击分析的轨道参数研究空间。置信区域的定义是使目标函数变化量小于某个阈值的参数空间:

$$\frac{\Delta \vec{X}^T \Gamma^{-1} \Delta \vec{X}}{m} < \frac{\chi^2}{m} \quad (4.5)$$

其中  $m$  是观测点数目， $\Delta \vec{X}$  是轨道参数向量与标称解的差， $\chi^2$  是人为决定的限制置信区域大小的参数。

### 4.2.1 蒙特卡洛方法

小行星的动力学模型涉及  $N$  体问题，轨道不可解析解，通过解析方法直接获得置信区域内所有轨道未来的状态是不可能的，只能通过数值积分的方法分析置信区域中有限数目的轨道。蒙特卡洛方法可以被用于分析小行星撞击概率 [25]。

根据上文描述，在观测数据比较充分的情况下，小行星的轨道可以通过最小二乘定轨获得标称解，进而确定轨道分布。记轨道参数空间中可以发生撞击的区域为  $F$ 。区域  $F$  也被称为虚拟撞击源 (Virtual Impactor, VI)，定义为可以发生撞击的轨道参数空间的子集 [9]。撞击概率为:

$$P_{\text{Impact}} = \int_F q(\vec{X}) d\vec{X} \quad (4.6)$$

其中  $P_{\text{Impact}}$  是撞击概率的精确表达。在置信区域内进行抽样，样本被称为虚拟

小行星 (virtual asteroid, VA)。然后对每个样本进行轨道动力学传播, 判断其是否可以撞击地球, 这相当于判断虚拟小行星样本是否处于区域  $F$  中。通过:

$$\hat{P}_{\text{Impact}} = \frac{\# \text{ of (VAs} \in \text{VI)}}{\# \text{ of VAs}} \quad (4.7)$$

得到所求撞击概率的估计值。参考 [26], 本文所使用的蒙特卡洛抽样属于对二项分布的随机变量的重复抽样, 使用样本估计变量的分布参数:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \bar{X} \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中  $\hat{\mu}$  和  $\hat{\sigma}$  分别是变量的期望和标准差的无偏估计,  $n$  是样本数目,  $X_i$  是样本,  $\bar{X}$  是样本均值。对于本文来说, 撞击样本  $X_i$  取 1, 非撞击样本  $X_i$  取 0。有了这样的符号约定, 撞击概率的估计值也可以表达为:

$$\hat{P}_{\text{Impact}} = \bar{X} \quad (4.9)$$

根据 [26] 对中心极限定理的描述, 独立同分布的变量的均值  $\bar{X}$  的分布随着样本数目增大将无限逼近 Gauss 分布:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leq x \right) = \Phi(x) \quad (4.10)$$

其中  $\mu$  和  $\sigma$  分别是变量的期望和标准差,  $\Phi(x)$  是标准 Gauss 累积分布函数。通过式 (4.8) 估计  $\hat{\mu}$  和  $\hat{\sigma}$ , 带入式 (4.10) 获得样本均值  $\bar{X}$  所趋近的 Gauss 分布的标准差  $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$  的估计, 此亦为样本均值  $\bar{X}$  的不确定度的估计:

$$\hat{\sigma}_{\hat{P}_{\text{Impact}}} = \hat{\sigma}_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad (4.11)$$

式 (4.9) 和式 (4.11) 分别是估计小行星撞击概率及其不确定度的表达式。

## 4.2.2 变化线方法

20 世纪 90 年代末提出的想法是考虑一个几何对象, 变化线 [5], 它是置信区域中的 1 维曲线段。在观测数据比较充分的情况下, 置信区域通常很狭长, 定义变化线的方向处处指向轨道参数空间中概率密度变化最慢的方向, 所以变化线  $\sigma$  是贯穿置信区域最狭长方向的一条线, 可以用变化线代表整个置信区域。参考几何示意图 4.3。轨道参数分布, 即式 (4.4) 的  $e$  指数部分是:



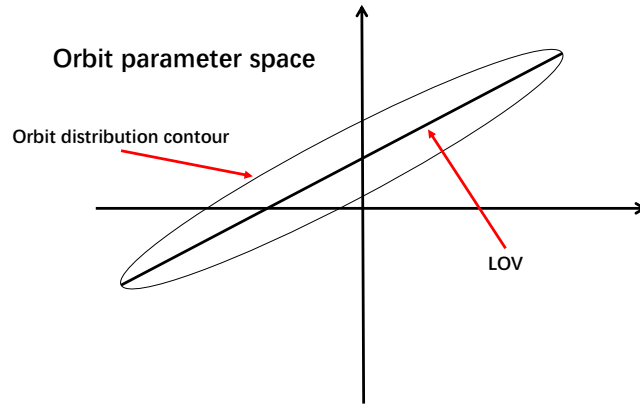


图 4.3 变化线几何示意图

$$-\frac{1}{2} \vec{X}^T \Gamma^{-1} \vec{X} \quad (4.12)$$

将  $\Gamma^{-1}$  对角化,  $\Gamma^{-1} = V^T \Lambda V$ ,  $\Lambda$  是特征值组成的对角矩阵。绝对值最小的特征值  $\lambda_{min}$  对应的特征向量  $\vec{v}_{weak}$  代表的方向就是轨道参数空间中概率密度变化最慢的方向, 此为变化线的方向, 也叫弱方向 (weak direction)。变化线本身是 1 维的自由度的空间, 以符号  $\sigma$  表示。则:

$$d\sigma = \sqrt{\lambda_{min}} \vec{v}_{weak}^T d\vec{X} \quad (4.13)$$

式 (4.13) 中向量以列矩阵形式表示。因为目的是求解  $\vec{X}(\sigma)$ , 更容易的等效的计算过程是计算  $\Gamma(\vec{X})$  的特征向量和特征矩阵, 最大的特征值  $\lambda'_{max}$ , 对应的特征向量  $\vec{v}'_{weak}$ , 则:

$$d\vec{X} = \sqrt{\lambda'_{max}} \vec{v}'_{weak} d\sigma \quad (4.14)$$

综合:

$$\vec{X}^* = LOV|_{\sigma=0} \quad (4.15)$$

边界条件, 变化线到轨道向量的映射  $LOV(\sigma)$  就完全确定了。如果弱方向非常显著, 就是弱方向非常狭长, 会导致计算结果不稳定 [27], 为了解决这个问题, 引入了一个校正算法, 使用约束在与弱方向正交的超平面上进行最小二乘迭代。

变化线是一个连续的几何对象, 所以变量  $\sigma$  连续变化将导致轨道的连续变化。变化线可以被描述为变量  $\sigma$  的均匀分布, 也可以被描述为 Gauss 分布 [28]。按照某个分布模型在变化线上抽样获得样本后进行动力学传播, 分析变化线这个 1 维空间上的接近事件以及对应的历元。通过对变化线样本与地球的接近距

离的分析，在变化线上找到与地球距离的极小值点。在该点局部，通过线性近似方法（后文将详细说明），将定轨历元的轨道协方差矩阵转化为接近历元的轨道协方差矩阵。然后用接近历元的轨道参数和轨道协方差矩阵定出接近历元的小行星轨道分布。小行星在目标平面上落点  $\vec{Y}$  和该时刻轨道参数  $\vec{X}$  之间的函数关系可以写为：

$$\vec{Y} = \vec{F}(\vec{X}) \quad (4.16)$$

再通过线性关系近似计算  $\vec{Y}$  和  $\vec{X}$  之间映射：

$$\Delta\vec{Y} = \mathbf{DF}(\vec{X})\Delta\vec{X} \quad (4.17)$$

其中  $\mathbf{DF}$  是  $\vec{F}$  对  $\vec{X}$  的 Jacobi 矩阵。通过此线性关系，轨道参数的多维 Gauss 分布转化为目标平面上小行星落点  $\vec{Y}$  的 2 维 Gauss 分布。撞击概率就是概率分布在撞击截面区域上的积分。参考几何示意图 4.4。

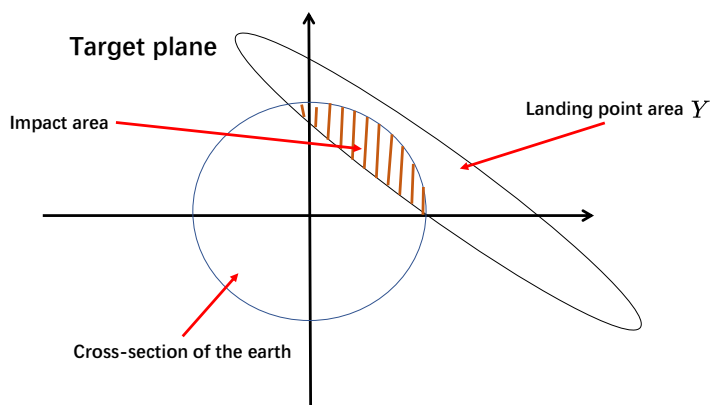


图 4.4 线性映射几何示意图

### 4.2.3 重要性抽样

在整个置信区域中，其实只有小部分区域可能发生撞击，其他大部分的区域是明显不可能撞击的，所以直接按照轨道参数的分布在置信区域中进行抽样是非常盲目的，也浪费了大量的算力。Sentry-II 使用重要性抽样（importance sampling）的方法，对容易发生撞击的区域进行重点抽样 [8]。计算概率的积分在上文以式 (4.6) 描述。变换计算概率的积分：

$$P_{\text{Impact}} = \int_F p(\vec{X}) \frac{q(\vec{X})}{p(\vec{X})} d\vec{X} \quad (4.18)$$

其中  $p(\vec{X})$  是人为选择的函数。如果  $p(\vec{X})$  被选择为某一个新的概率密度分布，式

(4.18) 的计算结果就可以被视为  $p(\vec{X})$  分布下,  $\frac{q(\vec{X})}{p(\vec{X})}$  的期望。则就可以按照  $p(\vec{X})$  分布进行抽样, 然后以:

$$\hat{P}_{\text{Impact}} = \frac{1}{\text{VAs' number}} \sum_i \frac{q(\vec{X}_i)}{p(\vec{X}_i)} \quad (4.19)$$

(其中  $\vec{X}_i$  是虚拟撞击源中的虚拟小行星) 估计积分结果。这就是重要性抽样。使用重要性抽样的方法, 可以随意设置用来抽取样本的分布  $p(\vec{X})$ , 就可以对比较可能发生撞击的区域密集抽样, 对不大可能发生撞击的区域少抽样, 用相同的计算资源, 可以获得精度更高的结果。

下面描述获得容易发生撞击的区域的方法。首先找出置信区域内所有的接近动力学途径: 按照正常的直接抽样方法进行少量抽样, 找出其中的接近事件; 对于属于同一条接近动力学途径的虚拟小行星, 近距离接近发生时间应该很接近, 以近距离接近时间为依据将不同的虚拟小行星分组; [8] 中自定参数来描述组内不同虚拟小行星轨道在空间中的接近程度, 通过此自定义参数进行更细致的虚拟小行星分组; 最终获得置信区域内所有的接近动力学途径以及对应的接近历元。对于每个接近动力学途径, 将接近历元的地球位置视为观测点, 通过地球半径以及一个人为定出的参数定义观测点权重。然后进行最小二乘定轨, 获得的轨道分布即为导向既定历元撞击的轨道分布, 按照上文定义的置信区域的相似的定义获得导向撞击的轨道分布的置信区域, 由此便得到了置信区域中容易发生撞击的区域。参考示意图 4.5。



图 4.5 包含伪观测点进入真实观测数据

#### 4.2.4 长期轨道撞击风险评估

小行星的轨道是通过数值积分进行动力学传播的, 随着轨道传播时间增加, 轨道不确定度会逐渐增大, 轨道分布变得非常弥散, 导致无法准确预测。所以大时间尺度上, 传统撞击监测方法不合适, 传统撞击监测的特征时间尺度是 100 年左右。[10] 提出千年的大时间尺度上小行星撞击风险的评估方法。

[7] 中指出, 随着轨道的动力学传播, 轨道不确定度主要由平近点角的不确定度主导。换一种说法是, 随着轨道传播, 轨道的分布在运动方向上的不确定度增加得最快。[10] 中通过对蒙特卡洛样本的研究, 发现随着给轨道传播时间增加, 平近点角最先出现由于不确定度高而导致的不可预测现象。在这种情

况下，认为平近点角是均匀分布，也就是认为，小行星在椭圆轨道上任何位置出现的概率相同。在这样的假设下，发生撞击的指标就不再是小行星和地球的最短距离，而是小行星轨道和地球轨道的最小轨道交会距离（minimum orbital intersection distance, MOID）。最小轨道交会距离定义为两条轨道间交会的最小距离，不关心物体在轨道上的具体位置。计算最小轨道交会距离的方法包括分析方法 [29-31] 和数值计算方法 [32-33]，其不确定度的分析可以参考 [34]。撞击概率表达：

$$P_{\text{MA}}(t) = \frac{2Ud}{T_p T_{\text{NEO}} |\vec{v}_p \times \vec{v}_{\text{NEO}}|} \sqrt{1 - \frac{\text{MOID}^2}{d^2}} \quad (4.20)$$

其中  $P_{\text{MA}}(t)$  就是  $t$  时刻的撞击概率， $\vec{v}_p$  和  $\vec{v}_{\text{NEO}}$  是地球和小行星在所求时刻  $t$  的速度，MOID 是最小轨道交会距离， $U$  是相对速度， $T_p$  和  $T_{\text{NEO}}$  是地球和小行星的轨道周期， $d$  为碰撞距离。此表达式代表 MOID 的分布处于  $[0, d]$  内的概率。在千年时间尺度上求平均：

$$P = \frac{1}{T} \int \kappa P_{\text{MA}} dt \quad (4.21)$$

平近点角的标准差大于  $10^\circ$  之后认为进入了无法预测轨道位置的状态。到达此状态的时刻之前  $\kappa$  取值为 0，此时刻之后  $\kappa$  取值为 1。积分一直进行到千年时间尺度， $P$  即为千年时间尺度的撞击风险评估指标。

#### 4.2.5 特殊情况

第一次观察一个目标时，可用的数据非常少，以至于最小二乘定轨可能会失败，因而无法确定良好约束的六参数轨道。非常小的物体的亮度很低，只有到达比较接近地球的时候才可能被观测到，观测数据非常少，而且被发现几天后就可能与地球达到最接近距离。因此，此情况的撞击监测是一个关键问题。

在可以通过最小二乘定轨收敛求解的情况下，置信区域不再狭长，而是像一个扁平的圆盘，并且变化线的定义强烈依赖于所使用的坐标和单位。变化线是该圆盘的弦，变化线也不再能代表整个置信区域 [5]。这种情况下可以使用 2 维变化线方法，就是在选取变化线时使用最显著的弱方向以及第 2 显著的弱方向，定义 2 维空间，在此空间上进行抽样 [11]。

在最小二乘定轨不收敛的情况下，[12] 使用 *attributable* 研究轨道。定义某时刻的 4 个变量  $(\epsilon, \theta, \dot{\epsilon}, \dot{\theta})$  为 *attributable*，其中  $\epsilon$  和  $\theta$  是两个角坐标。观测数据少，所以很难确定目标的径向距离  $r$  及其对时间的导数  $\dot{r}$ ，所以最小二乘定轨只在 *attributable* 4 维空间上进行。通过“(1) 非地球卫星；(2) 在地球引力影响范

围之外；(3) 被太阳束缚；(4) 在地面以上”这4点对  $r$  和  $\dot{r}$  进行粗糙约束，获得约束了  $r$  和  $\dot{r}$  的2维空间。此空间和 attributable 4维空间上最小二乘定轨获得的置信区域组合得到新的轨道参数空间，这个空间称为允许区域 (The Admissible Region, AR) [12]。抽样过程在允许区域内进行。

### 4.3 变化线撞击监测系统误差

NEOCC 和 NEODyS 撞击监测系统使用变化线方法分析撞击概率，在1维变化线空间上抽样，分析变化线样本与地球的接近距离，寻找变化线上与地球的接近距离的极小值点。通过线性近似方法估计每个局部极小值点在接近历元的轨道分布 [35]，将轨道协方差矩阵转化为接近历元的轨道协方差矩阵：

$$\Gamma^{-1}(t) = \Phi^T \Gamma^{-1}(t_0) \Phi \quad (4.22)$$

其中  $\Phi \equiv \frac{\partial \bar{X}(t)}{\partial \bar{X}(t_0)}$ ，是状态转移矩阵 [18]。依照前文描述的轨道分布计算方法，将接近历元的轨道协方差矩阵作为接近历元的轨道分布参数，由此获得接近历元的轨道分布，再通过线性关系获得小行星在目标平面上落点和接近历元的轨道参数的映射 [35]，进而获得落点的分布。然后在目标平面上对处于撞击截面内的落点分布积分，即可获得小行星撞击概率。

分布函数的等高面可以被用于描述分布轮廓，这个几何对象上的每一个点概率密度值相同。图 4.6 为线性近似方法获得的小行星 2020 VV 轨道分布等高面和蒙特卡洛样本在空间中的分布，显示了定轨历元 10、20、50 年后的轨道分布情况。蒙特卡洛样本是数值积分获得的，其分布可以被视为理论上的轨道分布。定轨历元之后较短时间内，比如 10 年，线性近似方法获得的轨道分布与理论轨道分布高度重合；随着轨道动力学传播时间变长，线性近似方法获得的轨道分布与理论轨道分布区别逐渐显现，50 年后的线性近似结果已经明显地偏离了理论轨道分布。

变化线撞击监测系统在通过线性近似方法获得接近历元的轨道分布之后，又通过线性关系获得小行星在目标平面上落点和该时刻轨道参数的映射，这也将导致误差。这部分误差由小行星轨道分布几何特点决定，不同的轨道之间各不相同。变化线方法还涉及另一个误差引入：在变化线上初步寻找虚拟撞击源的过程中，是在变化线上选择样本，而使用变化线来代替置信区域也是一个近似。在小行星观测数据相对较少，定轨精度不高的情况下，置信区域会比较宽，变化线代替置信区域带来的误差会更高 [9]。

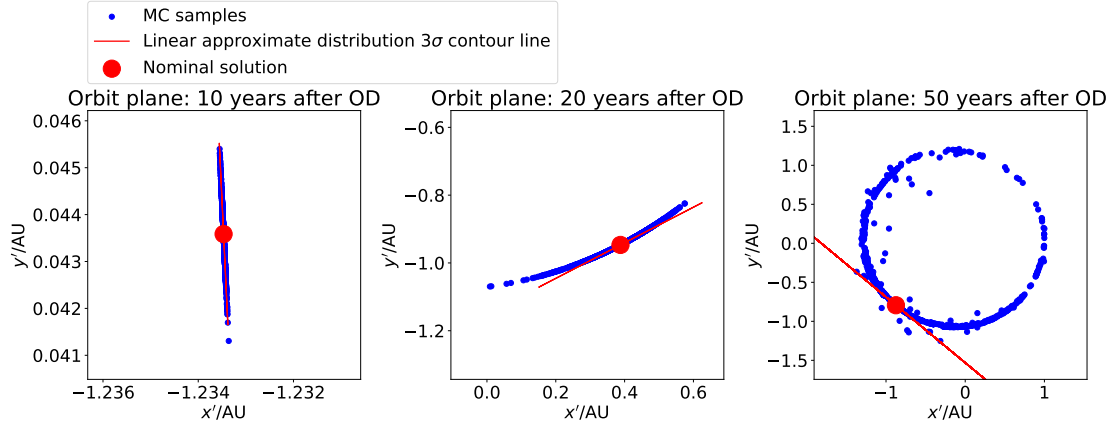


图 4.6 小行星 2020 VV 在轨道平面上的虚拟小行星坐标分布

注：平面是小行星 2020 VV 的轨道平面，原点是日心， $x'$  方向是轨道在黄道面上的升交点方向。蓝色数据点是蒙特卡洛样本虚拟小行星。红色长条区域是线性近似方法获得的轨道参数分布的  $3\sigma$  等高面。红色点是标称轨道。Cartesian 类型轨道参数中速度被取为分布的期望值。

#### 4.4 撞击概率分析实例

选择 NEOCC 风险列表累计撞击概率最大且在 CNEOS 中也给出了预警的 6 个小行星（2023 年 6 月 27 日）进行撞击概率计算。按照前文所描述的蒙特卡洛方法计算撞击概率，计算过程分为 3 部分：定轨、抽样、样本轨道动力学传播以及估计撞击概率。本节使用的轨道计算工具是开源的小行星轨道计算软件 OrbFit。

从小行星中心（Minor Planet Center, MPC）获取这 6 个小行星观测数据记录，定轨。定义轨道参数差异指标  $\delta$ ：

$$\delta \equiv |\vec{X}_1 - \vec{X}_2| = \sqrt{\sum_{i=1}^6 (X_{1i} - X_{2i})^2} \quad (4.23)$$

其中  $\vec{X}_1$  和  $\vec{X}_2$  是轨道参数向量。轨道参数向量需要进行无量纲化处理，距离量纲为 1 AU，角度量纲为 1 rad。所有 6 个小行星定轨结果及其与小行星中心（MPC）和喷气推进实验室（JPL）的 Horizon 的差异指标  $\delta$  如表 4.1。定轨结果之间差异非常小，差别最大的目标的差异指标  $\delta$  为  $10^{-3}$  量级。图 4.7 为 6 个小行星定轨残差随 MJD 的分布。所有小行星的定轨残差均在数个角秒内。综合以上与权威结果的比较以及残差的分布，认为定轨结果可靠。

通过定轨信息，获得小行星轨道分布，即式 (4.4) 所给出的多维 Gauss 分布。在此分布上抽样获得虚拟小行星，每个小行星抽样数目为  $10^4$ 。图 4.8 为小行星 2020 VW 抽样获得的虚拟小行星轨道参数分布。传播虚拟小行星样本的轨道 100 年（到 2124 年 1 月 1 日），判断其是否会与地球发生撞击，记录撞击样本。计算撞击概率及其不确定度，综合 CNEOS 和 NEOCC 给出的相关目标的预警信息，

表 4.1 6 个小行星定轨结果以及差异指标  $\delta$

小行星	$a/\text{AU}$	$e$	$i^\circ$	$\Omega^\circ$	$\omega^\circ$	$M^\circ$	$\delta_{\text{MPC}}$	$\delta_{\text{Horizon}}$	MJD
2020 VW	0.84	0.35	3.04	221.62	41.42	357.09	$3.0 \times 10^{-4}$	$6.7 \times 10^{-4}$	60200
2017 WT28	0.90	0.13	5.77	243.06	35.89	114.09	$3.4 \times 10^{-3}$	$5.9 \times 10^{-4}$	59000
2006 JY26	1.01	0.08	1.44	43.48	273.67	199.26	$1.7 \times 10^{-4}$	$3.8 \times 10^{-3}$	58600
2020 VV	1.12	0.12	0.35	19.65	332.62	74.75	$7.6 \times 10^{-6}$	$7.2 \times 10^{-6}$	59200
2020 CQ1	1.44	0.32	2.80	134.35	342.79	41.71	$6.5 \times 10^{-5}$	$6.9 \times 10^{-4}$	60200
2022 SX55	0.86	0.40	8.88	354.47	225.16	45.58	$9.4 \times 10^{-3}$	$3.4 \times 10^{-3}$	59800

注：MJD 是定轨历元。

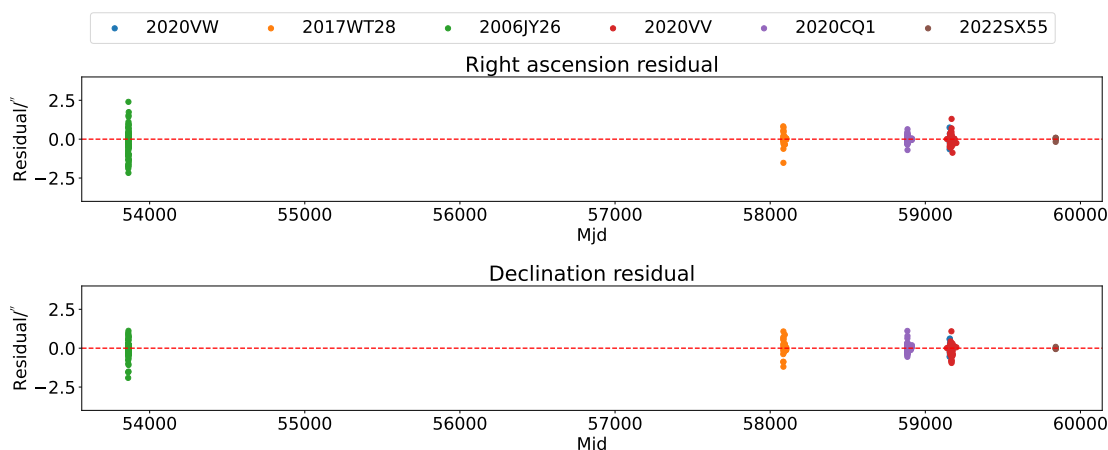


图 4.7 6 个小行星定轨残差

结果如表 4.2。比较三份结果，对所有的目标来说，本文和 CNEOS 的结果都比较接近，差别最大的目标是 2006 JY26，差别为  $2.1\sigma$ 。CNEOS 使用的方法是蒙特卡洛方法的变体 [8]，本质也是蒙特卡洛方法，与本文结果相近符合预期。NEOCC 是变化线撞击监测系统，与另外两份蒙特卡罗方法获得的结果相比，2017 WT28 和 2020 VV 差别显著，其他目标比较接近。

表 4.2 6 个小行星撞击概率分析结果

小行星编号	MC	CNEOS	NEOCC	不确定度
2020 VW	0.0065	0.0070	0.0078	0.00080
2017 WT28	0.0140	0.0120	0.0070	0.00117
2006 JY26	0.0067	0.0050	0.0068	0.00082
2020 VV	0.0024	0.0023	0.0052	0.00049
2020 CQ1	0.0047	0.0046	0.0045	0.00068
2022 SX55	0.0036	0.0040	0.0043	0.00060

选择小行星 2020 VV 进行进一步细致分析，样本数提升为  $10^5$  再次计算。得到的撞击概率为  $2.22 \times 10^{-3}$ ，不确定度为  $1.49 \times 10^{-4}$ ，与 CNEOS 结果差别为  $0.2\sigma$ 。为了研究小行星 2020 VV 的撞击样本特征，做出小行星 2020 VV 的撞击样本接近日期分布图 4.9，发现了 34 个不同的年内存在可撞击的虚拟小行星样本，其中最主要的撞击样本分布处于 2056 年 10 月。

对 2056 年 10 月的撞击样本展开分析，图 4.10 是小行星 2020 VV 在 2056 年 10 月的撞击样本的撞击时间分布，时间跨度很短，在 3 天之内。时间分布明显

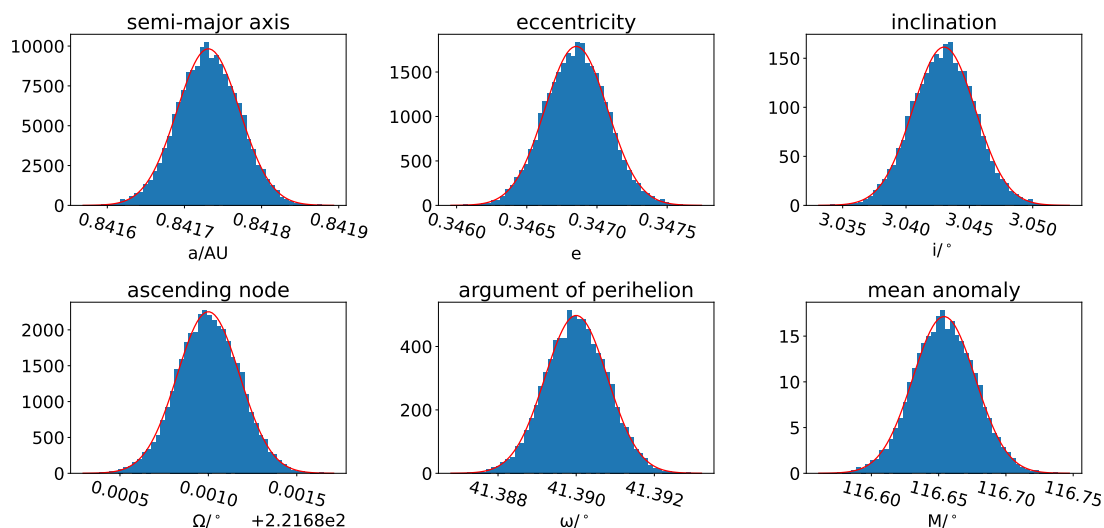


图 4.8 小行星 2020 VW 的虚拟小行星轨道参数分布

注：红色曲线是轨道参数分布的 Gauss 分布理论值。

分成了 2 个区域，左侧区域的 MJD 平均值 72279.72，右侧区域的 MJD 平均值 72282.01，这就是本文给出的 2056 年 10 月的 2 个撞击事件预警。CNEOS 上在 2056 年 10 月内同样给出了两个撞击事件预警，MJD 分别是 72279.65 和 72282.00，两个撞击事件发生时间与本文得出的结果差别分别为 0.07 天和 0.01 天，认为和本文结果一致。

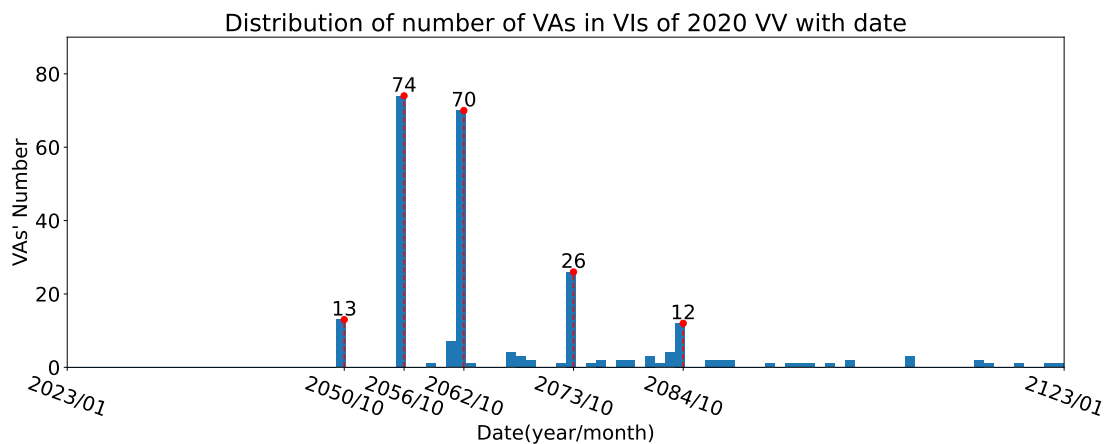


图 4.9 小行星 2020 VV 可撞击虚拟小行星数目随接近日期的频数分布

注：横轴是日期，横轴上直方图的每一个条的时间跨度为条所处的年。

理论上这 2 个撞击事件属于轨道参数空间中不连续的虚拟撞击源，因此其撞击结果也不连续。图 4.11 用两个互相垂直的平面展示目标平面坐标系，左图是目标平面，右图是与目标平面垂直的平面。轨道分布存在 3 条痕迹，在右图中标出了序号。虚拟撞击源是参数空间中可以撞击的子空间，所以 3 条痕迹分别属于 3 个不连续的虚拟撞击源。根据目标平面的定义，图像里的虚拟小行星相对



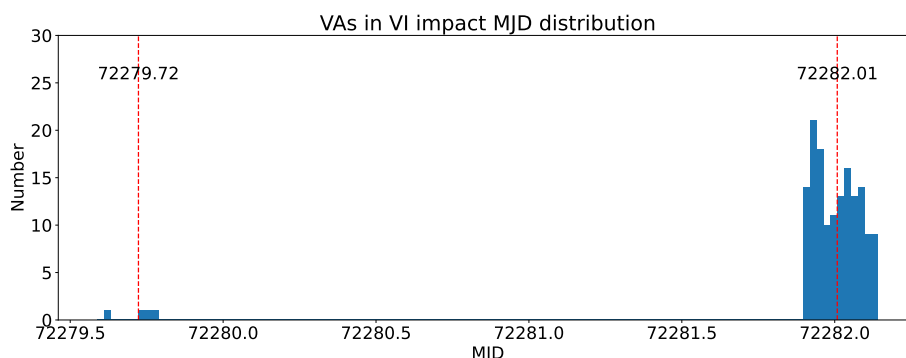


图 4.10 小行星 2020 VV 2056 年 10 月的可撞击虚拟小行星 MJD 分布

注：本图像是样本数为  $2 \times 10^5$  的另一次蒙特卡洛计算分析。两条竖直的红色虚线代表两个聚集区域样本的 MJD 的平均值所处的坐标。

地球的运动速度方向大致垂直于目标平面，所以这些虚拟小行星相对地球有显著的垂直于目标平面的运动趋势，也就是平行于右图平面的运动趋势。随着时间变化，地球穿过 3 条集中的轨道分布，就会获得 3 个撞击事件。然而，本文和 CNEOS 只找到 2 个虚拟撞击源。先发生的是 1 号虚拟撞击源，它相对稀疏，代表其发生概率相对较低，对应图 4.10 的左侧集中区域；后发生的是 2 号虚拟撞击源，对应图 4.10 的右侧集中区域。而 3 号虚拟撞击源则没有被发现撞击样本。

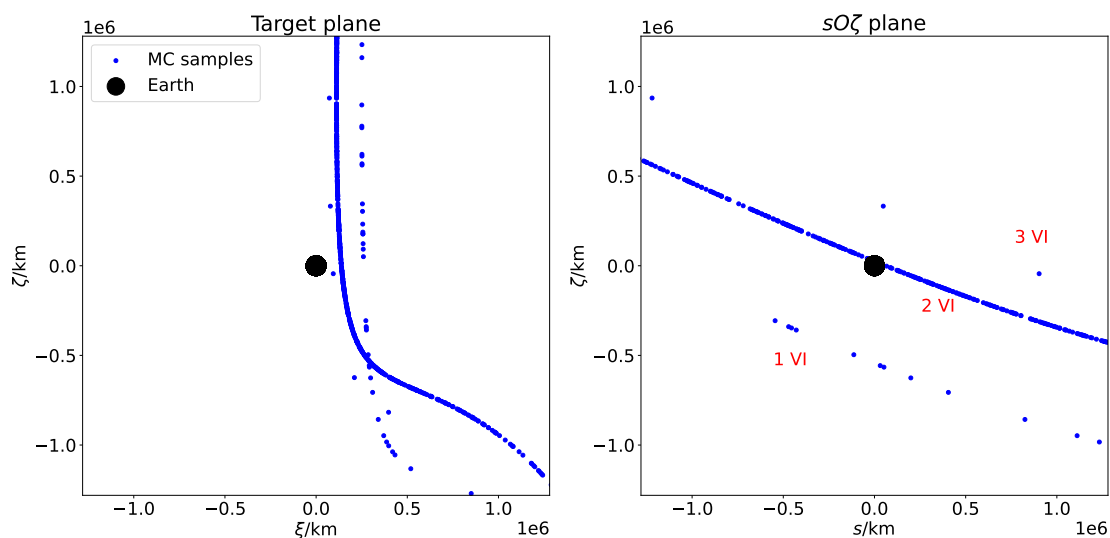


图 4.11 小行星 2020 VV 的目标平面坐标系内虚拟小行星分布

注：虚拟小行星样本坐标是历元 MJD 72281.99 的轨道坐标，此历元是所有 2056 年 10 月的撞击样本的撞击历元平均值。此目标平面坐标系构建方式为：原点选择为地心，目标平面的法方向  $s$  是标称轨道的地心速度方向，纵坐标方向  $\zeta$  是地球的日心速度在平面上的投影方向的反向， $\xi\zeta s$  构成右手系。左图  $\xi O\zeta$  平面即为目标平面。右图标出了 3 条轨道分布的痕迹的序号，用来指代不同的虚拟撞击源。

表 4.3 汇总小行星 2020 VV 在 2056 年 10 月内的虚拟撞击源信息。与本文和 CNEOS 的蒙特卡洛撞击监测系统不同，NEOCC 和 NEODYs 这两个变化线撞击监测系统可以找到所有的 3 个虚拟撞击源。变化线撞击监测系统分析变化线

样本与地球的接近距离函数，通过寻找函数的极值 [35] 来寻找虚拟撞击源，这个过程是对连续函数进行分析，所以不会因为样本数不足而找不到虚拟撞击源。相对地，蒙特卡洛撞击监测系统则可能因为样本数不足而漏掉小撞击概率的虚拟撞击源。

**表 4.3 小行星 2020 VV 2056 年 10 月虚拟撞击源**

MJD 编号	系统	MC	CNEOS	NEOCC	NEODyS
1		72279.72	72279.65	72279.616	72279.640
2		72282.01	72282.00	72281.914	72282.002
3		-	-	72282.003	72282.128

## 4.5 本章小结

本章详细描述了目前所发展的撞击概率的计算方法。描述了撞击分析的解析理论，引入了撞击分析相关的有用的概念。描述了分析撞击概率的方法，可以通过最小二乘定轨过程获得轨道以及轨道分布，进而分析撞击概率。如果目标观测数据较少，例如观测弧不足  $1^\circ$ ，则不能获得较高精度的轨道和轨道分布，分析方法也需要做出改变。在可以通过最小二乘定轨 (Least Squares, LS) 收敛求解的情况下，置信区域会呈现出 2 维盘状的特征，导致轨道分布置信区域无法用变化线代表，可以使用 2 维变化线处理；有些情况，最小二乘定轨不收敛，可以通过允许区域 (The Admissible Region, AR) 分析轨道分布。通过分析变化线撞击监测系统所用到的线性近似方法，得出此方法获得的轨道分布相对于理论轨道分布的偏离随着轨道传播时间变长逐渐显著的结论。对小行星实例进行了撞击概率计算：选择了 NEOCC 风险列表累计撞击概率最大且在 CNEOS 中也给出了预警的 6 个小行星 (2023 年 6 月 27 日)，通过最小二乘定轨获得小行星的轨道信息，进而获得轨道分布。使用蒙特卡洛方法计算了撞击概率及其不确定度，与 CNEOS 相比，差别最大的目标差别为  $2.1\sigma$ 。选择了小行星 2020 VV 这一两种撞击监测系统结果差别较大的目标进行进一步细致分析，样本数提升 10 倍，计算获得的撞击概率与 CNEOS 结果差别为  $0.2\sigma$ 。分析了小行星 2020 VV 在 2056 年 10 月内的撞击样本的时间分布和空间分布，给出了和 CNEOS 一致的撞击事件预警。此外还发现，变化线撞击监测系统可以找到本应该存在的，但没有被蒙特卡洛撞击监测系统找到的虚拟撞击源。对比不同的小行星撞击概率分析方法原理可以知道：蒙特卡洛方法对计算资源的需求高，理论上计算获得的撞击概率的分辨率是抽样样本数的倒数，要得到高分辨率的估计结果，需要大量抽样并计算轨道传播；变化线方法对于算力要求相对小得多，只需要在寻找虚拟撞击源的过程中进行相对少量的轨道传播计算。结合本章的研究内容可以得出结论，蒙特卡洛撞击监测系统和变化线撞击监测系统目前各有优劣：前者不会引入线性近似方法带来的误差，但计算成本高；后者所用到的线性近似方法将带来误差，但可以找出一些撞击概率低的、会被前者遗漏的虚拟撞击源，并且计算成本相对较低。

## 第 5 章 总结和展望

本文描述了现代天文学研究中所涉及到的时间系统和坐标系，为全文研究提供基础。描述了小行星定轨计算方法和小行星动力学模型。定轨是研究小行星轨道的基本过程，定轨精度的研究以及小行星撞击概率的分析都以定轨为基础。评估了地面光学观测提升小行星定轨精度效能，分析了影响定轨精度的因素以及相应的影响力强弱。详细描述了目前所发展的撞击概率的计算方法。通过分析变化线撞击监测系统所用到的线性近似方法，得出此方法获得的轨道分布相对于理论轨道分布的偏离随着轨道传播时间变长逐渐显著的结论。对一些小行星实例进行了撞击概率计算：选择了 NEOCC 风险列表累计撞击概率最大且在 CNEOS 中也给出了预警的 6 个小行星（2023 年 6 月 27 日），通过最小二乘定轨获得小行星的轨道信息，进而获得轨道分布。使用蒙特卡洛方法计算了撞击概率及其不确定度，与 CNEOS 相比，差别最大的目标差别为  $2.1\sigma$ 。选择小行星 2020 VV 这一两种撞击监测系统结果差别较大的目标进行进一步细致分析，样本数提升 10 倍，计算获得的撞击概率与 CNEOS 结果差别为  $0.2\sigma$ 。分析了小行星 2020 VV 在 2056 年 10 月内的撞击样本的时间分布和空间分布，给出了和 CNEOS 一致的撞击事件预警。此外还发现，变化线撞击监测系统可以找到本应该存在的，但没有被蒙特卡洛撞击监测系统找到的虚拟撞击源。得出结论，蒙特卡洛撞击监测系统和变化线撞击监测系统目前各有优劣：前者不会引入线性近似方法带来的误差，但计算成本高；后者所用到的线性近似方法将带来误差，但可以找出一些撞击概率低的、会被前者遗漏的虚拟撞击源，并且计算成本相对较低。

相关工作的展望：

- 第 3 章图 3.2 画出的小行星 2015 XF261 50 年的定轨精度演化上可以看出，定轨精度演化似乎存在着大时间尺度的变化规律。推测是由于与地球接近距离的变化，导致地球引力逐年变化，进而导致大时间尺度上定轨精度的变化，有待进一步研究。
- 第 4 章介绍的重要性抽样改进算法，是目前最新使用的抽样方法。对于已经包含了地球的伪观测点的某个组来说，地球的伪观测点距离真实观测点所确定的轨道越近，组内用来进行重要性抽样所使用的新分布的不确定度越小，分布越集中，定出组内不确定度阈值，以此确定每个组的轨道参数空间的体积，这样会导致这个组在轨道参数空间的体积更小。也就是说，地球伪观测点相对观测点的准直越好，抽样参数空间越小，这是不合理的。地球伪观测点准直越好，说明这个区域越可能发生撞击，重要性抽样使用的参数空间空间本应该越大。应该使用一种动态调整体积的机制进行处理。

- 目前的变化线撞击监测系统和蒙特卡洛撞击检测系统各有优缺点：前者计算量小但会引入误差，后者计算量大但会漏掉撞击事件。然而，变化线方法寻找撞击事件的算法可以和重要性抽样蒙特卡洛算法结合起来，通过变化线将全部撞击事件找到，然后通过重要性抽样，在不引入线性近似的情况下获得精度较高的撞击概率。

## 参 考 文 献

- [1] 奔走天地间: 欧阳自远科普文选[M]. 奔走天地间: 欧阳自远科普文选, 2014.
- [2] 吴伟仁, 龚自正, 唐玉华, 等. 近地小行星撞击风险应对战略研究[J]. 中国工程科学, 2022, 24(2): 12.
- [3] 李鑫冉, 赵海斌, 唐玉华, 等. 近地小行星碰撞概率计算方法[J]. 深空探测学报(中英文), 2023, 10(4): 357-368.
- [4] 赵海斌. 近地小行星探测和危险评估[J]. 天文学报, 2010(03): 106-107.
- [5] MILANI A. The asteroid identification problem: I. recovery of lost asteroids[J/OL]. *Icarus*, 1999, 137(2): 269-292. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103599960451>. DOI: <https://doi.org/10.1006/icar.1999.6045>.
- [6] VEREŠ P, FARNOCCHIA D, CHESLEY S R, et al. Statistical analysis of astrometric errors for the most productive asteroid surveys[J/OL]. *Icarus*, 2017, 296: 139-149. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103517301987>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.05.021>.
- [7] MILANI A, CHESLEY S, CHODAS P, et al. Asteroid close approaches: Analysis and potential impact detection[J]. *Asteroids III*, 2002.
- [8] ROA J, FARNOCCHIA D, CHESLEY S R. A novel approach to asteroid impact monitoring [J/OL]. *The Astronomical Journal*, 2021, 162(6): 277. <https://dx.doi.org/10.3847/1538-3881/ac193f>.
- [9] TOMMEI G. On the impact monitoring of near-earth objects: Mathematical tools, algorithms, and challenges for the future[J/OL]. *Universe*, 2021, 7(4). <https://www.mdpi.com/2218-1997/7/4/103>. DOI: 10.3390/universe7040103.
- [10] FUENTES-MUÑOZ O, SCHEERES D J, FARNOCCHIA D, et al. The hazardous km-sized neos of the next thousands of years[J/OL]. *The Astronomical Journal*, 2023, 166(1): 10. <https://dx.doi.org/10.3847/1538-3881/acd378>.
- [11] ALESSIO D, DEL VIGNA A. The manifold of variations: hazard assessment of short-term impactors[J/OL]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2020, 132. DOI: 10.1007/s10569-020-09990-4.
- [12] MILANI A, GRONCHI G F, KNEŽEVIĆ Z, et al. Orbit determination with very short arcs: Ii. identifications[J/OL]. *Icarus*, 2005, 179(2): 350-374. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103505002459>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2005.07.004>.
- [13] FARNOCCHIA D, CHESLEY S R, MICHELI M. Systematic ranging and late warning asteroid impacts[J/OL]. *Icarus*, 2015, 258: 18-27. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:>

- 118396522.
- [14] SPOTO F, VIGNA A D, MILANI A, et al. Short arc orbit determination and imminent impactors in the gaia era[J/OL]. *Astronomy & Astrophysics*, 2018. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:55246181>.
- [15] SOLIN O, GRANVIK M. Monitoring near-earth-object discoveries for imminent impactors [J/OL]. *Astronomy & Astrophysics*, 2018, 616. DOI: 10.1051/0004-6361/201832747.
- [16] 刘林. 航天动力学引论[M]. 南京大学出版社, 2006.
- [17] FARNOCCHIA D, CHESLEY S, VOKROUHLICKÝ D, et al. Near earth asteroids with measurable yarkovsky effect[J/OL]. *Icarus*, 2013, 224(1): 1-13. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103513000456>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2013.02.004>.
- [18] YE-ZHI S, YONG H, XIAO-GONG H, et al. Spacecraft orbit determination with the b-spline approximation method[J/OL]. *Chinese Astronomy and Astrophysics*, 2014, 38(2): 172-185. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0275106214000290>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chinastron.2014.04.005>.
- [19] CHESLEY S R, CHODAS P W, MILANI A, et al. Quantifying the risk posed by potential earth impacts[J/OL]. *Icarus*, 2002, 159(2): 423-432. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103502969101>. DOI: <https://doi.org/10.1006/icar.2002.6910>.
- [20] MILANI A, VALSECCHI G B. The asteroid identification problem: Ii. target plane confidence boundaries[J/OL]. *Icarus*, 1999, 140(2): 408-423. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103599961353>. DOI: <https://doi.org/10.1006/icar.1999.6135>.
- [21] BENDER D F. Close-range gravitational interactions[J/OL]. *Celestial mechanics*, 1976, 14 (1): 151-151. <https://doi.org/10.1007/BF01247142>.
- [22] CARUSI A, VALSECCHI G B, GREENBERG R. Planetary close encounters: geometry of approach and post-encounter orbital parameters[J/OL]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1990, 49(2): 111-131. <https://doi.org/10.1007/BF00050709>.
- [23] VALSECCHI G, MILANI A, GRONCHI G F, et al. Resonant returns to close approaches: Analytical theory[J/OL]. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20031039>, 2003, 408. DOI: 10.1051/0004-6361:20031039.
- [24] CHODAS P W. Orbit uncertainties, keyholes, and collision probabilities[J/OL]. *Bulletin of the American Astronomical Society*, 1999, 31: 1117. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:117770074>.
- [25] CHODAS P W, YEOMANS D K. The orbital motion and impact circumstances of comet shoemaker-levy 9[C/OL]//1996. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118066782>.
- [26] RICE J A, RICE J A. *Mathematical statistics and data analysis: volume 371*[M]. Thomson/Brooks/Cole Belmont, CA, 2007.

- [27] MILANI A, SANSATURIO M, TOMMEI G, et al. Solutions for asteroid orbits: Computational procedure and applications[J/OL]. *Astronomy and Astrophysics*, 2005, 431. DOI: 10.1051/0004-6361:20041737.
- [28] Del Vigna A, MILANI A, SPOTO F, et al. Completeness of impact monitoring[J/OL]. *Icarus*, 2019, 321: 647-660. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103518303324>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2018.12.028>.
- [29] TSUJII T. Near-parabolic cometary flux in the outer solar system[C]//CLUBE S V M, YABUSHITA S, HENRARD J. *Dynamics and Evolution of Minor Bodies with Galactic and Geological Implications*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1992: 271-274.
- [30] DYBCZYŃSKI P A, JOPEK T J, SERAFIN R A. On the minimum distance between two keplerian orbits with a common focus[J/OL]. *Celestial mechanics*, 1986, 38: 345-356. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119378487>.
- [31] GRONCHI G F. An algebraic method to compute the critical points of the distance function between two keplerian orbits[J/OL]. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 2005, 93: 295-329. DOI: 10.1007/s10569-005-1623-5.
- [32] WISNIOWSKI T, RICKMAN H. Fast geometric method for calculating accurate minimum orbit intersection distances (moids)[J]. *Acta Astronomica*, 2013, 63: 293-307.
- [33] HEDO J M, RUÍZ M, PELÁEZ J. On the minimum orbital intersection distance computation: a new effective method[J/OL]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2018, 479 (3): 3288-3299. <https://doi.org/10.1093/mnras/sty1598>.
- [34] GRONCHI G F, TOMMEI G. On the uncertainty of the minimal distance between two confocal keplerian orbits[J/OL]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 2007, 7(4): 755-778. <https://www.aims sciences.org/article/id/93cc3928-6b66-4c22-9ca5-812cfe248e7>. DOI: 10.3934/dcdsb.2007.7.755.
- [35] MILANI A, CHESLEY S R, SANSATURIO M E, et al. Nonlinear impact monitoring: line of variation searches for impactors[J/OL]. *Icarus*, 2005, 173(2): 362-384. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019103504002982>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2004.09.002>.



## 致 谢

时光荏苒，岁月如梭，三年硕士研究生生活即将结束。回顾往昔，有许多人对我提供了帮助，在此表达我诚挚的感谢。

首先，感谢我在中国科大的导师，朱青峰老师。感谢三年时间里朱老师对我学业以及生活上的关心和帮助。还记得转博答辩前夕，夜里十二点半帮我修改答辩幻灯片。类似的种种我都记在心里。

感谢我在上海天文台的联合培养导师，宋叶志老师。在我研究遇到瓶颈的时期，接收我作为联合培养学生，为我提供指导。来上海台的时间不长，这段时间里，宋老师为我解答疑问，对我的研究工作提供了很多帮助。

感谢李旭志师兄对我的关心和照顾，刚开始读研，对科研和读研还不了解，有个博后师兄可以随时答疑解惑让我倍感踏实。也要感谢其他师兄、师弟、师姐、师妹的帮助和支持，也感谢我的朋友们的关心和陪伴，使我的研究生生活更添色彩。

感谢我的家人，家庭的养育为我提供优厚的生活条件和丰富的精神世界。求学之路虽漫长，先天带有的一些天赋，让求学路不太艰难，家庭对我的支持也让我可以安心自己的学习生活。家庭的养育带给我的乐观、真诚、友善的性格会是我一生的财富。

## 在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

### 已发表论文

1. 李旭志, 朱青峰, 丁旭, 徐小慧, 郑航, 邱锦盛, 刘明超. Physical parameters of 11,100 short-period asas-sn eclipsing contact binaries. The Astrophysical Journal Supplement Series, 271(1):32, mar 2024. <https://doi.org/10.3847/1538-4365/ad226a>
2. 徐小慧, 朱青峰, 李旭志, 李斌, 郑航, 邱锦盛, 赵海斌. A New Period Determination Method for Periodic Variable Stars[J]. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 134(1041):114507, November 2022. <http://dx.doi.org/10.1088/1538-3873/ac9e1b>.

### 投稿中

1. 郑航, 朱青峰, 宋叶志等. 小行星撞击概率的分析方法的研究. 天文学报.