



同濟大學

TONGJI UNIVERSITY

博士学位论文

# 低轨卫星实现 GNSS 增强若干关键技术研究

姓 名： 孟令东

学 号： 1610961

所在院系： 测绘与地理信息学院

学科门类： 工学

学科专业： 测绘科学与技术

指导教师： 王解先 教授

副指导教师： 陈俊平 研究员

二〇二二年一月



同濟大學  
TONGJI UNIVERSITY

A dissertation submitted to

Tongji University in conformity with the requirements for

the degree of Doctor of Engineering

**Research of the Some Key Technologies for  
achieveing GNSS Augmentation with LEO  
Satellites**

Candidate:	Lingdong Meng
Student Number:	1610961
School/Department:	College of Surveying and Geo-informatics
Discipline:	Engineering
Major:	Surveying and Mapping
Supervisor:	Prof. Wang Jiexian
Vice Supervisor:	Prof. Chen Junping

January, 2022

## 摘要

目前,越来越多的低轨卫星将会具备导航功能,使用低轨卫星增强卫星导航定位已经成为研究热点之一。低轨卫星发送信号强度高与空间分布变化迅速的特点,能够弥补现有的基于高、中轨卫星运行的全球卫星导航系统(Global Navigational Satellite System, GNSS)的不足,从而实现快速精密定位。低轨卫星增强 GNSS 仍处于理论论证阶段,本文针对在构建低轨卫星增强 GNSS 系统过程中,可能遇到的若干关键技术进行研究,主要内容与结论如下:

- (1) 如何设计广播星历是实现低轨卫星增强 GNSS 的关键技术之一。由于低轨卫星运行状态相比高、中轨卫星更为复杂,现有的 GNSS 广播星历模型不能直接用于拟合低轨卫星精密轨道。此外,考虑到在未来的低轨卫星增强星座设计方案中,不排除使用小偏心率,小轨道倾角与极轨道低轨卫星。此时,由于北斗等导航系统使用的轨道根数型广播星历存在奇点问题,造成难以成功拟合相应参数。本文基于开普勒轨道根数、第一类无奇点轨道根数、第二类无奇点轨道根数与基于第二类无奇点的改进轨道根数,分别设计了适用于低轨卫星的广播星历模型。并使用仿真的与真实的低轨卫星精密轨道数据对这几类广播星历设计方案的拟合精度进行测试。实验结果表明:基于第二类无奇点改进轨道根数设计的广播星历模型可以克服奇点问题,为未来的低轨卫星广播星历设计提供了有益的参考;
- (2) 鉴于矢量积分型广播星历具有良好的无奇异特性,本文以标准的格洛纳斯(GLObalnaya NAvigationnaya Sputnikovaya Sistema, GLONASS)广播星历模型为基础,结合低轨卫星的运动特点,从另外一个角度设计低轨卫星广播星历。同样使用仿真的与真实的低轨卫星精密轨道数据进行测试,实验结果表明:矢量积分型广播星历具有良好的无奇异特性,对于小偏心率、小轨道倾角与极轨道卫星都适用,具备较好的扩展能力;
- (3) 对基于轨道根数型与矢量积分型广播星历设计的低轨卫星广播星历,进行比较分析。实验结果表明:矢量积分型广播星历,具备更优的无奇异特性。对于轨道根数型广播星历,即使采用改进的第二类无奇点轨道根数,尽可能去除奇异问题带来的影响,迭代拟合广播参数时一般仍需要 7 至 8 次才能收敛。而矢量积分型广播星历拟合更多的广播星历参数,却只需要 3 至 4 次即可收敛。此外,随着随轨道偏心率增大,轨道根数型广播星历拟合精度迅速下降,但矢量积分型广播星历仍然能保持相对稳定;轨道根数型广播星历更适合描述长时间卫星运动,而矢量积分型广播星历随着拟合时

间增长，相比于轨道根数型广播星历，拟合精度迅速下降；

- (4) 对于广播星历参数的拟合问题，进行了比较深入的研究。传统的广播星历拟合算法，使用解析法计算偏导数，其过程非常繁琐且容易出错。针对这个问题，本文使用数值导数法计算偏导数，减轻计算量。并采用德国地学研究中心发布的真实 GPS (Global Positioning System, GPS) 卫星精密星历，分别采用解析法与数值导数法计算偏导数，验证方法的有效性。实验结果表明：采用数值导数法几乎不会对星历拟合精度造成影响，能够极大减少计算工作量。对于星历参数拟合方法，本文分别采用传统的最小二乘法与基于 QR 分解的迭代算法拟合广播星历参数。实验结果表明：使用 QR 方法，可以显著缓解法方程病态造成的不利影响，有效减少迭代次数，提高拟合成功率；
- (5) 高、中和低轨道卫星联合精密定位的构想，已经有不少学者进行了理论论证，相关结果表明：低轨卫星在 GNSS 的未来发展将会扮演重要角色。但是在构建低轨卫星增强 GNSS 系统过程中，需要对星座设计方案预先进行性能评估，为此本文提出了扩展的概率模型。该模型仅需一些基本的星座参数即可在全球范围内评估星座设计方案性能。使用真实的与仿真的精密星历，对扩展的概率模型进行了验证并分析比较了北斗三号星座与 GPS 星座在全球范围内的性能特点。基于本文提出的扩展概率模型，还论述了另外一种类型卫星：椭圆轨道卫星在未来的 GNSS 发展过程中与低轨卫星搭配使用时，可能发挥的作用。实验结果表明：在现有 GNSS 星座的基础上，加入椭圆轨道卫星之后，将有效改善高纬度地区卫星可见性与空间分布状态。而且，椭圆轨道卫星还可以解决现有基于地球同步卫星的星基增强系统，无法覆盖高纬度地区的问题，能够为高纬度特别是两极地区提供星基增强服务。最后，构建了高、中、低与椭圆轨道卫星组成的 GNSS+星座，并使用扩展的概率模型在全球范围内对该星座卫星可见性与卫星空间分布状态进行评估。相比现有的 GNSS 星座，优势明显；
- (6) 周跳问题是精密定位数据预处理的重要问题之一。有效处理周跳问题，是实现高精度的定位的重要前提。由于低轨卫星增强 GNSS 仍处于总体理论论证阶段，周跳问题缺乏讨论。目前，虽然部分研究结果已经指出：伪距观测值噪声及其多路径效应对多频周跳探测修复影响显著。但现有算法都未考虑如何对伪距观测值进行降噪，以提升周跳探测修复成功率。本文首先对相位平滑伪距方法进行分析，之后提出采用相位平滑伪距的方法，对伪距观测值进行降噪。采用真实的高、中轨卫星与仿真的低轨卫星三频观测数据，对本方法进行测试。实验结果表明：当伪距观测值经过相位观测

值平滑去噪之后，周跳探测修复成功率显著提高。

**关键词：**低轨卫星增强 GNSS，广播星历拟合，广播星历设计，低轨卫星，椭圆轨道卫星，多频周跳探测修复

## Abstract

Currently, multi Global Navigational Satellite System (GNSS) with low earth orbit (LEO) constellation augmentation has become a research topic of much interest. More and more LEO satellites will provide navigation services. Benefiting their large geometric variations and stranger signals, the drawbacks of current GNSS can be complemented, therefore, precise positioning with less time can be achieved. Since LEO satellites enhance GNSS still in the stage of theoretical demonstration, some specific technical issues are short of researches. In this paper, several key technologies that may appear in the process of constructing GNSS augmented by LEO satellites are studied. The main content and conclusions are as follows:

- (1) The design of broadcast ephemeris is one of the key technologies to realize LEO enhance GNSS. Because the operating status of LEO satellites is more complicated than high and medium orbit satellites, the existing GNSS broadcast ephemeris model cannot be directly used to fit the precision orbits of LEO satellites. In addition, the emergence of small eccentricity, small orbit inclination, and polar orbit LEO satellites may be applied in the future designs of LEO satellites enhanced constellations. The orbital element type broadcast ephemeris used by navigation systems, such as Beidou, are influenced by singularity problems and it is difficult to successfully fit the corresponding parameters in these cases. In this paper, based on Kepler orbital elements, the first or second non-singular orbital elements, and the improved second non-singular orbital elements, respectively, broadcast ephemeris models suitable for LEO satellites are designed. And the fitting accuracy of these types of broadcast ephemeris designs is tested using simulated and real LEO satellites' precise orbit data. It is found that the broadcast ephemeris model based on the improved second non-singular orbital elements can overcome the singularity problems and provide a valuable reference for the future LEO satellites broadcast ephemeris design.
- (2) Considered the better non-singularity characteristic of integration-type ephemeris model, in this paper, from another point of view, enhanced integration-type broadcast ephemeris models suitable for the motion status of LEO satellites are proposed. Similarly, their performance is verified by simulated and real LEO

satellites' precise orbit data. It is found that integration-type ephemeris models have an exceptional non-singularity characteristic, and they are suitable for small eccentricity orbits, small inclination, and polar orbits. Integration-type ephemeris models have better-extended ability.

- (3) Orbital elements and integration-type ephemeris models are compared. Experiment results show that integration-type ephemeris models have better non-singularity character. Although improved second non-singular orbital elements are used to remove the influence of singularity, after 7 to 8 times iteration can be convergence when ephemeris parameters are fitted. However, for the integration-type model, only 3 to 4 times are needed. Otherwise, with the increase of eccentricity, for orbital elements ephemeris models, their fit accuracy decreases a lot. But for integration-type ephemeris models, their fit accuracy can keep still be stable. For the long-time description of satellites' motion, orbital elements ephemeris models are more suitable. For integration-type ephemeris models, their fit accuracy decreases a lot, with the extent of fit interval.
- (4) For how to fit broadcast ephemeris problems, related deep studies have been carried out. In conventional broadcast ephemeris parameters fit algorithms, the analysis method is used to calculate the partial derivative of which the processes are laborious and prone to errors. Aiming at this problem, the method of calculating numerical derivative to calculate the partial derivative of the ephemeris parameters, which is convenient and straightforward. To verify the performance of numerical derivative, real Global Positioning System (GPS) satellites precise ephemeris released by the German research center for geosciences are used to fit ephemeris parameters. Experiments results show that using the method of numerical derivative, almost no effect on fit accuracy and workload in the calculation are released a lot. For the strategy of fit ephemeris parameters, in this paper, traditional least squares and QR factorization are compared and analyzed. Experiments results show that QR factorization can release the effect of ill-conditioned normal equations, decrease iteration times and improve the fit success rate.
- (5) The idea of precise position combined high, medium, and low earth orbit satellites has been studied by a lot of researchers. Related experiments results show that LEO satellites will play an important role in the future development of GNSS. However, in the process of establishing LEO satellites to enhance GNSS, the performance of constellations should be evaluated. Therefore, in this paper, the extended

probability model is proposed which can evaluate the performance of one constellation on a global scale only using some basic parameters. The extended probability is verified by using real and simulated precise ephemeris. And the characteristics of Beidou-3 and GPS constellation on a global scale are analyzed. Based on the extended probability model, the role of another type of satellite, elliptical orbital satellites may play is studied. Experiments results show that if elliptical orbital satellites are introduced, constellation geometry distribution and satellites visibility in high latitude regions will be improved. What's more, satellite-based augmentation services in high latitudes especially in polar regions can be provided by elliptical orbital satellites, which cannot be covered by the current GEO-based augmentation system. Last, the performance of the GNSS+ constellation, in which high, medium, low elliptical orbital satellites are included, is evaluated by the extended probability model on a global scale. Compared with current GNSS constellations, the GNSS+ constellation performs much better.

- (6) One of the most critical problems in data preprocessing is cycle slip. Solving properly cycle slip is one of the important preconditions for achieving high precision positioning. Because the idea of low earth orbit satellites enhances GNSS, still under the stage of theoretical argument, some specific technical problems, such as cycle slip, are short of study. Currently, although some studies have pointed out that the pseudo-range noise and multipath effects have an obvious effect, all almost recent algorithms don't consider how to reduce the effect of observation noise and multi-path. In this paper, we analyze the performance of different carrier smoothing of code pseudo-ranges methods. Then a carrier smoothing of code is used to aid the triple-frequency cycle slip detection and repair. Real high, medium earth orbit satellites observations, and simulated low earth orbit satellites observations are used to verify this cycle slip detection and repair method. Experiments results show that after the observations noise is reduced, the success rate of cycle slip detection and repair is improved obviously.

**Key Words:** Low earth orbit satellites, Low earth orbit satellites enhance GNSS, Broadcast ephemeris parameters fitting, Broadcast ephemeris design, Elliptical orbit satellite, Multi-frequency cycle slip detection and repair



## 目 录

第 1 章 引言.....	1
1.1 国内外研究现状.....	1
1.2 研究意义.....	7
1.3 本文拟解决的核心技术与主要内容 .....	8
1.3.1 本文拟解决的核心技术问题.....	8
1.3.2 主要内容.....	10
1.4 本章小结.....	11
第 2 章 常规的广播星历模型及其精度评定方法 .....	12
2.1 广播星历参数模型精度评定方法 .....	12
2.2 矢量积分型广播星历模型 .....	14
2.2.1 参数模型.....	15
2.2.2 用户算法.....	15
2.3 轨道根数型广播星历模型 .....	16
2.3.1 参数模型.....	16
2.3.2 用户算法.....	17
2.4 广播星历参数拟合方法.....	19
2.4.1 卫星位置矢量对 GPS 18 参数星历的偏导数推导 .....	20
2.4.2 数值导数法计算偏导数.....	36
2.4.3 基于迭代最小二乘的参数估计方法.....	37
2.4.4 基于 QR 分解的参数估计方法 .....	38
2.4.5 迭代退出条件.....	39
2.4.6 迭代最小二乘与 QR 分解估计方法的比较.....	40
2.4.7 解析法与数值导数法计算偏导数参数估计比较 .....	43
2.5 本章小结.....	45
第 3 章 基于轨道根数的低轨卫星广播星历设计 .....	47
3.1 基于 GPS LNAV/CNAV 的广播星历设计.....	47
3.1.1 广播星历设计方案.....	47
3.1.2 不同广播星历模型拟合实验.....	48
3.2 基于第一类无奇点根数的广播星历设计 .....	50
3.2.1 基于第一类无奇点根数的 16 参数广播星历 .....	50
3.2.2 用户算法.....	51
3.2.3 基于第一类无奇点根数的广播星历设计 .....	53
3.2.4 不同广播星历模型拟合实验.....	54
3.3 基于第二类无奇点根数的广播星历设计 .....	55

3.3.1 基于第二类无奇点根数的 16 参数广播星历 .....	56
3.3.2 用户算法 .....	57
3.3.3 基于第二类无奇点的广播星历设计 .....	59
3.3.4 不同广播星历模型拟合实验 .....	60
3.4 基于第二类无奇点改进根数的广播星历设计 .....	62
3.4.1 基于第二类无奇点改进根数的 16 参数广播星历 .....	62
3.4.2 用户算法 .....	63
3.4.3 基于第二类无奇点改进根数的广播星历设计 .....	66
3.4.4 不同广播星历模型拟合实验 .....	66
3.5 几类轨道根数型广播星历的比较与分析 .....	68
3.5.1 小偏心率小轨道倾角低轨卫星精密轨道拟合 .....	68
3.5.2 轨道倾角对于拟合精度的影响 .....	69
3.5.3 轨道高度对于拟合精度的影响 .....	70
3.5.4 轨道偏心率对于拟合精度的影响 .....	71
3.5.5 真实低轨卫星精密轨道数据拟合 .....	72
3.6 本章小结 .....	74
第 4 章 基于矢量积分的低轨卫星广播星历设计与精度对比 .....	76
4.1 广播星历模型设计 .....	76
4.2 用户算法 .....	78
4.3 实验验证 .....	79
4.3.1 不同设计方案比较 .....	79
4.3.2 数值积分方法的影响 .....	80
4.3.3 数值积分步长的影响 .....	82
4.3.4 轨道倾角与偏心率的影响 .....	83
4.3.5 轨道高度的影响 .....	85
4.3.6 真实低轨卫星精密轨道数据拟合 .....	86
4.4 矢量积分型与轨道根数型广播星历比较 .....	88
4.4.1 轨道倾角 .....	88
4.4.2 轨道偏心率 .....	89
4.4.3 轨道高度 .....	90
4.4.4 拟合时间长度 .....	91
4.5 本章总结 .....	91
第 5 章 基于扩展的概率模型评估星座性能 .....	93
5.1 扩展的概率模型 .....	93
5.1.1 MEO 与低轨卫星出现概率 .....	94
5.1.2 GEO 与 IGSO 卫星出现概率 .....	95
5.1.3 椭圆轨道卫星出现概率 .....	97
5.1.4 DOPs 值与卫星可见性的计算 .....	101

5.2 概率模型的验证.....	104
5.3 概率模型的应用.....	106
5.3.1 北斗三号与 GPS 星座实用性能比较分析 .....	106
5.3.2 北斗三号+QZO 卫星星座实用性能分析 .....	109
5.3.3 北斗三号+椭圆轨道卫星星座实用性能分析 .....	111
5.3.4 GNSS+星座实用性能分析 .....	115
5.4 本章总结.....	117
第 6 章 相位平滑伪距辅助三频周跳探测与修复 .....	119
6.1 三频周跳探测与修复方法 .....	119
6.1.1 三频无几何无电离层码相组合 .....	119
6.1.2 无几何相位组合 .....	120
6.1.3 无几何码相组合 .....	121
6.1.4 周跳修复.....	122
6.1.5 伪距观测值噪声对周跳修复的影响.....	123
6.2 相位平滑伪距方法.....	124
6.2.1 Hatch 滤波 .....	125
6.2.2 Divergence Free 滤波 .....	125
6.2.3 Hatch 与 Divergence-Free 滤波收敛性分析 .....	126
6.3 计算分析.....	128
6.3.1 数据处理流程.....	129
6.3.2 周跳探测修复结果.....	130
6.4 本章总结.....	137
第 7 章 结论与展望 .....	139
7.1 结论.....	139
7.2 进一步工作方向.....	141
参考文献.....	143

## 缩写词

CDE	Code-carrier Divergence Effect	码相偏差影响
CNAV	civil navigation	民用导航电文
DOP	dilution of precision	精度衰减因子
ECEF	earth-centered earth-fixed	地心地固坐标系
EGNOS	European Geostationary Navigation Overlay System	欧洲地球同步卫星覆盖系统
GDOP	geometric DOP	几何精度衰减因子
GEO	geostationary orbit	地球同步卫星
GFIF	Geometry Free and Ionospheric Free	无几何无电离层组合
GLONASS	GLObalnaya NAvigatsionnaya Sputnikovaya Sistema	格洛纳斯卫星导航系统
GNSS	Global Navigational Satellite System	全球卫星导航系统
GPS	Global Positioning System	全球定位系统
HDOP	horizontal DOP	水平精度衰减因子
HPOP	High Precision Orbit Propagator	高精度轨道预报
IGS	International GNSS Service	国际 GNSS 服务组织
IGSO	inclined geostationary orbit	倾斜地球同步轨道
IRNSS	Indian Reginal Navigation Satellite System	印度局域卫星导航系统
LAMBDA	least squares ambiguity decorrelation adjustment	最小二乘模糊度降相关平差
LNAV	legacy navigation	传统导航电文
MEO	medium earth orbit	中轨轨道
MSAS	Multi-functional Satellite Augmentation System	多功能卫星增强系统
PDOP	position DOP	定位精度衰减因子
PNT	positioning, navigation and timing	定位、导航与授时
PPP	Precise point positioning	精密单点定位
QZO	quasi-zenith orbit	准天顶轨道
QZSS	Quasi-Zenith Satellite System	准天顶卫星系统
RMS	Root Mean Square	均方根
SDCM	Satellite Differential Corrections and Monitoring	卫星差分改正与监视
STK	Satellite Tool Kit	卫星工具包
TDOP	time DOP	时间精度衰减因子
TRANSIT	Navy Navigation Satellite System	子午线卫星导航系统
URE	user range error	用户测距误差
VDOP	vertical DOP	垂直精度衰减因子
WAAS	Wide Area Augmentation System	广域增强系统

## 第1章 引言

### 1.1 国内外研究现状

在全球范围内,稳定的定位、导航与授时(positioning, navigation and timing, PNT)服务可以通过全球导航卫星系统(Global Navigation Satellite System, GNSS)获取。目前已经宣布建设成功或者正在建设的全球 GNSS 导航系统包括:美国的 GPS(Global Positioning System, GPS)、俄罗斯的 GLONASS(GLObalnaya NAvigatsionnaya Sputnikovaya Sistema, GLONASS)、欧盟的 Galileo 以及中国的北斗系统。此外,印度与日本也针对各自所在区域特点,建设了区域卫星导航系统 IRNSS(Indian Reginal Navigation Satellite System, IRNSS)和 QZSS(Quasi-Zenith Satellite System, QZSS)。GNSS 在全球参考框架建立与维持、布设控制网、地震学、气象学、精准农业等领域发挥着越来越重要的作用<sup>[1,2]</sup>。精密单点定位技术(Precise point positioning, PPP)是 GNSS 精密定位技术的热点研究方向之一,自二十世纪九十年代以来,已经有不少学者对此进行了深入研究<sup>[3-5]</sup>。该项技术综合了标准单点定位与差分定位各自的优势,用户仅需一台接收机便可以实现灵活定位<sup>[6,7]</sup>。

虽然,GNSS 系统有许多优势,但仍然存在比较棘手的问题暂时难以得到有效解决<sup>[8,9]</sup>。其一是,在基于目前的 GNSS 星座进行 PPP 时,初始化时间过长,需要较长时间才能收敛至厘米级精度,这一直制约其大规模应用与进一步发展。对于单 GPS 系统而言,需要 1 h 左右 PPP 水平定位精度才能收敛至 5 cm<sup>[10]</sup>,这是实现实时精密单点定位的主要障碍。

随着多系统 GNSS 的发展,为了加快收敛速度提高定位精度,联合多系统精密单点定位与单系统定位相比,在收敛速度与定位精度上有了明显改善<sup>[11-16]</sup>。与单 GPS 相比,收敛速度几乎可以加快 70%,定位精度大约提高 25%<sup>[17]</sup>。此外,各卫星导航系统都在动态持续发展和完善。GPS 与 GLONASS 正在由双频信号向多频信号发展。而 Galileo 与北斗系统基于后发优势已经实现全星座多频信号发送。多频信号也可以加快精密单点定位收敛速度与提高模糊度固定成功率<sup>[18-23]</sup>。

为了进一步提高 GNSS 的定位服务性能,各 GNSS 纷纷建立了星基增强系统<sup>[24]</sup>。比如 WAASS(Wide Area Augmentation System, WAAS)<sup>[25]</sup>、EGNOS(European Geostationary Navigation Overlay System, EGNOS)<sup>[26]</sup>、SDCM(Satellite

Differential Corrections and Monitoring, SDCM)<sup>[27]</sup>、MSAS (Multi-functional Satellite Augmentation System, MSAS)<sup>[28]</sup>和北斗星基增强系统<sup>[29]</sup>。这些星基增强系统通过地球同步轨道 (geostationary orbit, GEO) 卫星播发完好性与改正信息, 显著提高了各 GNSS 定位服务性能<sup>[30-33]</sup>。但是这种星基增强方式只能持续覆盖南北纬 72° 以下的区域<sup>[34]</sup>; 仍然会出现在复杂城市环境下表现不够理想的问题<sup>[35]</sup>; 而且由于现有 GNSS 卫星轨道高度较高, 导航信号在传播过程中能量损失严重, 造成地面接收信号时质量较差。

对于轨道高度在 300 km 至 1500 km 的低轨卫星, 到目前为止, 虽然低轨卫星增强 GNSS 定位, 已经取得一些初步实验验证结果<sup>[36,37]</sup>, 但还没有被大规模正式应用于导航服务。实际上, 将低轨卫星纳入到现有的 GNSS 系统中, 也可以看作是星基增强的一种方式<sup>[38]</sup>。

在近几年, 如何使用低轨卫星增强定位, 实现 PPP 快速收敛, 已经成了新的研究热点并且对于未来的卫星导航产业有着重要意义。一些国内外公司, 比如 OneWeb、Iridium、SpaceX、Boeing、Samsung 和中国航天科技集团等都纷纷公布了构建低轨卫星星座的方案<sup>[39-42]</sup>, 部分星座计划如表 1.1 所示。这些星座设计方案由上百颗甚至上千颗低轨卫星组成。这些大量的低轨卫星, 一方面可以在全球范围内提供互联网服务, 另一方面也可以在全球范围内提供 PNT 服务<sup>[43-46]</sup>。与正在中高轨道运行的 GNSS 卫星相比, 由于低轨卫星距离地球更近, 其信号强度更强、运行速度更快。这些特性将有助于在复杂城市环境下, 提供更为稳健的 PNT 服务<sup>[47-49]</sup>。而且低轨卫星快速的空间分布变化, 能实现精密单点定位快速收敛并有助于提高模糊度固定成功率<sup>[50-53]</sup>。总之, 在现有的 GNSS 星座基础之上, 实现低轨卫星增强定位将会极大改善 PNT 服务性能<sup>[54]</sup>。但是, 要实现上述构想的重要前提之一就是: 针对低轨卫星的运行特点, 设计适用于低轨卫星的广播星历模型, 实时提供在任意观测时刻低轨卫星位置与速度, 以满足 PNT 服务的相关要求<sup>[55]</sup>。如果不采取广播星历的形式提供卫星位置, 直接提供卫星空间坐标, 将会大量占用通信资源, 影响低轨星座通讯等功能的正常发挥。

表 1.1 部分机构发布的低轨卫星星座建设计划

星座	卫星数量	服务时间
One Web <sup>[56]</sup>	2620	2027
SpaceX Starlink <sup>[57][58]</sup>	11943	2024
Boeing <sup>[59]</sup>	2957	2024
Iridium <sup>[60]</sup>	66	1998
Iridium Next <sup>[61]</sup>	75	2019

续表

星座	卫星数量	服务时间
Global Star <sup>[62]</sup>	48	2000
Yaliny <sup>[63]</sup>	135	-
星座	卫星数量	服务时间
Kepler Communications <sup>[64]</sup>	140	2022
Samsung <sup>[65]</sup>	4600	-
航天科技“鸿雁星座” <sup>[66]</sup>	324	2023
航天科工“虹云工程” <sup>[67]</sup>	156	2022
未来导航“微厘空间” <sup>[68]</sup>	120	2021

GNSS 系统的广播星历由地面控制系统根据观测数据生成。GPS 系统发布两种类型的广播星历：LNAV (legacy navigation, LNAV) 与 CNAV (civil navigation, CNAV)。LNAV 广播星历用 16 个参数描述 MEO (medium earth orbit, MEO) 卫星的运动状态。以 LNAV 为代表的轨道根数类型广播星历，在北斗、Galileo 和 QZSS 系统也得到了广泛应用。为了得到更高的广播星历拟合精度，在 LNAV 的基础上又加入 2 个额外的参数，构成 CNAV 广播星历<sup>[69,70]</sup>。GPS 与 QZSS 已经在 L2 与 L5 频段播发 CNAV 广播星历<sup>[71]</sup>。与其它 GNSS 非常不同的是：GLONASS 使用矢量积分类型广播星历<sup>[72,73]</sup>。该类型星历包含在参考时刻的，卫星在地心地固 (earth-centered earth-fixed, ECEF) 坐标系中的位置、速度与加速度，使用数值积分方法计算在任意观测时刻卫星位置与速度。影响广播星历质量的主要原因是星历模型设计、卫星轨道与钟差预报精度和数据截断误差等。许多学者已经对广播星历问题进行了深入研究<sup>[74-79]</sup>。在 2014 年，对于 GPS、GLONASS、Galileo、QZSS 和北斗的倾斜地球同步轨道 (inclined geostationary orbit, IGSO) 与 MEO 卫星的由于轨道引起的用户测距误差 (user range error, URE) 分别为：0.24 m, 0.54 m, 0.76 m, 0.50 m 和 0.57 m<sup>[75]</sup>。对于 MEO 卫星，拟合 4 h 精密轨道数据引起的拟合 URE 的均方根 (root mean square, RMS) 误差值为 5 cm 至 10 cm<sup>[80]</sup>。

目前，对于 MEO、IGSO 和 GEO 卫星的广播星历，在广播星历模型设计<sup>[81]</sup>，广播星历参数估计方法<sup>[82-85]</sup>与不同星历模型分析比较<sup>[80,86,87]</sup>等方面已经有不少学者进行了深入研究。由于低轨卫星运行速度更快，距离地球更近，受摄动力影响情况更加复杂<sup>[88]</sup>，因此，针对低轨卫星也需要进行相关研究。已经退役的 TRANSIT (Navy Navigation Satellite System, TRANSIT) 系统采用低轨卫星星座<sup>[89-91]</sup>。该系统曾使用了针对低轨卫星设计的广播星历。该类广播星星历包含 2 部

分,其中一部分是每 12 h 更新一次的开普勒轨道根数;另一部分是每 2 min 更新一次改正数<sup>[92]</sup>。然而,该星历模型的拟合误差达到了 5 m<sup>[93]</sup>。这显然不能满足现今 PNT 服务的相关要求。虽然,轨道根数类型广播星历在 GNSS 系统得到了广泛应用,但是当卫星轨道偏心率接近零、轨道倾角较小或者较大时,会存在比较严重的奇异问题<sup>[94,95]</sup>,严重影响星历拟合精度。而绝大多数低轨卫星的偏心率都非常接近零并且在未来的低轨卫星增强导航星座设计方案中,不能排除使用小轨道倾角或者极轨道低轨卫星<sup>[46]</sup>。实际上,用 CNAV 或 LANV 广播星历模型拟合北斗系统的 GEO 卫星轨道时也面临着奇异问题。对于这些奇异问题,已经有不少学者进行深入研究。为了解决小轨道倾角造成的奇异问题,有学者提出使用坐标旋转法解决奇异问题<sup>[96-99]</sup>。在该方法中,为了避免轨道根数奇异的影响,拟合广播星历参数时,将坐标系的 X 轴旋转 5°。此时 GEO 卫星在新的坐标系中就可以视为“伪 GEO”卫星。用户在实际计算 GEO 卫星位置时,还需要再转回 5°,才能计算得到真正的卫星位置。由此可见,该方法在用户端计算过程比较繁琐而且旋转 5° 在某些情况下仍然会受到奇异问题影响,最优旋转角度值还需要进一步论证<sup>[98]</sup>。奇异问题存在的根本原因在于:在某些特殊情况下,某些轨道根数没有明确的几何定义。比如当轨道偏心率非常接近于零时,近地点角距没有明确几何意义<sup>[94]</sup>;当轨道倾角接近于零度时,升交点赤经也没有明确几何意义。因此,坐标旋转法无法从根本解决奇异问题。鉴于此,有学者考虑从轨道根数定义的角度尝试从根本解决奇异问题<sup>[100]</sup>。有学者提出使用第二类无奇点轨道根数拟合 GEO 精密轨道,有效解决了小偏心率与小轨道倾角同时引起的奇异问题<sup>[86,87,101]</sup>。但是当卫星轨道倾角较大时,比如 90°,第二类无奇点轨道根数仍然存在奇异问题,导致广播星历参数拟合失败。而目前实际在轨运行的与各个机构设计的低轨卫星星座设计方案,都存在大量的极轨道低轨卫星。此外,也有学者提出使用第一类无奇点轨道根数解决小偏心率轨道引起的奇异问题<sup>[102,103]</sup>。但是在拟合小轨道倾角精密轨道数据时,第一类无奇点轨道根数广播星历仍然存在奇异问题,导致广播星历参数拟合失败。因此,现有的轨道根数类型广播星历设计方案都难以完全消除奇异问题的影响。同时值得注意的是,除了上述提到的轨道根数类型广播星历之外,还有以 GLONASS 广播星历为代表的矢量积分型广播星历。与轨道根数型广播星历相比,矢量积分型广播星历具有良好的非奇异特性<sup>[104]</sup>,理论上可以适用于各种类型轨道具有优良的拓展性。但 GLONASS 广播星历也存在模型过于简单、拟合精度较差的问题。目前,关于矢量积分型广播星历的研究相对较少。有学者尝试过对 GLONASS 广播星历进行改进<sup>[104,105]</sup>,但是考虑的情况不够充分,轨道倾角,积分方法与步长,轨道偏心率等可能影响拟合精度的因素未进行讨论。



除了以上提到的低轨卫星广播星历设计问题,对于未来的 GNSS 系统发展而言,如何评估不同的星座设计方案也是值得考虑的问题。针对一个 GNSS 系统性能的评估,可以从卫星信号质量<sup>[106,107]</sup>,广播星历精度<sup>[70,76,78]</sup>,多路径效应<sup>[108,109]</sup>与精密单点定位的收敛速度与定位精度<sup>[107,110]</sup>等方面考虑。其中,GNSS 的卫星星座设计决定了卫星空间分布状态,这对于实现稳定的高精度定位非常重要,在低轨卫星实现 GNSS 增强过程中需要仔细研究。卫星可见性与精度衰减因子(dilution of precision, DOP)是反映一个 GNSS 星座设计方案优劣的重要指标<sup>[111,112]</sup>。

随着 GNSS 的发展,GNSS 星座已经由传统的 Walker-delta 星座向混合星座发展。比如,为了提升亚太地区的定位服务性能,北斗三号系统使用在 Walker 星座的基础上引入了 IGSO 与 GEO 卫星,使得用户在亚太地区能看到更多卫星<sup>[113]</sup>。相关学者对 IGSO 与 GEO 卫星的贡献进行了仔细分析<sup>[107,114]</sup>。然而,目前各 GNSS 系统在高纬度地区的卫星空间分布状态相比中低纬度地区都不够理想<sup>[114,115]</sup>,这就使得 PNT 服务质量在高纬度地区,特别在两极地区需要提高。正如前文所提到的,虽然各 GNSS 系统纷纷建立星基增强系统,但这些星基增强系统都是基于 GEO 卫星播发完好性与改正信息的,对于高纬度特别两极地区仍然无法提供持续的信号覆盖<sup>[34]</sup>。而且虑到北极航线将会是从太平洋到大西洋最短的航线,极具经济价值<sup>[116,117]</sup>。因此,高纬度地区对于星基增强服务也有着强烈需求<sup>[118]</sup>,有必要仔细考虑如何改善现有的 GNSS 星座在北极地区卫星可见数量与空间分布状态不够理想的问题。因此,基于以上原因,可以考虑使用椭圆轨道卫星解决这个问题<sup>[94]</sup>。其中,俄罗斯的 Molniya 卫星,可以为高纬度地区提供良好的信号覆盖。因此,以 Molniya 卫星为代表的椭圆轨道卫星,作为一种新的、潜在的星基增强方式,可以考虑与低轨卫星共同为 GNSS 系统提供增强服务。由高、中、低和椭圆轨道卫星组成的混合星座,其性能如何,对于未来低轨卫星实现 GNSS 增强的发展可能起到的作用,也值得进行评估。

评估某个星座设计方案的性能时,传统方法使用真实或者经过复杂计算的仿真精密星历,计算卫星可见性与 DOP 值<sup>[119-121]</sup>。为了找到一种可以简便分析星座性能的方法,有学者提出了概率模型。该模型仅需某星座设计方案的基本参数便可以对卫星可见性与空间分布状态进行分析<sup>[115]</sup>。之后该模型又被应用在估计低轨卫星星载 GPS 接收机可见卫星数量<sup>[122]</sup>。然而该模型仅仅适用于 MEO 或者低轨卫星星座<sup>[114]</sup>。为了将该模型适用于 GEO 与 IGSO 卫星,又有学者对概率模型进行了扩展<sup>[114]</sup>。但是正如前文所提到的,对于椭圆轨道卫星在未来的 GNSS 系统发展中搭配低轨卫星可能起到的作用,需要进行仔细研究;如何将概率模型进行扩展以适用于评估椭圆轨道卫星可能起到的作用,也值得进行探索。

除了采用低轨与椭圆轨道卫星的信号增强 GNSS 之外, GNSS 本身也在持续发展。目前,越来越多的 GNSS 卫星已经可以发射三频,甚至四频或者五频信号。多频信号为模糊度固定与提升定位性能提供了新的契机<sup>[18-23,123,124]</sup>。在 GNSS 发展的新时代背景下,有必要考虑如何使用多频信号进行周跳探测与修复。

对于周跳问题,近几十年以来,许多学者对此问题进行了深入研究并尝试提出了一些解决方案。比如高次差法探测周跳<sup>[125]</sup>,该方法虽然理论严密,但难以在计算机上实现,并且会放大噪声,难以探测小周跳;多项式拟合法<sup>[125,126]</sup>,本质上与高次差法相同,虽然容易编程实现,但极易受观测噪声影响,同样不适合探测修复小周跳,而且该方法的拟合窗口长度以及阶数根据经验确定,缺乏严密理论支持<sup>[127]</sup>;也有学者尝试改进外推法,比如使用灰色理论外推法<sup>[128]</sup>,但该方法过于复杂;又比如有学者提出采用切比雪夫多项式拟合修复周跳<sup>[129]</sup>;这些方法共同的问题是:如果最开始的历元发生周跳,则无法正常启动,且容易受到伪距观测噪声与多路径效应的影响,导致周跳探测修复出现错误。

TurboEdit 算法<sup>[130]</sup>被广泛应用于多种 GNSS 数据处理软件,但仅适用于双频信号,且不能修复周跳。随着 GNSS 的现代化与新系统的建立,越来越多的卫星发送三频信号,而多频信号有助于模糊度固定与周跳探测修复<sup>[131]</sup>。借鉴 TurboEdit 算法思想,有学者提出了三频 TurboEdit 周跳处理方法<sup>[132]</sup>,但该方法组合系数是小数,破坏了模糊度整数特性,采用的空间搜索方法确定每个频点的跳变量的数值稳定性差;Dai 等<sup>[133]</sup>提出用 2 个无几何载波组合和 LAMBDA(least squares ambiguity decorrelation adjustment, LAMBDA)空间搜索方法<sup>[134]</sup>探测修复三频周跳,但这种方法由于组合过少,存在特殊周跳组合无法被探测发现的情况;许多方法都采用空间搜索方法确定每个频点周跳<sup>[132,133,135-137]</sup>,但这种方法问题在于:搜索空间和步长难以自适应变化,当搜索空间过大而步长较短时,计算量急剧增大,影响数据处理效率;而搜索空间过小但步长较长时,又可能错过最佳估值,造成跳变量计算错误;又有学者提出构造 3 个线性无关的码相组合<sup>[138,139]</sup>,计算每个频点跳变量时,避免使用搜索方法,提高计算效率,但该方法容易受到伪距噪声和多路径效应的影响。特别是该方法进行历元间二次差分<sup>[138]</sup>,会进一步放大噪声,进而造成周跳探测修复成功率急剧下降;又有学者提出采用 3 个无几何无电离层码相组合探测修复周跳<sup>[140]</sup>,但该方法第 3 个组合观测值的噪声太大,导致很多历元无法正确修复周跳并且其提出的多项式拟合和窗口平滑的方法,增加了算法复杂程度,修复周跳的方程呈现病态,必须采用空间搜索方法;为缓解伪距噪声和多路径造成的不利影响,可以考虑采用逐级修复周跳的方式<sup>[141,142]</sup>,第 1 个组合周跳计算完毕之后,其它组合进行相位之间的组合,减缓伪距噪声的影响;也有学者提出可以使用无几何模型估计跳变量<sup>[143]</sup>,在此基础上

附加电离层约束,可以进一步提高周跳估计模型强度<sup>[144]</sup>,但该种算法无论卫星是否发生周跳都要参与计算,有的没有周跳探测步骤,有的采用粗差探测迭代方式探测周跳,运算量普遍偏大。至于低轨卫星实现 GNSS 增强的过程中,遇到的周跳探测修复问题,目前研究较少。现有的周跳探测修复方法,用于低轨卫星观测值,可能起到怎样的作用,暂时缺少相关讨论。

## 1.2 研究意义

以低轨卫星与椭圆轨道卫星和多频信号为代表的信号域星基增强方式,在未来的 GNSS 系统发展中将会起到越来越重要的作用。关于低轨卫星增强 GNSS 定位,虽然目前已经有学者对此进行了深入研究,但这些研究主要集中在具体定位结果与宏观理论方面的论证。要真正实现低轨卫星增强 GNSS 定位,有许多关键细节技术问题需要深入探讨。比如为了实现实时定位,低轨卫星应该使用怎样的广播星历模型,就是实现低轨卫星增强 GNSS 定位关键技术之一。对于这个问题,目前的研究相对较少。一些学者为了解决这些问题,进行一些有益的探索。针对这个问题有两种思路:一是研究相对较多的轨道根数型广播星历;二是矢量积分型广播星历。但正如在国内外研究现状所指出的,对于轨道根数类型广播星历,受限于在某些特殊情况下的奇点问题,会出现拟合广播星历参数失败,无法满足拟合精度要求的问题。虽然有不少学者为解决奇点问题进行了不少努力,但是目前所提出的方法,都只是部分消除奇点问题的影响。而基于矢量积分型的广播星历,虽然能够避免棘手的奇点问题,但研究相对较少。标准的 GLONASS 广播星历直接用于拟合低轨卫星精密轨道,也存在拟合误差过大的问题。因此,针对目前低轨卫星广播星历设计存在的种种问题,本文进行了较为深入的探讨。

与此同时,在实现低轨卫星增强 GNSS 的过程中,需要对星座设计方案的全局卫星可见性与卫星空间分布情况进行评估,以择优星座设计方案。传统的方法需要真实的或者仿真的精密星历。由于在卫星实际发射之前,获取真实的精密星历不现实。而仿真的精密星历通常需要经过复杂的计算。为此,本文在对之前学者的研究成果学习、总结的基础之上,对概率模型进行优化扩展。仅需卫星星座设计方案的一些基本参数,便可以评估星座设计方案的性能,为最终的星座设计方案提供了有价值的参考。除了低轨卫星增强 GNSS 定位,使用椭圆轨道卫星改善特定区域卫星可见性与空间分布也是一种星基增强方式,可以与低轨卫星配合使用。因此,探究椭圆轨道卫星在未来 GNSS 的发展所起到的作用也是值得研究的课题。为了评估包括高、中、低轨以及椭圆轨道卫星在内的 GNSS+星座设计

方案,本文使用扩展的概率模型对其进行了评估,相关结论为未来 GNSS 发展提供有益的参考。

此外,除了引入低轨与椭圆轨道卫星,在卫星空间分布优化方面进行增强之外,已经有越来越多的卫星可以发送多频信号。如何利用多频信号资源,实现更稳健的定位也是未来需要仔细研究的问题。多频信号的周跳探测修复,在数据预处理过程中起着非常关键的作用。如果处理不当,将会严重损害定位结果。特别是如何对伪距观测值进行降噪,提升周跳探测修复成功率,尚缺乏研究。本文提出的相位平滑伪距方法辅助探测修复多频周跳,为解决高、中和低轨卫星的周跳问题进行了有益的探索。

因此,本文立足现有 GNSS 系统的状态,研究低轨卫星实现增强 GNSS 过程中可能遇到的若干关键技术,并尝试为解决这些关键技术问题提供可能的解决方案。

## 1.3 本文拟解决的核心技术问题与主要研究内容

### 1.3.1 本文拟解决的核心技术问题

低轨卫星增强 GNSS 定位的关键技术之一,是要针对低轨卫星的运动特点,设计合适的广播星历模型。此外,在实现低轨卫星增强 GNSS 的过程中,需要找到一种简便的方法对星座性能进行评估。对于另一种星基增强方式,椭圆轨道卫星,在未来 GNSS 系统发展过程中搭配低轨卫星所能起到作用,也值得进行初步探究。本文将概率模型进行扩展,仅需一些基本的星座设计参数,便可以对星座设计方案进行评估而无需真实的或者仿真的精密星历。随着 GNSS 系统的发展,越来越多的卫星可以发送三频信号。但之前的周跳探测方法,大多是适用于双频信号,如何对高、中、低轨卫星多频周跳进行探测修复,也需要进行讨论研究。针对相关问题的研究现状,本文拟解决的核心技术问题包括:

#### (1) 广播星历参数拟合方法

在设计完毕广播星历模型之后,需要使用一定的方法,基于精密星历拟合相应参数,才能评价广播星历模型的拟合精度。在拟合广播星历参数的过程中,有 2 个关键问题需要仔细考虑:其中一个问题是:采取何种方式估计广播星历参数。目前的主流策略是使用最小二乘迭代估计方法。但在实际拟合广播星历参数过程中,有时由于参数之间存在较强相关关系,法方程严重病态,容易造成拟合失败;另外一个问题是:在线性化误差方程时,需要计算每个参数偏导数。如果使用严

格的解析方法,则偏导数的计算过程将非常复杂。因此有必要找到一种方便的计算方式。本文以这2个关键问题为切入点,提出了一种简单而有效的广播星历参数拟合策略,为后续广播星历设计的研究做好铺垫;

### (2) 基于轨道根数的低轨卫星广播星历设计

考虑到目前轨道根数型广播星历已经在GNSS系统得到了广泛应用,本文基于轨道根数型广播星历设计了多种方案并对这些方案在各个可能影响其拟合精度的情形进行测试。对于在某些特殊情况下的奇点问题,本文也尝试提出了一种解决方案,实现同时对小轨道偏心率、小轨道倾角与极轨道引起的奇点问题的解决;

### (3) 基于矢量积分的低轨卫星广播星历设计

矢量积分型广播星历从另外一个全新的视角,为低轨卫星广播星历设计问题提供解决方案。该种类型的广播星历,适合在短时间内高精度描述卫星运动状态,并且具备良好的无奇异特性,可以完全避免轨道根数型广播星历一直存在的奇点问题。从矢量积分型广播星历的角度,本文设计了适用于低轨卫星的广播星历模型并从积分方法、积分步长、轨道倾角等多个方面检验该星历模型的性能。同时,对于矢量积分型与轨道根数型广播星历各自的特点也进行了分析比较;

### (4) 扩展的概率模型评估星座性能

通常,在全球范围内评估某个GNSS星座设计方案时,需要实际的或者经过复杂计算的仿真星历。但概率模型只需要一些基本的星座参数。考虑到传统的概率模型,仅仅适合运行在近圆轨道的卫星。本文对传统的概率模型进行扩展与优化,提出扩展的概率模型。该模型能够评估包括椭圆轨道卫星、低轨卫星、GEO与MEO在内的混合星座设计方案的性能;

### (5) 椭圆轨道卫星性能分析

与低轨卫星增强GNSS定位类似,引入椭圆轨道卫星也是星基增强的方式之一。目前,椭圆轨道卫星对于现有GNSS星座,在卫星可见性与空间分布状态的提升作用,尚缺乏系统研究。本文基于扩展的概率模型,对于椭圆轨道与低轨卫星在未来的GNSS系统发展中可能发挥的作用进行了系统分析,为未来的混合星座设计提供一些有益的参考;

### (6) 多频周跳探测与修复

目前的多频周跳探测修复方法,都会受到伪距观测噪声的影响。当伪距观测噪声较大时,周跳探测修复成功率将会急剧下降。现有的大多数算法尚未考虑,如何通过对伪距观测值降噪的方式,提高周跳探测修复成功率。此外,低轨卫星增强GNSS目前尚处于总体理论论证阶段,一些具体的细节技术问题,比如周跳问题还缺乏讨论。为此,本文提出相位平滑伪距辅助周跳探测修复的算法,对高、

中和低轨卫星的周跳探测修复问题进行研究。

### 1.3.2 主要研究内容

本文主要研究内容及章节设置如下：

第一章，介绍了目前 GNSS 系统的发展状态，指出其存在的发展瓶颈。而低轨卫星与椭圆轨道卫星作为新兴的星基增强方式之一，有助于解决目前 GNSS 系统的发展瓶颈。但是在实现低轨卫星增强 GNSS 时，应该如何设计适合于低轨卫星的广播星历模型是需要的解决的关键技术问题；椭圆轨道卫星配合低轨卫星在未来 GNSS 系统可能起到的作用，尚缺乏系统分析；此外，周跳探测修复也是数据预处理过程中非常重要的问题之一。目前的方法，大多针对双频观测数据，随着越来越多的卫星可以发射三频信号，对于多频信号的高、中、低轨卫星周跳探测修复问题，还需进一步研究。基于研究现状，阐述了本文研究相关问题的意义以及准备着手解决的核心技术问题。

第二章，主要讲述了目前 GNSS 系统正在使用的广播星历模型及其使用方法；如何衡量拟合广播星历过程中造成的拟合误差；对于在拟合广播星历参数过程中，如何为每个参数计算偏导数与参数拟合方法进行了探讨并提出了一种拟合广播星历参数的简便策略。

第三章，结合低轨卫星运行特点，设计了适合于低轨卫星的轨道根数型广播星历模型。对于奇点问题进行了仔细探讨，发现第一类无奇点与第二类无奇点轨道根数都不能完全去除奇异问题造成的不利影响。为此，本章重点讨论了基于第二类无奇点改进轨道根数设计的广播星历模型方案并仔细探讨了轨道偏心率、轨道高度、轨道倾角与拟合时间段长度对本文提出的广播星历模型拟合精度可能存在的影响。尝试摆脱之前的低轨卫星广播星历模型无法完全克服奇异问题的困境。

第四章，本章从另外一个角度设计低轨卫星广播星历模型。针对低轨卫星运行特点，在现行标准的 GLONASS 广播星历模型的基础之上进行改进，同样对可能影响广播星历拟合精度的因素：轨道积分方法、积分步长、轨道高度、轨道倾角与拟合时间段长度可能造成的影响进行全面分析；轨道根数型与矢量积分型广播星历模型，是对同一个问题在两个不同角度的解决思路。本章对于基于这两

种方案设计的广播星历模型进行比较分析，并总结各自的特点。

第五章， 如何设计导航星座是建设低轨卫星增强 GNSS 系统的关键工作之一。为了在卫星未实际发射之前，使用简便的方法评估某个星座设计方案的优劣，本章对传统的概率模型进行优化扩展，提出扩展的概率模型并采用真实的精密星历对概率模型的可靠性进行验证。同时，使用概率模型，对使用椭圆轨道卫星的潜在星基增强方式在未来 GNSS 系统建设中可能起到的作用，进行分析。此外，对于目前北斗三号与 GPS 系统的星座性能特点、IGSO 与处于椭圆轨道的准天顶（quasi-zenith orbit, QZO）卫星各自的特点也进行了分析与比较。最后，使用扩展的概率模型对低轨卫星，椭圆轨道卫星、GEO、IGSO 与 MEO 卫星组成的 GNSS+混合星座的性能进行了分析与展望；

第六章， 对多频周跳探测修复问题进行研究。针对目前多频周跳探测修复方法，容易受到伪距观测噪声影响的问题，考虑使用相位平滑伪距方法，对伪距观测值进行降噪。使用高、中和低轨卫星的观测数据，对相位平滑伪距辅助多频周跳探测修复算法进行测试，统计在伪距经过平滑去噪之后，对于周跳探测修复成功率的提升幅度。

第七章， 对全文进行总结，并展望后续研究工作。

## 1.4 本章小结

本章介绍了论文的研究背景与意义，指出了 GNSS 发展瓶颈以及新的发展趋势。在此基础上对于未来低轨卫星实现 GNSS 增强过程中，需要解决的新的若干关键技术问题进行了分析，确定了本文的研究目标与具体研究内容。

## 第2章 常规的广播星历模型及其精度评定方法

拟合广播星历参数时,为了线性化误差方程,需要计算每个广播星历参数的偏导数。使用解析法时,每个参数偏导数的推导过程非常复杂。此外,现有的卫星导航系统的卫星都运行在近圆轨道上,有的卫星的轨道倾角比较小,造成某些轨道根数型广播星历参数之间具有较强相关程度,法方程严重病态,对于微小误差极其敏感。此时,需要仔细考虑星历参数的估计方式。鉴于绝大多数参考文献都没有详细列出轨道根数类型广播星历中每个参数的偏导数推导过程。因此,本文以 GPS 18 参数广播星历为例,详细推导了每个广播星历参数的偏导数。由于该推导过程非常复杂,本文又介绍使用数值导数法计算广播星历参数偏导数。在实际广播星历参数估计过程中,分别使用解析法与数值导数法拟合广播星历参数并对拟合结果进行比较,以此探究数值导数法是否可靠。实验结果表明:数值导数法简单可靠,可以避免繁琐的偏导数推算过程且不会对拟合精度产生不利影响,对于星历参数拟合精度的影响仅在毫米至亚毫米级别;对于广播星历参数估计方法,本文分别采用传统的最小二乘估计方法与 QR 分解方法;并对这 2 种估计参数方法拟合结果进行比较。实验结果表明:使用基于 QR 分解的迭代估计方法,可以有效缓解观测方程病态与参数之间高度相关问题对于估计广播星历参数造成的不利影响。

### 2.1 广播星历参数模型精度评定方法

广播星历误差主要是以下 3 个原因造成的:

- (1) 预报星历存在误差。拟合广播星历时用到的精密轨道与钟差,通常是地面观测站根据观测数据预报得到的。因此,与真实卫星轨道与钟差相比,存在误差;
- (2) 拟合广播星历参数时造成的误差。由于使用的广播星历模型存在差异,或者拟合方法不同,在拟合广播星历参数过程中会产生误差。如何设计适用于低轨卫星的广播星历模型并采取恰当的拟合方法,尽可能减小拟合广播星历造成的误差将会是本文的研究重点;
- (3) 数据截断误差。星历参数拟合完毕之后,需要播发给用户使用。由于传输资源有限,会对星历数据进行截断,由此也会产生一定误差。

对于问题(1)与(3),本文不讨论。现在,重点讨论如何评估由于拟合广播星历



造成的误差。

通常在地心地固坐标系拟合广播星历参数并认为精密星历提供的卫星坐标为真值  $\bar{R}$ ，对精密星历坐标拟合之后，可以得到广播星历参数。然后根据相应用户算法可以计算得到卫星坐标值  $\tilde{R}$ 。那么拟合  $n$  个历元的精密卫星坐标时，卫星位置分量在地心地固系下的拟合误差可以表示为：

$$\begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} = \bar{R} - \tilde{R}, \quad i=1,2,3,\dots,n \quad (2.1)$$

拟合过程中的均方根（Root Mean Square, RMS）误差值的计算公式为：

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2 + \Delta z_i^2)}{3n}} \quad (2.2)$$

在地心地固坐标系中，获取根据广播星历计算的坐标与精密星历坐标的差异之后，可以将该差异转换至卫星轨道坐标系。这样就可以直观判断卫星在径向、切向和法向的误差。拟合误差会一般被逐点转换至卫星轨道坐标系，具体转换方法为：

$$\begin{pmatrix} \Delta R_i \\ \Delta A_i \\ \Delta C_i \end{pmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{R}_z(-S) \begin{pmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta z_i \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

其中， $\Delta R_i$ 、 $\Delta A_i$  和  $\Delta C_i$  分别表示广播星历计算的第  $i$  个点的卫星位置分量在卫星轨道坐标系中径向、切向和法向的误差。 $\Delta x_i$ 、 $\Delta y_i$  和  $\Delta z_i$  分别表示由广播星历计算的卫星位置分量在地心地固系下的误差。接下来讨论  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{R}_z(-S)$  的计算方法。

设  $\mathbf{r}$  与  $\dot{\mathbf{r}}$  分别为卫星在惯性坐标系下的位置与速度矢量。那么卫星轨道坐标系与地心惯性坐标系的转换矩阵  $\mathbf{G}$  可表示为：

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{r}}{r} & \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|} & \left( \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \right)^T \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

对于从惯性坐标系转换至地心地固坐标系旋转矩阵  $\mathbf{R}_z(-S)$  可用下式计算：

$$\mathbf{R}_z(-S) = \begin{pmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

其中， $S$  为当天的格林威治标准时间零时所对应的格林尼治恒星时。

在用户实际使用广播星历时，由于广播星历误差引起的在用户与卫星视线上的等效 URE 是最值得关注的。URE 指标考虑了卫星轨道与钟差共同造成的影响，综合反映了广播星历的精度。通常，对于 GPS 而言，要求拟合 URE 不应超过 10 cm<sup>[145]</sup>。由于本文只考虑拟合广播星历造成的误差，则定义拟合 URE 的计算公式为<sup>[102]</sup>：

$$URE = \sqrt{w_R^2 (RMS(\Delta R_i))^2 + w_{A,C}^2 ((RMS(\Delta A_i))^2 + (RMS(\Delta C_i))^2)} \quad (2.6)$$

其中， $w_R$  和  $w_{A,C}$  为径向、切向和法向的贡献因子。这些贡献因子的值与卫星轨道高度密切相关。本质上是卫星覆盖范围内贡献因子的统计值。具体的贡献因子值如表 2.1 所示<sup>[102]</sup>。

表 2.1 不同轨道高度 URE 贡献因子

轨道高度 (km)	$w_R$	$w_{A,C}$
400	0.419	0.642
600	0.488	0.617
800	0.540	0.595
1000	0.582	0.575
1200	0.618	0.556
1400	0.648	0.539

2.2 矢量积分型广播星历模型

与 GPS，Galileo，QZSS 等卫星导航系统不同，GLONASS 使用矢量积分类型广播星历。该类型广播星历，基于卫星在参考时刻的运动状态，使用力模型在 ECEF 坐标系进行数值积分，计算广播星历参数有效期内任意观测时刻卫星位置与速度<sup>[73]</sup>。

### 2.2.1 参数模型

标准的 GLONASS 广播星历模型有 10 个参数, 包含了日月摄动加速度以及卫星在参考时刻的位置和速度, 作为轨道积分的初始条件。这些参数的具体含义如表 2.2 所示。GLONASS 广播星历更新频率较快, 有效弧段较短, 需要每 30 min 更新一次。基于矢量积分思想设计的广播星历模型具有良好的无奇异特性, 可以适用于各种类型的轨道, 具有较强的扩展能力<sup>[104]</sup>。

表 2.2 标准的 GLONASS 广播星历参数及其意义

参数	意义
$t_{oe}$	星历参考时刻
$X, Y, Z$	卫星在参考时刻位置
$V_x, V_y, V_z$	卫星在参考时刻速度
$a_x, a_y, a_z$	卫星加速度

### 2.2.2 用户算法

对于标准的 GLONASS 广播星历, 用户需要使用数值积分的方法, 计算在星历参数有效期内任意观测时刻卫星位置与速度。首先需要计算卫星在 ECEF 中的加速度, 其计算公式为<sup>[73,146-148]</sup>:

$$\ddot{R}_{ECEF\_X} = -\frac{GM}{r^3}X + \frac{3}{2}C_{20}\frac{GMa_e^2}{r^5}X\left(1 - \frac{5Z^2}{r^2}\right) + \omega_e^2X + 2\omega_eV_y + a_x \quad (2.7)$$

$$\ddot{R}_{ECEF\_Y} = -\frac{GM}{r^3}Y + \frac{3}{2}C_{20}\frac{GMa_e^2}{r^5}Y\left(1 - \frac{5Z^2}{r^2}\right) + \omega_e^2X - 2\omega_eV_x + a_y \quad (2.8)$$

$$\ddot{R}_{ECEF\_Z} = -\frac{GM}{r^3}Z + \frac{3}{2}C_{20}\frac{GMa_e^2}{r^5}Z\left(3 - \frac{5Z^2}{r^2}\right) + a_z \quad (2.9)$$

其中,  $GM$  为万有引力常数 ( $GM = 398600.44 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$ );  $r$  为卫星到地球质心距离;  $a_e$  为地球半径;  $C_{20}$  为地球重力系数 ( $C_{20} = -0.00108263$ );  $\omega_e$  为地球自转角速度 ( $\omega_e = 0.7292115 \times 10^{-4} \text{ rad s}^{-1}$ )。

以参考时刻卫星的位置与速度为初始条件, 则在广播星历参数有效时间段内, 任意观测时刻  $t$  的卫星位置, 可采用值积分的方法计算:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{R}}_t = \dot{\mathbf{R}}_0 + \int_{t_{oe}}^t \ddot{\mathbf{R}}_{ECEF} dt \\ \mathbf{R}_t = \mathbf{R}_0 + \int_{t_{oe}}^t \dot{\mathbf{R}}_t dt \end{cases} \quad (2.10)$$

其中， $\dot{\mathbf{R}}_0=(V_x,V_y,V_z)^T$ ， $\mathbf{R}_0=(X,Y,Z)^T$  分别为参考时刻的卫星速度与位置向量； $\dot{\mathbf{R}}_t$  和  $\mathbf{R}_t$  分别为观测时刻的卫星速度与位置向量。在标准的 GLONASS 广播星历中，数值积分方法采用 4 阶的龙格库塔方法。对于低轨卫星的矢量积分型广播星历设计，在后续章节中，将会讨论积分器与积分步长对于星历拟合精度的影响。

2.3 轨道根数型广播星历模型

基于经典的开普勒轨道根数，先后发展出两种模型：GPS 16 参数广播星历模型与 GPS 18 参数广播星历模型。其中，GPS 16 参数模型在 LNAV 电文中播发，GPS 18 参数模型在 CNAV 电文中播发且具备更高的拟合精度<sup>[69,70]</sup>。

2.3.1 参数模型

GPS 18 参数广播星历采用开普勒轨道根数表达形式，除了 1 个星历参考时刻参数  $t_{oe}$ ，共 17 个轨道参数，包括 6 个开普勒根数： $(\Delta A,e,i_0,\Omega_0,\omega,M_0)$  与 5 个长期摄动改正参数： $(\dot{A},\Delta\dot{n},\dot{i},\Delta\dot{\Omega})$ ，6 个短期摄动改正参数： $(C_{rc},C_{rs},C_{uc},C_{us},C_{ic},C_{is})$ 。轨道根数型广播星历模型的有效弧段较长，每 2 h 更新一次，具备较强的外推能力。但是在某些情况，比如对于小轨道倾角或者小偏心率轨道，该星历模型存在奇异问题，造成星历参数拟合失败。这些参数的具体含义如表 2.3 所示。

表 2.3 GPS 18 参数广播星历参数及其意义

参数	意义
$t_{oe}$	星历参考时刻
$\Delta A$	半长轴与参考值之差
$e$	轨道偏心率
$i_0$	参考时刻轨道倾角
$\Omega_0$	参考时刻升交点赤经
$\omega$	近地点幅角
$M_0$	参考时刻平近点角

续表

参数	意义
$\dot{A}$	半长轴一次变化率
$\Delta n$	平均角速度改正量
$\Delta \dot{n}$	平均角速度校正值一次变化率
$\dot{i}$	轨道倾角变化率
$\Delta \dot{\Omega}$	升交点赤经变化率与参考值之差
$C_{rc}$	卫星矢量长度余弦调和改正项
$C_{rs}$	卫星矢量长度正弦调和改正项
$C_{uc}$	升交点角距余弦改正项
$C_{us}$	升交点正弦改正项
$C_{ic}$	轨道倾角余弦改正项
$C_{is}$	轨道倾角正弦改正项

### 2.3.2 用户算法

用户根据收到广播星历参数之后可以计算卫星在任意观测时刻位置。GPS 18 参数广播星历具体算法如下<sup>[149]</sup>：

计算观测时刻与参考时刻时间差  $t_k$ ：

$$t_k = t - t_{oe} \quad (2.11)$$

计算卫星平均角速度  $n_k$ ：

$$n_k = \sqrt{\frac{GM}{A_k^3}} + \Delta n + \frac{1}{2} \Delta \dot{n} t_k \quad (2.12)$$

其中， $A_{ref}$  为半长轴参考值； $\Delta n$  和  $\Delta \dot{n}$  分别为卫星平均角速度校正值及其一次变化率。

计算观测时刻轨道半长轴  $A_k$ ：

$$A_k = A_{ref} + \Delta A + \dot{A} t_k \quad (2.13)$$

计算观测时刻平近点角  $M_k$ ：

$$M_k = M_0 + n_k t_k \quad (2.14)$$

迭代计算偏近点角  $E_k$ :

$$E_k = M_k + e \sin E_k \quad (2.15)$$

计算真近点角  $f_k$ :

$$f_k = 2 \arctan \left( \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E_k}{2} \right) \quad (2.16)$$

计算纬度幅角:

$$\Phi_k = f_k + \omega \quad (2.17)$$

计算纬度幅角改正项  $\delta u_k$ :

$$\delta u_k = C_{uc} \cos(2\Phi_k) + C_{us} \sin(2\Phi_k) \quad (2.18)$$

计算轨道倾角改正项  $\delta i_k$ :

$$\delta i_k = C_{ic} \cos(2\Phi_k) + C_{is} \sin(2\Phi_k) \quad (2.19)$$

计算径向改正项  $\delta r_k$ :

$$\delta r_k = C_{rc} \cos(2\Phi_k) + C_{rs} \sin(2\Phi_k) \quad (2.20)$$

计算改正后的纬度幅角  $u_k$ :

$$u_k = \Phi_k + \delta u_k \quad (2.21)$$

改正后的径向  $r_k$ :

$$r_k = a(1 - e \cos E_k) + \delta r_k \quad (2.22)$$

改正后的轨道倾角  $i_k$ :

$$i_k = i_0 + \delta i_k + \dot{i} t_k \quad (2.23)$$

计算卫星在轨道平面坐标系坐标

$$\begin{cases} x_k = r_k \cos u_k \\ y_k = r_k \sin u_k \end{cases} \quad (2.24)$$

计算观测时刻升交点赤经  $\Omega_k$ :

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \omega_e) t_k - \omega_e t_{oe} \quad (2.25)$$

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{ref} + \Delta\dot{\Omega} \quad (2.26)$$

其中,  $\omega_e$  是地球自转角速度,  $\dot{\Omega}_{ref}$  是升交点赤经参考值。

计算卫星在地心地固坐标系下的坐标:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \cos \Omega_k - y_k \cos i_k \sin \Omega_k \\ x_k \sin \Omega_k + y_k \cos i_k \cos \Omega_k \\ y_k \sin i_k \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

每个历元的卫星坐标由相应的轨道参数经过上述算法得到, 其函数可抽象表示为:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = F(t, t_{oe}, \Delta A, \dot{A}, \Delta n_0, \Delta \dot{n}, M_0, e, \omega, C_{uc}, C_{us}, C_{rc}, C_{rs}, C_{ic}, C_{is}, i_0, \dot{i}, \Omega_0, \Delta\dot{\Omega}) \quad (2.28)$$

## 2.4 广播星历参数拟合方法

目前绝大多数参考文献在拟合广播星历时, 先采用复杂的解析法计算偏导数, 再用迭代最小二乘法拟合参数<sup>[86,87,102,150]</sup>。但是, 解析法推导偏导数的过程非常复杂, 而迭代最小二乘法拟合参数的数值稳定性有时不太理想。本节以 GPS 18 参数广播星历的拟合过程为例, 介绍一种拟合广播星历参数的简便策略。鉴于 GPS 18 参数广播星历模型拟合精度更高且偏导数推算过程更为复杂, 本节首先使用解析法详细推导 GPS 18 参数广播星历模型每个参数的偏导数。然后, 介绍使用数值导数法计算偏导数与基于 QR 分解的参数估计方法。最后, 采用 2019 年 4 月 17 日德国地学研究中心发布的精密星历, 拟合 GPS 18 参数广播星历。在拟合过程中, 对于偏导数的计算分别采用严格解析法与数值导数法, 并对使用这两种方法的拟合结果进行比较分析; 在估计广播星历参数时, 分别采用迭代最小二乘

与基于 QR 分解的迭代拟合方法，并同样对这两种参数估计方法的拟合结果进行比较分析。

### 2.4.1 卫星位置矢量对 GPS 18 参数星历的偏导数推导

为了线性化方程，需要计算广播星历中每个参数的偏导数。本节严格推导了 GPS 18 参数广播星历每个参数的偏导数，具体推导过程如下所示：

(1)  $\Delta A$  偏导数推导

由(2.24)和(2.27)式可知：

$$\frac{\partial x}{\partial \Delta A} = \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta A} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \Delta A} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial \Delta A} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \Delta A} \quad (2.29)$$

由(2.15)、(2.21)、(2.23)和(2.25)式可知：  $\frac{\partial u_k}{\partial \Delta A} = 0$ ，  $\frac{\partial i_k}{\partial \Delta A} = 0$ ，  $\frac{\partial \Omega_k}{\partial \Delta A} = 0$

所以，

$$\frac{\partial x}{\partial \Delta A} = \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta A} \quad (2.30)$$

由(2.27)式可知：

$$\frac{\partial x}{\partial r_k} = \cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k \quad (2.31)$$

由(2.22)式可知：

$$\frac{\partial r_k}{\partial \Delta A} = 1 - e \cos E_k \quad (2.32)$$

所以，

$$\frac{\partial x}{\partial \Delta A} = \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta A} = (1 - e \cos E_k) (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k) \quad (2.33)$$

同理，

$$\frac{\partial y}{\partial \Delta A} = \frac{\partial y}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta A} = (1 - e \cos E_k) (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos i_k \cos \Omega_k) \quad (2.34)$$



$$\frac{\partial z}{\partial \Delta A} = \frac{\partial z}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta A} = (1 - e \cos E_k) (\sin u_k \sin i_k) \quad (2.35)$$

## (2) $\dot{A}$ 偏导数推导

由(2.24)和(2.27)式可知:

$$\frac{\partial x}{\partial \dot{A}} = \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \dot{A}} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \dot{A}} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial \dot{A}} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{A}} \quad (2.36)$$

由(2.15)、(2.21)、(2.23)和(2.25)式可知:  $\frac{\partial u_k}{\partial \dot{A}} = 0$ ,  $\frac{\partial i_k}{\partial \dot{A}} = 0$ ,  $\frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{A}} = 0$

所以,

$$\frac{\partial x}{\partial \dot{A}} = \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \dot{A}} \quad (2.37)$$

由(2.31)式可知:

$$\frac{\partial r_k}{\partial \dot{A}} = t_k (1 - e \cos E_k) \quad (2.38)$$

所以,

$$\frac{\partial x}{\partial \dot{A}} = \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \dot{A}} = t_k (1 - e \cos E_k) (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k) \quad (2.39)$$

同理,

$$\frac{\partial y}{\partial \dot{A}} = \frac{\partial y}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \dot{A}} = t_k (1 - e \cos E_k) (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos i_k \cos \Omega_k) \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \dot{A}} = \frac{\partial z}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \dot{A}} = t_k (1 - e \cos E_k) (\sin u_k \sin i_k) \quad (2.41)$$

## (3) 偏心率 $e$ 的偏导数

偏心率  $e$  的偏导数的推导过程相对复杂。由(2.24)和(2.27)式可知:

$$\frac{\partial x}{\partial e} = \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial e} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial e} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial e} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial e} \quad (2.42)$$

由(2.23)和(2.25)式可知：  $\frac{\partial i_k}{\partial e} = 0$  ,  $\frac{\partial \Omega_k}{\partial e} = 0$

所以，

$$\frac{\partial x}{\partial e} = \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial e} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial e} \quad (2.43)$$

由(2.15)式可知：

$$\partial E_k = \sin E_k \partial e + e \cos E_k \partial E_k \quad (2.44)$$

所以，

$$\frac{\partial E_k}{\partial e} = \frac{\sin E_k}{1 - e \cos E_k} \quad (2.45)$$

由(2.22)式可知，

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_k}{\partial e} &= -A_k \left( \cos E_k - e \sin E_k \frac{\sin E_k}{1 - e \cos E_k} \right) \\ &= -A_k \left( \frac{\cos E_k - e \cos^2 E_k - e \sin^2 E_k}{1 - e \cos E_k} \right) \\ &= \frac{A_k (e - \cos E_k)}{1 - e \cos E_k} \end{aligned} \quad (2.46)$$

再结合(2.31)式可知：

$$\frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial e} = \frac{A_k (e - \cos E_k)}{1 - e \cos E_k} (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k) \quad (2.47)$$

同理，

$$\frac{\partial y}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial e} = \frac{A_k (e - \cos E_k)}{1 - e \cos E_k} (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos i_k \cos \Omega_k) \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial z}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial e} = \frac{A_k (e - \cos E_k)}{1 - e \cos E_k} (\sin u_k \sin i_k) \quad (2.49)$$

由(2.27)式可知:

$$\frac{\partial x}{\partial u_k} = r_k (-\sin u_k \cos \Omega_k - \cos u_k \cos i_k \sin \Omega_k) \quad (2.50)$$

由(2.21)式可知:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial e} &= \frac{2}{1 + \frac{1+e}{1-e} \tan^2 \frac{E_k}{2}} \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1-e+1-e}{(1-e)^2} \tan \frac{E_k}{2} + \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{\cos^2 \frac{E_k}{2}} \frac{1}{2} \frac{\partial E_k}{\partial e} \right) \\ &= \frac{2}{1 + \frac{1+e}{1-e} \tan^2 \frac{E_k}{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}} \frac{1}{(1-e)^2} \tan \frac{E_k}{2} + \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{\cos^2 \frac{E_k}{2}} \frac{1}{2} \frac{\sin E_k}{1-e \cos E_k} \right) \\ &= \frac{2}{1 + \frac{1+e}{1-e} \frac{1-\cos E_k}{1+\cos E_k}} \left( \frac{1}{\sqrt{(1+e)(1-e)^3}} \tan \frac{E_k}{2} + \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{\cos^2 \frac{E_k}{2}} \frac{1}{2} \frac{\sin E_k}{1-e \cos E_k} \right) \\ &= \frac{2}{1 + \frac{1+e}{1-e} \frac{1-\cos E_k}{1+\cos E_k}} \left( \frac{1}{\sqrt{(1+e)(1-e)^3}} \frac{\sin E_k}{1+\cos E_k} + \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{1+\cos E_k} \frac{\sin E_k}{1-e \cos E_k} \right) \\ &= \frac{2 \sin E_k}{1 + \frac{1+e}{1-e} \frac{1-\cos E_k}{1+\cos E_k}} \left( \frac{1}{(1+\cos E_k) \sqrt{(1+e)(1-e)^3}} + \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{(1+\cos E_k)(1-e \cos E_k)} \right) \\ &= \frac{2 \sin E_k (1-e)(1+\cos E_k)}{2(1-e \cos E_k)} \left( \frac{1}{(1+\cos E_k) \sqrt{(1+e)(1-e)^3}} + \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{(1+\cos E_k)(1-e \cos E_k)} \right) \quad (2.51) \\ &= \frac{\sin E_k (1-e)}{1-e \cos E_k} \left( \frac{1}{\sqrt{(1+e)(1-e)^3}} + \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{(1-e \cos E_k)} \right) \\ &= \frac{\sin E_k}{1-e \cos E_k} \left( \sqrt{\frac{(1-e)^2}{(1+e)(1-e)^3}} + \sqrt{\frac{(1+e)(1-e)^2}{1-e}} \frac{1}{1-e \cos E_k} \right) \\ &= \frac{\sin E_k}{1-e \cos E_k} \left( \sqrt{\frac{1}{(1+e)(1-e)}} + \sqrt{1-e^2} \frac{1}{1-e \cos E_k} \right) \\ &= \frac{\sin E_k}{1-e \cos E_k} \left( \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E_k} \right) \\ &= \frac{\sin E_k}{1-e \cos E_k} \left( \frac{1-e \cos E_k + 1-e^2}{\sqrt{1-e^2} (1-e \cos E_k)} \right) \\ &= \frac{\sin E_k (2-e \cos E_k - e^2)}{\sqrt{1-e^2} (1-e \cos E_k)^2} \\ &= \frac{2 \sin E_k - e \sin E_k \cos E_k - e^2 \sin E_k}{\sqrt{1-e^2} (1-e \cos E_k)^2} \end{aligned}$$

所以,

$$\frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial e} = \frac{r_k (2 \sin E_k - e \sin E_k \cos E_k - e^2 \sin E_k)}{\sqrt{1-e^2} (1-e \cos E_k)^2} (-\sin u_k \cos \Omega_k - \cos u_k \sin \Omega_k \cos i_k) \quad (2.52)$$

同理，

$$\frac{\partial y}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial e} = \frac{r_k (2 \sin E_k - e \sin E_k \cos E_k - e^2 \sin E_k)}{\sqrt{1-e^2} (1-e \cos E_k)^2} (-\sin u_k \sin \Omega_k + \cos u_k \cos \Omega_k \cos i_k) \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial e} = \frac{r_k (2 \sin E_k - e \sin E_k \cos E_k - e^2 \sin E_k)}{\sqrt{1-e^2} (1-e \cos E_k)^2} (\cos u_k \sin i_k) \quad (2.54)$$

综上所述，

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial e} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial e} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial e} \\ &= \frac{A_k (e - \cos E_k)}{1 - e \cos E_k} (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin \Omega_k \cos i_k) \\ &\quad + \frac{r_k (2 \sin E_k - e \sin E_k \cos E_k - e^2 \sin E_k)}{\sqrt{1-e^2} (1-e \cos E_k)^2} (-\sin u_k \cos \Omega_k - \cos u_k \sin \Omega_k \cos i_k) \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial e} &= \frac{\partial y}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial e} + \frac{\partial y}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial e} \\ &= \frac{A_k (e - \cos E_k)}{1 - e \cos E_k} (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos \Omega_k \cos i_k) \\ &\quad + \frac{r_k (2 \sin E_k - e \sin E_k \cos E_k - e^2 \sin E_k)}{\sqrt{1-e^2} (1-e \cos E_k)^2} (-\sin u_k \sin \Omega_k + \cos u_k \cos \Omega_k \cos i_k) \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial e} &= \frac{\partial z}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial e} + \frac{\partial z}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial e} \\ &= \frac{A_k (e - \cos E_k)}{1 - e \cos E_k} (\sin u_k \sin i_k) \\ &\quad + \frac{r_k (2 \sin E_k - e \sin E_k \cos E_k - e^2 \sin E_k)}{\sqrt{1-e^2} (1-e \cos E_k)^2} (\cos u_k \sin i_k) \end{aligned} \quad (2.57)$$

#### (4) 轨道倾角 $i_0$ 的偏导数

由(2.24)、(2.23)和(2.27)式可知：

$$\frac{\partial x}{\partial i_0} = \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial i_0} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial i_0} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial i_0} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial i_0} \quad (2.58)$$

由(2.15)、(2.21)、(2.22)和(2.25)式可知： $\frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial i_0} = 0$ ， $\frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial i_0} = 0$ ， $\frac{\partial \Omega_k}{\partial i_0} = 0$

所以，

$$\frac{\partial x}{\partial i_0} = \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial i_0} \quad (2.59)$$

由(2.23)式可知：

$$\frac{\partial i_k}{\partial i_0} = 1 \quad (2.60)$$

由(2.27)式可知：

$$\frac{\partial x}{\partial i_k} = \sin u_k \sin i_k \sin \Omega_k \quad (2.61)$$

所以，

$$\frac{\partial x}{\partial i_0} = \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial i_0} = r_k \sin u_k \sin i_k \sin \Omega_k \quad (2.62)$$

同理，

$$\frac{\partial y}{\partial i_0} = \frac{\partial y}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial i_0} = -r_k \sin u_k \sin i_k \cos \Omega_k \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial z}{\partial i_0} = \frac{\partial z}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial i_0} = r_k \sin u_k \cos i_k \quad (2.64)$$

(5) 轨道倾角变化率 $i$ 的偏导数

由(2.24)、(2.23)和(2.27)式可知：

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \dot{i}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \dot{i}} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \dot{i}} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial \dot{i}} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{i}} \\ &= \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial \dot{i}} \\ &= r_k t_k (\sin u_k \sin i_k \sin \Omega_k) \end{aligned} \quad (2.65)$$

同理，

$$\frac{\partial y}{\partial \dot{i}} = r_k t_k (-\sin u_k \sin i_k \cos \Omega_k) \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \dot{i}} = r_k t_k (\sin u_k \cos i_k) \quad (2.67)$$

(6) 升交点赤经  $\Omega_0$  的偏导数

由(2.22)、(2.23)、(2.24)、(2.25)和(2.27)式可知:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \Omega_0} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Omega_0} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \Omega_0} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial \Omega_0} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \Omega_0} \\ &= \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \Omega_0} \\ &= r_k (-\cos u_k \sin \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \cos \Omega_k)\end{aligned}\quad (2.68)$$

同理,

$$\frac{\partial y}{\partial \Omega_0} = r_k (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k) \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Omega_0} = 0 \quad (2.70)$$

(7) 升交点赤经变化率  $\dot{\Omega}$  的偏导数

由(2.22)、(2.23)、(2.24)、(2.25)和(2.27)式可知:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \dot{\Omega}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \dot{\Omega}} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \dot{\Omega}} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial \dot{\Omega}} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{\Omega}} \\ &= \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{\Omega}}\end{aligned}\quad (2.71)$$

由(2.25)和(2.26)式可知:  $\frac{\partial \Omega_k}{\partial \dot{\Omega}} = t_k$

再结合(2.27)式可知

$$\frac{\partial x}{\partial \dot{\Omega}} = t_k r_k (-\cos u_k \sin \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \cos \Omega_k) \quad (2.72)$$

同理:

$$\frac{\partial y}{\partial \dot{\Omega}} = t_k r_k (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k) \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \dot{\Omega}} = 0 \quad (2.74)$$

(8) 近地点角距  $\omega$  的偏导数

由(2.22)、(2.23)、(2.24)、(2.25)和(2.27)式可知:

$$\frac{\partial x}{\partial \omega} = \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \omega} = r_k (-\sin u_k \cos \Omega_k - \cos u_k \cos i_k \sin \Omega_k) \quad (2.75)$$

同理,

$$\frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{\partial y}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \omega} = r_k (-\sin u_k \sin \Omega_k + \cos u_k \cos i_k \cos \Omega_k) \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = \frac{\partial z}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \omega} = r_k (\cos u_k \sin i_k) \quad (2.77)$$

(9) 平近点角  $M_0$  的偏导数

由(2.22)、(2.23)、(2.24)、(2.25)和(2.27)式可知:

$$\frac{\partial x}{\partial M_0} = \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial M_0} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial M_0} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial M_0} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial M_0} \quad (2.78)$$

由(2.14)和(2.15)式可知:

$$E_k = M_0 + n_k t_k + e \sin E_k \quad (2.79)$$

所以,

$$\partial E_k = \partial M_0 + e \partial E_k \cos E_k \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial M_0} = \frac{1}{1 - e \cos E_k} \quad (2.81)$$

所以,

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_k}{\partial M_0} &= A_k e \sin E_k \frac{\partial E_k}{\partial M_0} \\ &= \frac{A_k e \sin E_k}{1 - e \cos E_k} \end{aligned} \quad (2.82)$$

所以,

$$\frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial M_0} = \frac{A_k e \sin E_k}{1 - e \cos E_k} (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin \Omega_k \cos i_k) \quad (2.83)$$

由(2.16)、(2.17)和(2.21)式可知:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_k}{\partial M_0} &= \frac{2}{1 + \frac{1+e}{1-e} \tan^2 \frac{E_k}{2}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{\cos^2 \frac{E_k}{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{1-e \cos E_k} \\
 &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{\cos^2 \frac{E_k}{2} + \frac{1+e}{1-e} \sin^2 \frac{E_k}{2}} \frac{1}{1-e \cos E_k} \\
 &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{2(1-e)}{(1+\cos E_k)(1-e) + (1+e)(1-\cos E_k)} \frac{1}{1-e \cos E_k} \\
 &= 2 \sqrt{\frac{(1+e)(1-e)^2}{1-e}} \frac{1}{2(1-e \cos E_k)} \frac{1}{1-e \cos E_k} \\
 &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E_k)^2}
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

所以,

$$\frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial M_0} = \frac{r_k \sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E_k)^2} (-\sin u_k \cos \Omega_k + \cos u_k \cos \Omega_k \cos i_k) \tag{2.85}$$

所以,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial M_0} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial M_0} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial M_0} \\
 &= \frac{A_k e \sin E_k}{1-e \cos E_k} (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin \Omega_k \cos i_k) \\
 &\quad + \frac{r_k \sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E_k)^2} (-\sin u_k \cos \Omega_k + \cos u_k \cos \Omega_k \cos i_k)
 \end{aligned} \tag{2.86}$$

同理,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y}{\partial M_0} &= \frac{\partial y}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial M_0} + \frac{\partial y}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial M_0} \\
 &= \frac{A_k e \sin E_k}{1-e \cos E_k} (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos \Omega_k \cos i_k) \\
 &\quad + \frac{r_k \sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E_k)^2} (-\sin u_k \sin \Omega_k + \cos u_k \cos \Omega_k \cos i_k)
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial M_0} &= \frac{\partial z}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial M_0} + \frac{\partial z}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial M_0} \\
 &= \frac{A_k e \sin E_k}{1-e \cos E_k} (\sin u_k \sin i_k) + \frac{r_k \sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E_k)^2} (\cos u_k \sin i_k)
 \end{aligned} \tag{2.88}$$



(10) 平均角速度改正量  $\Delta n_0$  的偏导数

由(2.15)、(2.21)、(2.22)、(2.23)、(2.24)、(2.25)和(2.26)可知:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \Delta n_0} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta n_0} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \Delta n_0} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial \Delta n_0} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \Delta n_0} \\ &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta n_0} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \Delta n_0}\end{aligned}\quad (2.89)$$

由(2.14)和(2.15)式可知:

$$\partial E_k = t_k \partial \Delta n_0 + e \cos E_k \partial E_k \quad (2.90)$$

所以,

$$\frac{\partial E_k}{\partial \Delta n_0} = \frac{t_k}{1 - e \cos E_k} \quad (2.91)$$

所以,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_k}{\partial \Delta n_0} &= A_k e \sin E_k \frac{\partial E_k}{\partial \Delta n_0} \\ &= \frac{t_k A_k e \sin E_k}{1 - e \cos E_k}\end{aligned}\quad (2.92)$$

所以,

$$\frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta n_0} = \frac{t_k A_k e \sin E_k}{1 - e \cos E_k} (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k) \quad (2.93)$$

由(2.21)式可知,

$$\frac{\partial u_k}{\partial \Delta n_0} = \frac{\partial u_k}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial \Delta n_0} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_k}{\partial E_k} &= 2 \frac{1}{1 + \frac{1+e}{1-e} \tan^2 \frac{E_k}{2}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{\cos^2 \frac{E_k}{2}} \frac{1}{2} \\
 &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{\frac{1+\cos E_k}{2} + \frac{1+e}{1-e} \frac{1-\cos E_k}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{2(1-e)}{(1-2)(1+\cos E_k) + (1+e)(1-\cos E_k)} \\
 &= \sqrt{\frac{(1+e)(1-e)^2}{1-e}} \frac{1}{1-e \cos E_k} \\
 &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos E_k}
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

所以,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_k}{\partial \Delta n_0} &= \frac{\partial u_k}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial \Delta n_0} \\
 &= \frac{t_k \sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E_k)^2}
 \end{aligned} \tag{2.96}$$

所以,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \Delta n_0} &= \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial \Delta n_0} \\
 &= \frac{r_k t_k \sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E_k)^2} (-\sin u_k \cos \Omega_k - \cos u_k \sin \Omega_k \cos i_k)
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

所以,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial \Delta n_0} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta n_0} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial \Delta n_0} \\
 &= \frac{t_k A_k e \sin E_k}{1-e \cos E_k} (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k) \\
 &\quad + \frac{r_k t_k \sqrt{1-e^2}}{(1-e \cos E_k)^2} (-\sin u_k \cos \Omega_k - \cos u_k \sin \Omega_k \cos i_k)
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

同理,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial \Delta n_0} &= \frac{\partial y}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta n_0} + \frac{\partial y}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial \Delta n_0} \\
&= \frac{t_k A_k e \sin E_k}{1 - e \cos E_k} (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos i_k \cos \Omega_k) \\
&\quad + \frac{r_k t_k \sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E_k)^2} (-\sin u_k \sin \Omega_k + \cos u_k \cos \Omega_k \cos i_k)
\end{aligned} \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \Delta n_0} &= \frac{\partial z}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta n_0} + \frac{\partial z}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial \Delta n_0} \\
&= \frac{t_k A_k e \sin E_k}{1 - e \cos E_k} (\sin u_k \sin i_k) + \frac{r_k t_k \sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E_k)^2} (\cos u_k \sin i_k)
\end{aligned} \tag{2.100}$$

(11) 平均角速度校正一次变化率  $\Delta \dot{n}$  的偏导数

由(2.15)、(2.21)、(2.22)、(2.23)、(2.24)、(2.25)和(2.26)可知:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \Delta \dot{n}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta \dot{n}} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \Delta \dot{n}} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial \Delta \dot{n}} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial \Delta \dot{n}} \\
&= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta \dot{n}} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \Delta \dot{n}}
\end{aligned} \tag{2.101}$$

由(2.14)和(2.15)式可知:

$$(1 - e \cos E_k) \partial E_k = \frac{t_k^2 \partial \Delta \dot{n}}{2} \tag{2.102}$$

所以,

$$\frac{\partial E_k}{\partial \Delta \dot{n}} = \frac{t_k^2}{2(1 - e \cos E_k)} \tag{2.103}$$

由(2.22)和(2.27)式可知,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_k}{\partial \Delta \dot{n}} &= A_k e \sin E_k \frac{\partial E_k}{\partial \Delta \dot{n}} \\
&= \frac{A_k e \sin E_k t_k^2}{2(1 - e \cos E_k)}
\end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r_k} = \cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin \Omega_k \cos i_k \tag{2.105}$$

所以,

$$\frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta \dot{n}} = \frac{A_k e \sin E_k t_k^2}{2(1 - e \cos E_k)} (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin \Omega_k \cos i_k) \quad (2.106)$$

由(2.95)和(2.103)式可知:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial \Delta \dot{n}} &= \frac{\partial u_k}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial \Delta \dot{n}} \\ &= \frac{1}{2} t_k^2 \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E_k)^2} \end{aligned} \quad (2.107)$$

再结合(2.97)式可知

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \Delta \dot{n}} &= \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial \Delta \dot{n}} \\ &= \frac{1}{2} t_k^2 \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E_k)^2} (-\sin u_k \cos \Omega_k - \cos u_k \sin \Omega_k \cos i_k) \end{aligned} \quad (2.108)$$

所以,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \Delta \dot{n}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta \dot{n}} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial \Delta \dot{n}} \\ &= \frac{A_k e \sin E_k t_k^2}{2(1 - e \cos E_k)} (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin \Omega_k \cos i_k) \\ &\quad + \frac{1}{2} t_k^2 \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E_k)^2} (-\sin u_k \cos \Omega_k - \cos u_k \sin \Omega_k \cos i_k) \end{aligned} \quad (2.109)$$

同理,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \Delta \dot{n}} &= \frac{\partial y}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta \dot{n}} + \frac{\partial y}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial \Delta \dot{n}} \\ &= \frac{A_k e \sin E_k t_k^2}{2(1 - e \cos E_k)} (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos \Omega_k \cos i_k) \\ &\quad + \frac{1}{2} t_k^2 \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E_k)^2} (-\sin u_k \sin \Omega_k + \cos u_k \cos \Omega_k \cos i_k) \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \Delta \dot{n}} &= \frac{\partial z}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial \Delta \dot{n}} + \frac{\partial z}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial \Delta \dot{n}} \\ &= \frac{A_k e \sin E_k t_k^2}{2(1 - e \cos E_k)} (\sin u_k \sin i_k) + \frac{1}{2} t_k^2 \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E_k)^2} (\cos u_k \sin i_k) \end{aligned} \quad (2.111)$$

(12) 升交角距正弦调和改正项  $C_{us}$  的偏导数

由(2.21)、(2.15)、(2.22)、(2.23)、(2.24)、(2.25)和(2.26)式可知:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial C_{us}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{us}} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{us}} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial C_{us}} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial C_{us}} \\ &= \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{us}}\end{aligned}\quad (2.112)$$

由(2.18)、(2.21)和(2.27)式可知,

$$\frac{\partial u_k}{\partial C_{us}} = \sin(2\Phi_k) \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial C_{us}} &= \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{us}} \\ &= r_k \sin(2\Phi_k) (-\sin u_k \sin \Omega_k - \cos u_k \cos i_k \sin \Omega_k)\end{aligned}\quad (2.114)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial C_{us}} &= \frac{\partial y}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{us}} \\ &= r_k \sin(2\Phi_k) (-\sin u_k \sin \Omega_k + \cos u_k \cos i_k \cos \Omega_k)\end{aligned}\quad (2.115)$$

$$\frac{\partial z}{\partial C_{us}} = \frac{\partial z}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{us}} = r_k \sin(2\Phi_k) (\cos u_k \sin i_k) \quad (2.116)$$

(13) 升交角距正弦调和改正项  $C_{uc}$  的偏导数

由(2.15)、(2.21)、(2.22)、(2.23)、(2.24)、(2.25)和(2.26)式可知:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial C_{uc}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{uc}} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{uc}} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial C_{uc}} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial C_{uc}} \\ &= \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{uc}}\end{aligned}\quad (2.117)$$

由(2.18)、(2.21)和(2.27)式可知,

$$\frac{\partial u_k}{\partial C_{uc}} = \cos(2\Phi_k) \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial C_{uc}} &= \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{uc}} \\ &= r_k \cos(2\Phi_k) (-\sin u_k \sin \Omega_k - \cos u_k \cos i_k \sin \Omega_k)\end{aligned}\quad (2.119)$$

同理,

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial C_{uc}} &= \frac{\partial y}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{uc}} \\ &= r_k \cos(2\Phi_k) (-\sin u_k \sin \Omega_k + \cos u_k \cos i_k \cos \Omega_k)\end{aligned}\quad (2.120)$$

$$\frac{\partial z}{\partial C_{uc}} = \frac{\partial z}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{uc}} = r_k \cos(2\Phi_k) (\cos u_k \sin i_k) \quad (2.121)$$

(14) 轨道半轴正弦调和改正项  $C_{rs}$  的偏导数

由(2.15)、(2.21)、(2.22)、(2.23)、(2.24)、(2.25)和(2.26)式可知:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial C_{rs}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{rs}} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{rs}} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial C_{rs}} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial C_{rs}} \\ &= \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{rs}}\end{aligned}\quad (2.122)$$

由(2.20)和(2.22)式可知,

$$\frac{\partial r_k}{\partial C_{rs}} = \sin(2\Phi_k) \quad (2.123)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial C_{rs}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{rs}} \\ &= \sin(2\Phi_k) (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k)\end{aligned}\quad (2.124)$$

同理,

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial C_{rs}} &= \frac{\partial y}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{rs}} \\ &= \sin(2\Phi_k) (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos i_k \cos \Omega_k)\end{aligned}\quad (2.125)$$

$$\frac{\partial z}{\partial C_{rs}} = \frac{\partial z}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{rs}} = \sin(2\Phi_k) (\sin u_k \sin i_k) \quad (2.126)$$

(15) 轨道半轴余弦调和改正项  $C_{rc}$  的偏导数

由(2.15)、(2.21)、(2.22)、(2.23)、(2.24)、(2.25)和(2.26)式可知:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial C_{rc}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{rc}} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{rc}} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial C_{rc}} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial C_{rc}} \\ &= \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{rc}}\end{aligned}\quad (2.127)$$

由(2.20)和(2.22)式可知,

$$\frac{\partial r_k}{\partial C_{rc}} = \cos(2\Phi_k) \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial C_{rc}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{rc}} \\ &= \cos(2\Phi_k)(\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k) \end{aligned} \quad (2.129)$$

同理,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial C_{rc}} &= \frac{\partial y}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{rc}} \\ &= \cos(2\Phi_k)(\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos i_k \cos \Omega_k) \end{aligned} \quad (2.130)$$

$$\frac{\partial z}{\partial C_{rc}} = \frac{\partial z}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{rc}} = \cos(2\Phi_k)(\sin u_k \sin i_k) \quad (2.131)$$

(16) 轨道倾角正弦调和改正项  $C_{is}$  的偏导数

由(2.15)、(2.21)、(2.22)、(2.23)、(2.24)、(2.25)和(2.26)式可知:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial C_{is}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{is}} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{is}} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial C_{is}} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial C_{is}} \\ &= \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{is}} \end{aligned} \quad (2.132)$$

由(2.20)和(2.23)式可知,

$$\frac{\partial i_k}{\partial C_{is}} = \sin(2\Phi_k) \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial C_{is}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{is}} \\ &= r_k \sin(2\Phi_k) \sin u_k (\sin i_k \sin \Omega_k) \end{aligned} \quad (2.134)$$

同理,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial C_{is}} &= \frac{\partial y}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{is}} \\ &= r_k \sin(2\Phi_k) \sin u_k (-\sin i_k \cos \Omega_k) \end{aligned} \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial C_{is}} &= \frac{\partial z}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{is}} \\ &= r_k \sin(2\Phi_k) \sin u_k \cos i_k \end{aligned} \quad (2.136)$$

(17) 轨道倾角余弦调和改正项  $C_{ic}$  的偏导数

由(2.15)、(2.21)、(2.22)、(2.23)、(2.24)、(2.25)和(2.26)式可知：

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial C_{ic}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{ic}} + \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{ic}} + \frac{\partial x}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial C_{ic}} + \frac{\partial x}{\partial \Omega_k} \frac{\partial \Omega_k}{\partial C_{ic}} \\ &= \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial C_{ic}}\end{aligned}\quad (2.137)$$

由(2.20)和(2.23)式可知，

$$\frac{\partial i_k}{\partial C_{ic}} = \cos(2\Phi_k) \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial C_{ic}} &= \frac{\partial x}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{ic}} \\ &= r_k \cos(2\Phi_k) \sin u_k (\sin i_k \sin \Omega_k)\end{aligned}\quad (2.139)$$

同理，

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial C_{ic}} &= \frac{\partial y}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{ic}} \\ &= r_k \cos(2\Phi_k) \sin u_k (-\sin i_k \cos \Omega_k)\end{aligned}\quad (2.140)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial C_{ic}} &= \frac{\partial z}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial C_{ic}} \\ &= r_k \cos(2\Phi_k) \sin u_k \cos i_k\end{aligned}\quad (2.141)$$

## 2.4.2 数值导数法计算偏导数

由 2.4.1 节展示的推导过程可以发现：GPS 18 参数广播星历参数的偏导数严格推导过程非常复杂。而且为了设计适用于低轨卫星的广播星历，还需针对新的星历模型重新推导偏导数，工作量非常巨大。因此，可以考虑使用数值导数法计算每个参数的偏导数<sup>[83]</sup>。

以 GPS 18 参数广播星历中偏心率  $e$  的偏导数计算为例。由偏导数的定义可知：

$$\frac{\partial F}{\partial e} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F(t, t_{oe}, e + \Delta) - F(t, t_{oe}, e)}{\Delta} \quad (2.142)$$

如果  $\Delta$  足够小，则(2.142)式可近似等价于：



$$\frac{\partial F}{\partial e} \approx \frac{F(t, t_{oe}, e + \Delta) - F(t, t_{oe}, e)}{\Delta} \quad (2.143)$$

那么在某观测时刻，关于广播星历参数偏心率  $e$  的偏导数，可计算为：

$$\begin{pmatrix} \left( \frac{\partial F_x}{\partial e} \right)_{t_{oe}} \\ \left( \frac{\partial F_y}{\partial e} \right)_{t_{oe}} \\ \left( \frac{\partial F_z}{\partial e} \right)_{t_{oe}} \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial e} = \frac{F(t, t_{oe}, e + \Delta) - F(t, t_{oe}, e)}{\Delta} \quad (2.144)$$

至于其它广播星历的偏导数，参照上述过程也可以逐一计算得到。因此，使用数值导数法可以有效避免复杂的偏导数推导，达到方便快速计算每个广播星历参数偏导数的目的。但是在使用数值导数法的过程中，微小量  $\Delta$  的选取非常关键。如果选择过大，则偏导数计算精度难以满足要求，造成迭代拟合广播星历参数时，无法收敛。反之，微小量  $\Delta$  选取过小，则会超出计算机有效精度范围。对于每个广播星历参数，其相应的微小量  $\Delta$  的选取，应使得  $\Delta F$  的变化量在厘米范围内变化比较合适。

对于低轨卫星的广播星历参数设计而言，通常需要设计几套不同的方案。拟合每套方案的参数时，理论上需要重新推导相关参数的偏导数。由于严格的偏导数推导过程相当复杂。因此，使用数值导数法避免这一复杂的偏导数推导过程是非常必要的。在后续章节，将会对严格解析法与数值导数法这两种偏导数计算方式，对于拟合精度的影响进行分析。

### 2.4.3 基于迭代最小二乘的参数估计方法

使用解析法或者数值导数法为每个参数计算偏导数之后，可以确定误差方程为：

$$v_i = A_i \delta x - l_i \quad (2.145)$$

具体可写为：

$$\begin{pmatrix} Vx_i \\ Vy_i \\ Vz_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial Fx_i}{\partial \Delta A} \right)_{toe} & \dots & \left( \frac{\partial Fx_i}{\partial \Delta \dot{\Omega}} \right)_{toe} \\ \left( \frac{\partial Fy_i}{\partial \Delta A} \right)_{toe} & \dots & \left( \frac{\partial Fy_i}{\partial \Delta \dot{\Omega}} \right)_{toe} \\ \left( \frac{\partial Fz_i}{\partial \Delta A} \right)_{toe} & \dots & \left( \frac{\partial Fz_i}{\partial \Delta \dot{\Omega}} \right)_{toe} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \Delta A \\ \vdots \\ \delta \Delta \dot{\Omega} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_i^0 - F_{x_i}^0 \\ Y_i^0 - F_{y_i}^0 \\ Z_i^0 - F_{z_i}^0 \end{pmatrix} \quad (2.146)$$

式中  $(X_i^0, Y_i^0, Z_i^0)$  为精密星历提供的卫星坐标； $(F_{x_i}^0, F_{y_i}^0, F_{z_i}^0)$  是根据轨道根数计算得到的卫星坐标。

根据拟合时间段内精密轨道数据，每个历元都可以确定一组系数。所有历元对应的系数组合在一起，可以确定误差方程系数阵  $A$ 。常数项由精密星历提供的坐标与广播星历计算的坐标之差确定。6 个历元卫星矢量可以组成 18 个误差方程。对于 GPS 18 参数广播星历，当历元数至少为 6 个时，便可拟合相应参数。

确定误差方程之后，采用间接平差方法，组成法方程迭代拟合广播星历参数。

$$N\delta x - U = 0 \quad (2.147)$$

$$N = A^T P A \quad (2.148)$$

$$U = A^T P L \quad (2.149)$$

$$\delta x = N^{-1} U \quad (2.150)$$

每个历元可以组成 3 个误差方程，迭代计算至收敛即可。

#### 2.4.4 基于 QR 分解的参数估计方法

在拟合轨道根数型广播星历时，由于参数之间具有较强相关关系，会出现法方程病态的问题。在法方程接近奇异的情况下，即使是微小的误差，也会对法方程的参数估计造成很大的影响。而 QR 分解是解决法方程系数矩阵病态，实现稳定参数估计的有效方法之一，具有计算效率高，数值稳定程度高等优点<sup>[94]</sup>。

首先可以对设计矩阵  $A$  进行 QR 分解。即：

$$R = Q A \quad (2.151)$$

以每个历元的轨道坐标为观测量，建立线性化观测方程：

$$A\delta x = l \quad (2.152)$$

对(2.152)式同时左乘矩阵  $Q$ ，可得到：

$$QA\delta x = Ql \quad (2.153)$$

令：

$$U = \begin{pmatrix} U' \\ U'' \end{pmatrix} = Ql \quad (2.154)$$

则有：

$$RX = U \quad (2.155)$$

其中， $U'$  为  $n$  维行向量， $U''$  为  $m-n$  维行向量。取该式前  $n$  行，可得：

$$R'\delta x = U' \quad (2.156)$$

将(2.156)式写成具体形式为：

$$\begin{pmatrix} R'_{11} & R'_{12} & \cdots & R'_{1n} \\ & R'_{22} & \cdots & R'_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & R'_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ \vdots \\ U'_n \end{pmatrix} \quad (2.157)$$

则广播星历的改正值为：

$$\delta x_i = \begin{cases} \frac{U'_n}{R'_{nn}} & i = n \\ \frac{\left( U'_i - \sum_{j=n}^{i+1} R'_{ij} \delta x_j \right)}{R'_{ii}} & i < n \end{cases} \quad (2.158)$$

计算得到相对于轨道根数初始值的改正量之后，便可以得到广播星历参数的估计值。重复上述过程，反复迭代，直到满足收敛要求后，退出迭代，便可得到广播星历参数的最终估计值。

#### 2.4.5 迭代退出条件

当迭代拟合广播星历参数时，若满足下列条件时则停止迭代：

$$|RMSE1 - RMSE2| < \varepsilon \quad (2.159)$$

其中， $\varepsilon$  是设定的迭代收敛条件，该值越小，则拟合精度越高，但所需迭代次数也会增多； $RMS1$  为当前广播星历参数引起的三维位置误差； $RMS2$  为上次迭代过程中引起的三维位置误差。若迭代超过 100 次，也未能满足(2.159)式的条件，则停止迭代，认为拟合失败；若满足(2.159)式的条件，但拟合 URE 超过 10 cm，则也认为拟合失败。具体拟合流程如图 2.1 所示：

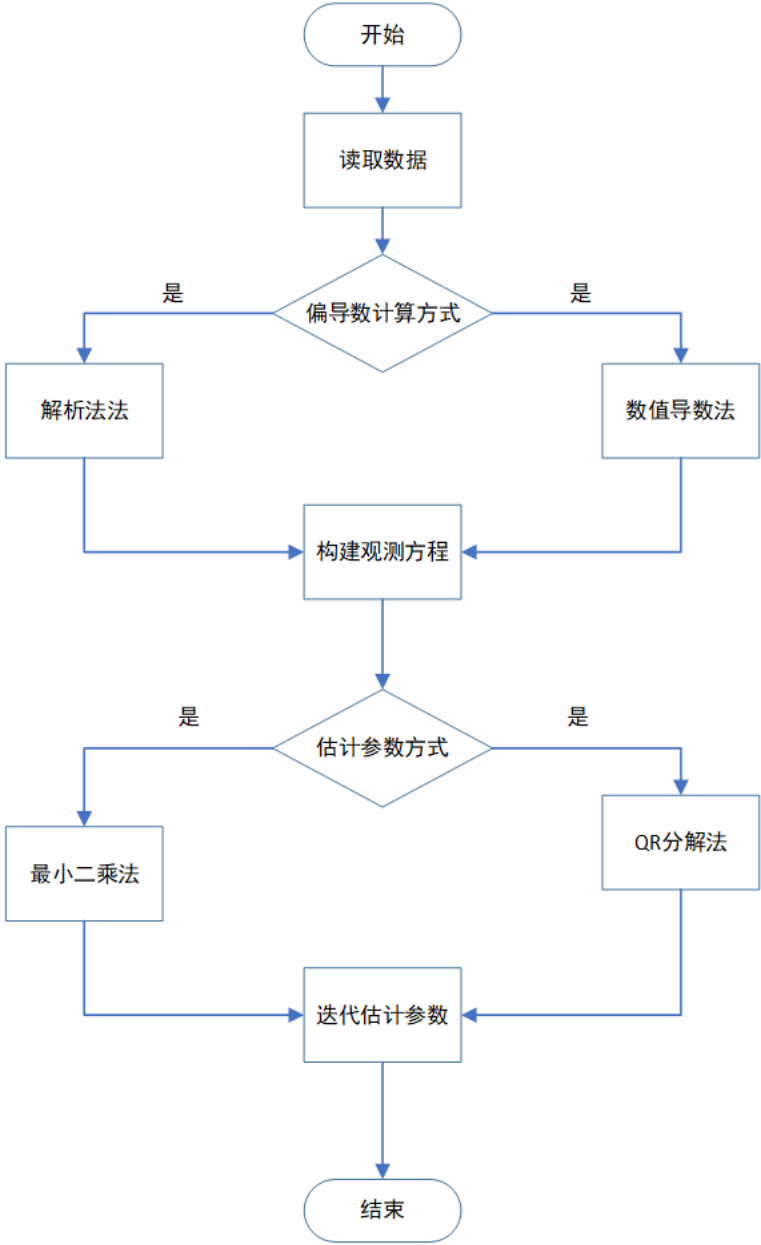


图 2.1 广播星历拟合流程图

2.4.6 迭代最小二乘与 QR 分解估计方法的比较

使用德国地学研究中心发布的精密星历，拟合 GPS 32 颗卫星 2019 年 4 月

27 日，前 2 h 的精密星历轨道数据。根据 GPS 32 颗卫星，每颗卫星前 2 个历元的位置矢量计算相应的轨道偏心率，统计结果如图 2.2 所示。由此可见，各卫星之间的轨道偏心率存在较大差异，某些卫星的偏心率非常小，比如 G04 与 G13 等卫星。目前，绝大多数文献都采取最小二乘方法拟合广播星历参数。但当卫星处于近圆轨道时，GPS 18 参数广播星历采取的经典开普勒轨道根数存在奇异问题<sup>[94,151]</sup>，参数之间存在较强相关关系，法方程严重病态，很容易导致广播星历参数拟合迭代次数过多或者拟合失败。而基于 QR 分解的参数拟合方法，能有效缓解法方程病态造成的不利影响<sup>[94]</sup>。为了对迭代最小二乘与 QR 分解拟合方法进行比较，分别采用这两种方法拟合 GPS 18 参数广播星历参数，并对拟合结果进行比较分析。本节采用数值导数法计算 GPS 18 参数广播星历每个参数的偏导数。根据上述策略，拟合 GPS 32 颗卫星在 2019 年 4 月 27 日每颗卫星前 2 h 的精密星历数据。相关精度指标的均方根统计值的具体结果，如表 2.4 所示。

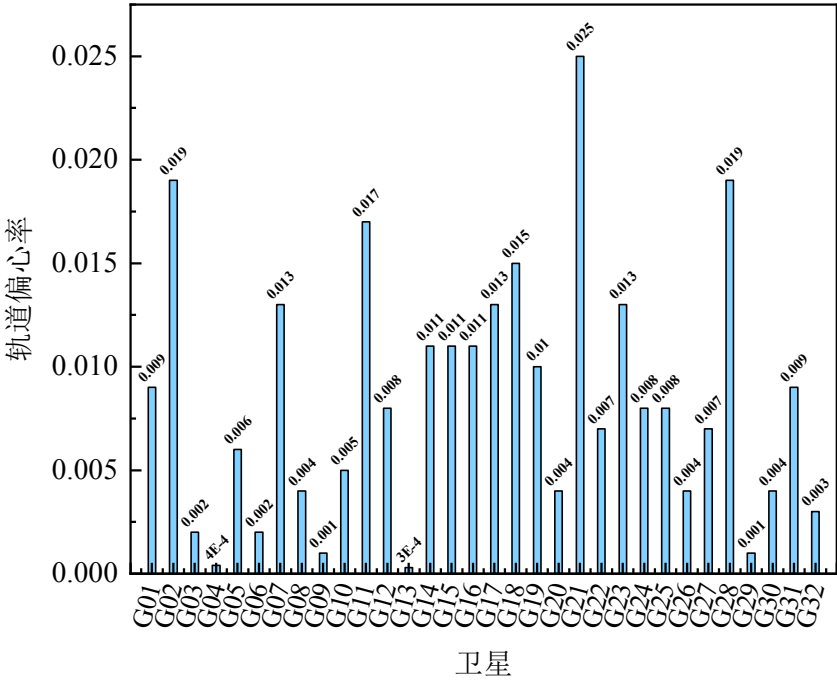


图 2.2 GPS 32 颗卫星的轨道偏心率

表 2.4 迭代最小二乘与 QR 分解估计方法的比较（单位：cm）

	数值导数计算偏导数 + 最小二乘估计				数值导数计算偏导数 + QR 分解估计			
卫星	URE	R	A	C	URE	R	A	C
G01	拟合失败				0.07	0.06	0.23	0.22
G02	0.19	0.18	0.35	0.39	0.09	0.08	0.16	0.23
G03	13.28	10.57	22.56	54.42	0.08	0.06	0.15	0.32

续表

卫星	数值导数计算偏导数 + 最小二乘估计				数值导数计算偏导数 + QR 分解估计			
	URE	R	A	C	URE	R	A	C
G04		拟合失败			0.40	0.37	0.20	1.23
G05		拟合失败			0.19	0.19	0.31	0.23
G06		拟合失败			0.20	0.20	0.06	0.11
G07	0.06	0.06	0.04	0.08	0.15	0.15	0.06	0.30
G08	0.81	0.81	0.09	1.08	0.09	0.09	0.03	0.12
G09		拟合失败			0.03	0.03	0.03	0.03
G10		拟合失败			0.52	0.51	0.56	0.56
G11	0.11	0.11	0.11	0.08	0.16	0.16	0.14	0.09
G12	0.12	0.12	0.03	0.04	0.07	0.07	0.03	0.03
G13		拟合失败			0.04	0.04	0.10	0.05
G14	0.06	0.06	0.05	0.04	0.05	0.05	0.04	0.04
G15	2.62	2.66	1.03	1.11	0.03	0.03	0.02	0.03
G16	1.07	1.08	0.40	0.46	0.10	0.11	0.05	0.09
G17	0.16	0.16	0.13	0.07	0.16	0.16	0.13	0.07
G18		拟合失败			0.04	0.03	0.09	0.03
G19	0.15	0.15	0.24	0.16	0.05	0.05	0.04	0.03
G20		拟合失败			0.08	0.07	0.23	0.12
G21	0.16	0.15	0.52	0.13	0.08	0.08	0.21	0.09
G22		拟合失败			0.20	0.19	0.12	0.53
G23	0.05	0.05	0.04	0.03	0.05	0.05	0.04	0.03
G24		拟合失败			0.06	0.06	0.03	0.03
G25	0.17	0.17	0.24	0.03	0.18	0.18	0.25	0.04
G26		拟合失败			0.66	0.67	0.13	0.23
G27	0.04	0.04	0.04	0.14	0.04	0.03	0.04	0.11
G28	0.38	0.25	1.29	1.60	0.06	0.04	0.17	0.28
G29		拟合失败			0.57	0.57	0.47	0.04
G30		拟合失败			0.13	0.13	0.03	0.06
G31	0.04	0.04	0.03	0.07	0.03	0.03	0.02	0.04
G32		拟合失败			0.20	0.20	0.20	0.08

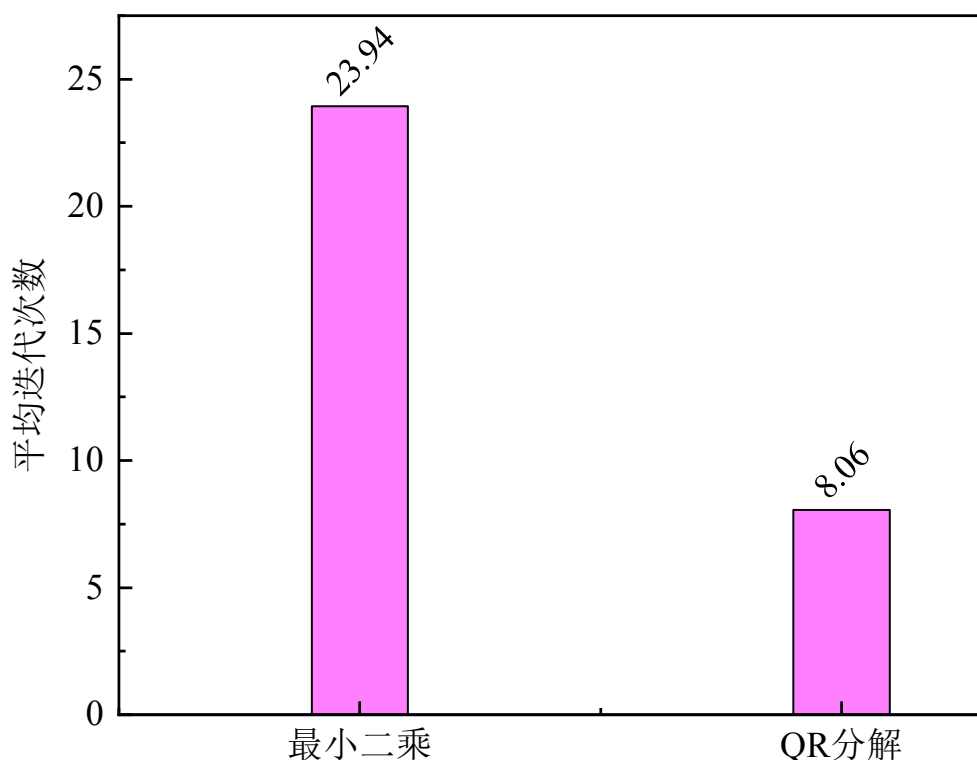


图 2.3 最小二乘与 QR 分解法平均迭代次数

结合表 2.4 和图 2.2 可以得出结论:当卫星轨道的偏心率比较小时,比如 G04 卫星运行的轨道偏心率仅为 0.0004,采用最小二乘拟合广播星历参数时通常失败。但是,当采用 QR 分解方法拟合广播星历参数时,仍然能保证较高的拟合精度。此外,当卫星轨道偏心率较大时,即使采用迭代最小二乘法拟合广播星历参数成功,其拟合精度 URE 一般也不如采用 QR 分解法拟合参数,比如表 2.4 中的 G02 卫星。造成这种现象的原因是:当卫星轨道偏心率较小时,广播星历参数之间相关程度过强,造成法方程严重病态;此时,若仍然采用迭代最小二乘方法拟合参数,通常会出现拟合发散的现象。此外,如图 2.3 所示,使用迭代最小二乘方法拟合参数时,其迭代次数也远比使用 QR 分解方法的迭代次数多。在本节实验过程中,使用迭代最小二乘方法时,平均迭代次数为 23.94 次,而使用 QR 分解方法的平均迭代次数仅为 8.06 次,几乎仅为前者的三分之一。因此,本节的实验结果表明:QR 分解方法能够有效缓解方程病态问题对于拟合参数带来的不利影响,能够有效提高拟合成功率与计算效率。

#### 2.4.7 解析法与数值导数法计算偏导数参数估计比较

为了检验使用数值导数法计算偏导数是否有效,本文分首先分别使用解析法

与数值导数法计算 GPS 18 参数广播星历的偏导数，然后使用 QR 分解法估计广播星历参数。最后，对使用这两种计算偏导数方法的拟合结果进行比较分析。同样使用德国地学研究中心发布的精密星历，拟合 GPS 32 颗卫星 2109 年 4 月 27 日，前 2 h 的精密轨道数据。具体结果如表 2.5 所示。

表 2.5 解析法与数值导数法参数估计结果比较（单位：cm）

卫星	解析法 + QR 分解估计				数值导数法 + QR 分解估计			
	URE	R	A	C	URE	R	A	C
G01	0.08	0.07	0.08	0.12	0.07	0.06	0.23	0.22
G02	0.12	0.12	0.17	0.12	0.09	0.08	0.16	0.23
G03	0.11	0.11	0.13	0.11	0.08	0.06	0.15	0.32
G04	0.03	0.03	0.03	0.03	0.40	0.37	0.20	1.23
G05	0.04	0.04	0.05	0.07	0.19	0.19	0.31	0.23
G06	0.03	0.03	0.04	0.04	0.20	0.20	0.06	0.11
G07	0.05	0.05	0.04	0.06	0.15	0.15	0.06	0.30
G08	0.03	0.03	0.03	0.03	0.09	0.09	0.03	0.12
G09	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
G10	0.07	0.07	0.09	0.14	0.52	0.51	0.56	0.56
G11	0.09	0.09	0.08	0.11	0.16	0.16	0.14	0.09
G12	0.06	0.06	0.03	0.04	0.07	0.07	0.03	0.03
G13	0.03	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.10	0.05
G14	0.05	0.06	0.03	0.05	0.05	0.05	0.04	0.04
G15	0.02	0.02	0.03	0.02	0.03	0.03	0.02	0.03
G16	0.06	0.06	0.07	0.10	0.10	0.11	0.05	0.09
G17	0.17	0.18	0.13	0.04	0.16	0.16	0.13	0.07
G18	0.03	0.03	0.03	0.04	0.04	0.03	0.09	0.03
G19	0.04	0.04	0.05	0.04	0.05	0.05	0.04	0.03
G20	0.11	0.11	0.14	0.10	0.08	0.07	0.23	0.12
G21	0.09	0.09	0.11	0.12	0.08	0.08	0.21	0.09
G22	0.09	0.09	0.12	0.11	0.20	0.19	0.12	0.53
G23	0.04	0.04	0.05	0.04	0.05	0.05	0.04	0.03
G24	0.03	0.03	0.03	0.02	0.06	0.06	0.03	0.03
G25	0.17	0.17	0.18	0.03	0.18	0.18	0.25	0.04
G26	0.05	0.04	0.07	0.18	0.66	0.67	0.13	0.23



续表

卫星	解析法 + QR 分解估计				数值导数法 + QR 分解估计			
	URE	R	A	C	URE	R	A	C
G27	0.08	0.08	0.06	0.04	0.04	0.03	0.04	0.11
G28	0.10	0.09	0.19	0.08	0.06	0.04	0.17	0.28
G29	0.04	0.03	0.05	0.05	0.57	0.57	0.47	0.04
G30	0.03	0.03	0.03	0.04	0.13	0.13	0.03	0.06
G31	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.02	0.04
G32	0.06	0.06	0.05	0.06	0.20	0.20	0.20	0.08

正如表 2.5 所展示的,使用数值导数法估计广播星历参数,计算得到的 URE 值,与使用解析法计算得到的 URE 值,差异非常小,仅在毫米至亚毫米级别,说明数值导数法是有效的;并且使用数值导数法计算偏导数,有效避免了繁琐的推导过程,这将在很大程度上减轻后续广播星历设计的工作量。

本文采用基于 QR 分解的迭代方法拟合 GPS 18 参数广播星历参数,使用数值导数法计算偏导数,有效避免了使用解析法计算偏导数时的繁琐推导过程,并明显缓解了法方程病态造成的不利影响。以德国地学研究中心发布的事后精密星历为真值,使用控制变量法,采用不同的广播星历拟合策略,对比分析了使用解析法与数值导数法所得拟合结果之间的差异,比较了迭代最小二乘与 QR 分解拟合方法的优劣,实验结果表明<sup>[152]</sup>:

- (1) 数值导数法可以替代解析法计算偏导数。这种方法不仅避免了计算偏导数时的复杂推导过程并且几乎不会影响广播星历参数的拟合精度;
- (2) 与使用迭代最小二乘法拟合广播星历参数相比,基于 QR 分解的拟合方法能有效缓解法方程病态造成的不利影响,显著减少迭代次数,明显提高广播星历参数拟合成功率;
- (3) 本文所采用的广播星历参数拟合策略:使用数值导数法计算偏导数,基于 QR 分解方法拟合广播星历参数,简单有效,与现有拟合策略相比,既能提高拟合效率与成功率,又不会对拟合精度造成影响。在后续章节拟合广播星历参数时,将采用这样的策略。

## 2.5 本章小结

本章介绍了目前广泛使用的两种广播星历模型。一种是以 GPS 16 和 GPS 18

参数广播星历为代表的轨道根数型广播星历；另一种是以标准的 GLONASS 广播星历为代表的矢量积分型广播星历。轨道根数型广播星历与矢量积分型广播星历，具有各自优缺点，在后续设计适用于低轨卫星的广播星历时需要仔细考虑。对这 2 种广播星历的用户算法进行了介绍之后，重点讨论了广播星历参数的拟合策略。

对于偏导数的计算有 2 种方法：一是严格计算偏导数的解析法；二是数值导数法。解析法计算偏导数时，其推导过程非常复杂，本文详细推导了 GPS 18 参数广播星历每个参数偏导数计算过程。针对低轨卫星的运行特点，可能会设计多套星历设计方案，如果每设计一种方案，都要严格推导偏导数，则工作量会非常巨大。因此，本文介绍了使用数值导数法计算参数偏导数的简便方法。为了验证数值导数法是否有效，本文采用德国地学研究中心发布的真实 GPS 精密轨道数据，分别采用解析法与数值导数法进行拟合实验。结果表明：使用数值导数法与解析法的拟合精度差异非常小，在毫米至亚毫米级别，说明数值导数法简单有效。数值导数法的应用，能极大减轻广播星历拟合过程的工作量；

对于拟合广播星历的参数估计方法，介绍了迭代最小二乘法与基于 QR 分解的参数估计方法。由于在轨运行的卫星，特别是低轨卫星，其轨道偏心率通常都比较小，有的轨道其轨道倾角也比较小，造成广播星历参数之间具备强相关关系。此时，如果采用传统的最小二乘参数估计方法，估计参数时的法方程将会严重病态，造成估计参数的不稳定。而基于 QR 分解的参数估计方法能有效缓解方程病态对于参数估计造成的不利影响，具备较好的数值稳定性能。同样采用德国地学研究中心发布的真实 GPS 精密星历，拟合 GPS 18 参数广播星历，拟合过程中分别采用迭代最小二乘法与基于 QR 分解的参数估计方法。经过拟合实验发现：当 GPS 卫星轨道偏心较大时，2 种参数估计方法都能拟合成功，但是使用基于 QR 分解的参数估计方法，迭代次数更少且拟合精度更高；当卫星轨道偏心率较小时，使用迭代最小二乘方法拟合参数时，通常会拟合失败。此时，使用基于 QR 分解的参数估计法，仍然能成功拟合广播星历参数。

因此，本文在拟合广播星历的策略是：计算偏导数时采用数值导数法，估计广播星历参数时采用基于 QR 分解的参数估计方法。采用这样的策略，既能在很大程度上减少工作量的同时，又能以较优的数值稳定程度拟合广播星历参数。

## 第3章 基于轨道根数的低轨卫星广播星历设计

相比于 GPS 卫星运行在 MEO 上,低轨卫星运行周期短,受力情况更为复杂。因此,需要针对低轨卫星的受力特点,设计与之相适合的广播星历。需要注意的是:在某些情况下,如对于小偏心率或者小倾角轨道, GPS 广播星历模型存在奇异问题,会造成参数拟合失败。如何解决奇异问题是需要重点考虑的。为此,本章分别基于 GPS 广播星历模型,第一类无奇点,第二类无奇点与基于第二类无奇点改进的轨道根数设计广播星历模型。针对设计的几种不同方案进行比较分析。

### 3.1 基于 GPS LNAV/CNAV 的广播星历设计

由于低轨卫星相比于 GPS 卫星而言,受力情况更复杂,因此,如果直接用 GPS 广播星历拟合低轨卫星精密轨道,则会出现拟合误差过大、拟合有效时间过短甚至无法收敛的问题。为此,本文在 GPS 广播星历的基础上进行改进,针对低轨卫星的运行特点,设计了几种不同的方案。

#### 3.1.1 广播星历设计方案

基于 GPS 广播星历模型,本文主要做了以下几点优化:

针对轨道半长轴的优化。在 GPS 16 参数广播星历中认为在拟合时间段内,轨道半长轴是常数。而在 GPS 18 参数广播星历中认为在拟合时段内,轨道半长轴是变化的并采用参数  $\dot{A}$  吸收半长轴一次变化率。本文针对低轨卫星的受力特点,在此基础上引入新参数:轨道半长轴二次变化率  $\ddot{A}$ ,进一步吸收半长轴在拟合时间内的变化。则半长轴可以这样计算:

$$A_k = A_{ref} + \Delta A + \dot{A}t_k + \frac{1}{2}\ddot{A}t_k^2 \quad (3.1)$$

同样,针对低轨卫星平均角速度的计算,引入新的参数平均角速度校正 2 次变化率:  $\Delta\ddot{n}$ 。则卫星的角速度可以这样计算:

$$n = \sqrt{\frac{GM}{A_k^3}} + \Delta n + \Delta\dot{n}t_k + \frac{1}{2}\Delta\ddot{n}t_k^2 \quad (3.2)$$

对于轨道倾角的计算, 在 GPS 广播星历的基础上还可以考虑其二次变化率, 即:

$$i_k = i_0 + \delta i_k + \dot{i} t_k + \frac{1}{2} \ddot{i} t_k^2 \quad (3.3)$$

对于升交点赤经  $\Omega_k$  的计算, 也可以考虑其二次变化率, 即:

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \omega_e) t_k + \frac{1}{2} \ddot{\Omega} t_k^2 - \omega_e t_{oe} \quad (3.4)$$

对于升交点角距, 轨道半长轴和轨道倾角的正弦、余弦调和改正项, 在 GPS 广播星历的基础上, 还可以考虑周期与三分之一周期改正项, 即<sup>[102]</sup>:

$$\begin{aligned} \delta u_k = & C_{uc1} \cos(\Phi_k) + C_{us1} \sin(\Phi_k) + C_{uc} \cos(2\Phi_k) + C_{us} \sin(2\Phi_k) \\ & + C_{uc3} \cos(3\Phi_k) + C_{us3} \sin(3\Phi_k) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \delta i_k = & C_{ic1} \cos(\Phi_k) + C_{is1} \sin(\Phi_k) + C_{ic} \cos(2\Phi_k) + C_{is} \sin(2\Phi_k) \\ & + C_{ic3} \cos(3\Phi_k) + C_{is3} \sin(3\Phi_k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \delta r_k = & C_{rc1} \cos(\Phi_k) + C_{rs1} \sin(\Phi_k) + C_{rc} \cos(2\Phi_k) + C_{rs} \sin(2\Phi_k) \\ & + C_{rc3} \cos(3\Phi_k) + C_{rs3} \sin(3\Phi_k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.1.2 不同广播星历模型拟合实验

考虑低轨卫星轨道根数的长期、长周期与短周期变化, 分别提出了几种广播星历设计方案。使用卫星工具包软件平台 (Satellite Tool Kit, STK), 采用高精度轨道预报模型 (High Precision Orbit Propagator, HPOP) 仿真轨道高度为 1000 km, 轨道倾角设置为  $55^\circ$  的低轨卫星精密轨道数据。低轨卫星轨道偏心率通常比较小, 在仿真卫星轨道时, 其偏心率设置为 0.001。仿真的卫星轨道精密星历采样率设置为 1 min, 时间跨度为: 2019 年 4 月 27 日 0 时至 2019 年 4 月 28 日 0 时, 共计 24 h 的精密卫星轨道数据并将其认为是真值。采用不同的广播星历设计方案进行拟合实验, 拟合时间长度为 20 min 与 30 min。具体拟合精度统计值如表 3.1 和表 3.2 所示。

表 3.1 几种基于 GPS 广播星历改进方案 1000 km 轨道的拟合结果 (拟合时间长度: 20 min; 单位: m)

参数个数	模式	URE RMS	R	A	C	倾角
16	GPS LANV	0.104	0.112	0.087	0.112	$55^\circ$

续表

参数个数	模式	URE RMS	R	A	C	倾角
17	$\Delta\ddot{\Omega}$	0.152	0.154	0.149	0.153	55°
	$\dot{A}$	0.146	0.148	0.143	0.147	55°
	$\ddot{i}$	0.100	0.108	0.085	0.106	55°
	$\Delta\dot{n}$	0.051	0.053	0.044	0.054	55°
18	$C_{ic3}, C_{is3}$	0.188	0.164	0.126	0.252	55°
	$C_{rc1}, C_{rs1}$	0.148	0.149	0.146	0.149	55°
	$C_{uc1}, C_{us1}$	0.148	0.149	0.146	0.149	55°
	$\dot{A}, \ddot{A}$	0.054	0.047	0.048	0.065	55°
	$C_{uc3}, C_{us3}$	0.038	0.038	0.033	0.042	55°
19	$\dot{A}, \ddot{A}, \Delta\dot{n}$	0.090	0.105	0.079	0.084	55°
20	$\dot{A}, \Delta\dot{n}, C_{uc3}, C_{us3}$	0.027	0.031	0.024	0.026	55°

表 3.2 几种基于 GPS 广播星历改进方案 1000 km 的拟合结果 (拟合时间长度:30 min; 单位: m)

参数个数	模式	URE RMS	R	A	C	倾角
16	GPS LNAV	0.309	0.325	0.297	0.304	55°
17	$\Delta\ddot{\Omega}$	0.304	0.318	0.291	0.303	55°
	$\dot{A}$	0.236	0.244	0.207	0.255	55°
	$\ddot{i}$	0.233	0.242	0.203	0.251	55°
	$\Delta\dot{n}$	0.199	0.208	0.164	0.220	55°
18	$C_{ic3}, C_{is3}$	0.307	0.323	0.295	0.302	55°
	$C_{rc1}, C_{rs1}$	0.187	0.194	0.179	0.188	55°
	$C_{uc1}, C_{us1}$	0.187	0.194	0.179	0.188	55°
	$\dot{A}, \ddot{A}$	0.149	0.157	0.138	0.150	55°
	$C_{uc3}, C_{us3}$	0.137	0.144	0.128	0.140	55°
19	$\dot{A}, \ddot{A}, \Delta\dot{n}$	0.104	0.113	0.088	0.108	55°
20	$\dot{A}, \Delta\dot{n}, C_{uc3}, C_{us3}$	0.088	0.095	0.073	0.093	55°

从表 3.1 和表 3.2 中可以得出结论: 在 GPS 广播星历的基础上合理增加参数可以有效提高拟合精度; 并不是广播星历参数越多拟合精度越高。在设计广播星历时, 应综合考虑轨道根数长期和短期的变化; 此外, 拟合时间长度对于广播星历拟合精度, 存在显著影响, 拟合时间跨度越长, 拟合精度越低。需要注意的是,

对于 GPS 广播星历而言存在这样的问题：在小偏心率的情况下，近地点与远地点几何定义不明确，近地点角距与平近点角具有强相关关系，造成拟合时法方程严重病态，而绝大多数低轨卫星与导航卫星恰恰采用的是近圆轨道<sup>[94]</sup>。类似的，在轨道倾角接近于  $0^\circ$  时，升交点赤经的定义也不明确。这对广播星历的拟合是非常不利的。因此，在后续章节讨论基于无奇点根数设计低轨卫星广播星历。

### 3.2 基于第一类无奇点根数的广播星历设计

由于几乎绝大多数低轨卫星都采用近圆轨道，而 GPS 广播星历在描述近圆轨道时存在奇异问题。因此，考虑使用第一类无奇点根数解决这个问题。

#### 3.2.1 基于第一类无奇点根数的 16 参数广播星历

第一类无奇点根数为  $(A, e_x, e_y, i, \Omega, u)$ 。与开普勒轨道根数的关系为<sup>[94,153]</sup>：

$$e_x = e \cos \omega \tag{3.8}$$

$$e_y = e \sin \omega \tag{3.9}$$

$$u = \omega + M \tag{3.10}$$

$e_x$  与  $e_y$  组成二维偏心率矢量  $\mathbf{e}$ ，方向指向近地点。新的组合  $u$  去除了轨道小偏心率的情况下，引起的近地点幅角  $\omega$  与平近点角  $M$  强相关问题。仿照 GPS 16 参数广播星历，本文设计了基于第一类无奇点的 16 参数广播星历参数集。并在后续章节中，基于此广播星历参数集，针对低轨卫星运行特点进行改进，设计适用于低轨卫星的广播星历参数集。下面介绍基于第一类无奇点的 16 参数广播星历参数集，具体参数及其含义如表 3.3 所示。可以看出除了轨道根数定义与 GPS 16 参数广播星历略有不同之外，轨道根数的长期与短期摄动改正项基本保持一致。

表 3.3 第一类无奇点 16 参数广播星历各参数意义

参数	意义
$\Delta A$	半长轴与参考值之差
$e_x$	轨道偏心率分量
$e_y$	轨道偏心率分量
$u$	椭圆运动方向快变量

续表

参数	意义
$i_0$	参考时刻轨道倾角
$\Omega_0$	参考时刻升交点赤经
$\Delta n$	平均角速度改正量
$\dot{i}$	轨道倾角变化率
$\Delta \dot{\Omega}$	升交点赤经变化率与参考值之差
$C_{rc}$	卫星矢量长度余弦调和改正项
$C_{rs}$	卫星矢量长度正弦调和改正项
$C_{uc}$	升交点角距余弦改正项
$C_{us}$	升交点正弦改正项
$C_{ic}$	轨道倾角余弦改正项
$C_{is}$	轨道倾角正弦改正项

### 3.2.2 用户算法

基于第一类无奇点的 16 参数广播星历的用户算法具体如下所示：

计算观测时刻与参考时刻时间差  $t_k$ ：

$$t_k = t - t_{oe} \quad (3.11)$$

计算卫星平均角速度  $n_k$ ：

$$n_k = \sqrt{\frac{GM}{A^3}} + \Delta n \quad (3.12)$$

其中,  $GM$  为万有引力常数;  $A_{ref}$  为半长轴参考值;  $\Delta n$  为卫星平均角速度校正项。

计算观测时刻轨道半长轴  $A_k$ ：

$$A_k = A_{ref} + \Delta A \quad (3.13)$$

计算观测时刻平近点角  $M_k$ ：

$$M_k = M_0 + n_k t_k \quad (3.14)$$

迭代计算偏近点角  $E_k$ ：

$$E_k = M_k + e_x \sin E_k - e_y \cos E_k \quad (3.15)$$

计算真经度  $f_k$ :

$$s = -e_x \sin(E_k) + e_y \cos(E_k) \quad (3.16)$$

$$beta = 1 + \sqrt{1 - (e_x^2 + e_y^2)} \quad (3.17)$$

$$\sin f_k = \frac{A_k}{r \left( \sin(E_k) - e_y + \frac{e_x s}{beta} \right)} \quad (3.18)$$

$$\cos f_k = \frac{A_k}{r \left( \cos(E_k) - e_x - \frac{e_y s}{beta} \right)} \quad (3.19)$$

$$f_k = \arctan \left( \frac{\sin f_k}{\cos f_k} \right) \quad (3.20)$$

其中,

$$r = A_k (1 - e_x \cos E_k - e_y \sin E_k) \quad (3.21)$$

计算正向, 切向和法向分量的短周期改正项:

$$\delta f_k = C_{uc} \cos(2f_k) + C_{us} \sin(2f_k) \quad (3.22)$$

$$\delta i_k = C_{ic} \cos(2f_k) + C_{is} \sin(2f_k) \quad (3.23)$$

$$\delta r_k = C_{rc} \cos(2f_k) + C_{rs} \sin(2f_k) \quad (3.24)$$

计算附加短期改正量之后的卫星矢量长度  $r_k$ :

$$r_k = A_k (1 - e_x \cos E_k - e_y \sin E_k) + \delta r_k \quad (3.25)$$

计算附加短期改正后的真经度  $f^*$ :

$$f^* = f_k + \delta f_k \quad (3.26)$$



计算观测时刻升交点赤经  $\Omega_k$ :

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \omega_e)t_k - \omega_e t_{oe} \quad (3.27)$$

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{ref} + \Delta\dot{\Omega} \quad (3.28)$$

其中,  $\omega_e$  是地球自转角速度,  $\dot{\Omega}_{ref}$  是升交点赤经变化率参考值。

改正后的轨道倾角  $i_k$ :

$$i_k = i_0 + \delta i_k + \dot{i}t_k \quad (3.29)$$

计算卫星在轨道平面坐标系坐标:

$$\begin{cases} x_k = r_k \cos u_k \\ y_k = r_k \sin u_k \end{cases} \quad (3.30)$$

计算卫星在地心地固坐标系下的坐标:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \cos \Omega_k - y_k \cos i_k \sin \Omega_k \\ x_k \sin \Omega_k + y_k \cos i_k \cos \Omega_k \\ y_k \sin i_k \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

### 3.2.3 基于第一类无奇点根数的广播星历设计

与基于 GPS 广播星历的设计方案类似, 基于第一类无奇点的广播星历设计同样考虑了轨道根数长期与短期变化。轨道半长轴、卫星平均角速度、升交点赤经和轨道倾角的计算方式与 3.1.1 节中的计算方法一致, 即(3.1)式至(3.4)式。对于轨道径向、切向与法向的短周期改正项计算可用下式计算:

$$\begin{aligned} \delta f_k = & C_{uc1} \cos(f_k) + C_{us1} \sin(f_k) + C_{uc} \cos(2f_k) + C_{us} \sin(2f_k) \\ & + C_{uc3} \cos(3f_k) + C_{us3} \sin(3f_k) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \delta i_k = & C_{ic1} \cos(f_k) + C_{is1} \sin(f_k) + C_{ic} \cos(2f_k) + C_{is} \sin(2f_k) \\ & + C_{ic3} \cos(3f_k) + C_{is3} \sin(3f_k) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \delta r_k = & C_{rc1} \cos(f_k) + C_{rs1} \sin(f_k) + C_{rc} \cos(2f_k) + C_{rs} \sin(2f_k) \\ & + C_{rc3} \cos(3f_k) + C_{rs3} \sin(3f_k) \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.2.4 不同广播星历模型拟合实验

采用与 3.1.2 节中同样的仿真数据，使用基于第一类无奇点设计的广播星历进行轨道拟合。同样，拟合时间长度为 20 min 与 30 min，被拟合轨道高度为 1000 km。具体拟合精度如表 3.4 和表 3.5 所示。从表中可以得出结论，适当增加长周期与短周期参数可以明显改善广播星历拟合参数精度。而且相比基于 GPS 广播星历改进的广播星历参数设计方案，基于第一类无奇点设计的广播星历设计方案明显拟合精度更高。这是因为：第一类无奇点根数相比于传统的开普勒轨道根数，避免了因轨道偏心率过小而引起的奇异问题。

表 3.4 几种基于第一类无奇点改进方案 1000 km 轨道的拟合结果 (拟合时间长度:20 min; 单位: m)

参数个数	模式	URE RMS	R	A	C	轨道 倾角
16		0.105	0.100	0.102	0.112	55°
17	$\dot{A}$	0.060	0.060	0.056	0.063	55°
	$\Delta\dot{n}$	0.059	0.059	0.054	0.062	55°
	$\Delta\ddot{\Omega}$	0.058	0.058	0.055	0.062	55°
18	$\dot{A}, \Delta\dot{n}$	0.050	0.051	0.044	0.054	55°
	$\Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}$	0.039	0.038	0.039	0.041	55°
19	$\dot{A}, \ddot{A}, \Delta\dot{n}$	0.043	0.046	0.033	0.049	55°
	$\dot{A}, \Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}$	0.025	0.024	0.023	0.027	55°
22	$C_{us3}, C_{uc3}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{ic3}, C_{is3}$	0.016	0.015	0.016	0.016	55°
23	$\dot{A}, C_{us3}, C_{uc3}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{ic3}, C_{is3}$	0.010	0.009	0.010	0.009	55°
	$\Delta\dot{n}, C_{us3}, C_{uc3}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{ic3}, C_{is3}$	0.010	0.009	0.010	0.009	55°
	$\Delta\ddot{\Omega}, C_{us3}, C_{uc3}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{ic3}, C_{is3}$	0.010	0.009	0.010	0.009	55°
24	$\Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}, C_{us3}, C_{uc3}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{ic3}, C_{is3}$	0.008	0.007	0.008	0.007	55°

表 3.5 几种基于第一类无奇点改进方案 1000 km 轨道的拟合结果 (拟合时间长度:30 min; 单位: m)

参数个数	模式	URE RMS	R	A	C	轨道 倾角
16		0.364	0.370	0.341	0.379	55°
17	$\dot{A}$	0.217	0.211	0.203	0.236	55°

续表

参数个数	模式	URE RMS	R	A	C	轨道倾角
18	$\Delta\dot{n}$	0.210	0.204	0.197	0.228	55°
	$\Delta\ddot{\Omega}$	0.210	0.201	0.201	0.227	55°
	$\dot{A}, \Delta\dot{n}$	0.166	0.156	0.160	0.181	55°
	$\Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}$	0.182	0.185	0.166	0.195	55°
19	$\dot{A}, \ddot{A}, \Delta\dot{n}$	0.117	0.119	0.104	0.125	55°
	$\dot{A}, \Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}$	0.177	0.173	0.172	0.185	55°
22	$C_{us3}, C_{uc3}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{ic3}, C_{is3}$	0.115	0.118	0.102	0.123	55°
23	$\dot{A}, C_{us3}, C_{uc3}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{ic3}, C_{is3}$	0.078	0.081	0.072	0.082	55°
	$\Delta\dot{n}, C_{us3}, C_{uc3}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{ic3}, C_{is3}$	0.053	0.054	0.051	0.055	55°
	$\Delta\ddot{\Omega}, C_{us3}, C_{uc3}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{ic3}, C_{is3}$	0.053	0.053	0.050	0.054	55°
	$\Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}, C_{us3}, C_{uc3},$	0.053	0.053	0.050	0.055	55°
24	$C_{rc3}, C_{rs3}, C_{ic3}, C_{is3}$	0.041	0.042	0.040	0.041	55°

虽然, 基于第一类无奇点设计的广播星历可以有效解决因卫星轨道偏心率过小而引起的奇异问题。但是, 在卫星星座设计过程中, 有的卫星可能需要运行在轨道倾角较小的轨道上。此时, 与 GPS 广播星历类似, 使用基于第一类无奇点轨道根数设计的广播星历, 在拟合小轨道倾角的精密轨道时也会出现奇异问题。造成这个问题的原因还是因为轨道根数定义不明确, 比如: 升交点赤经这个参数对于小倾角轨道, 没有明确的几何意义。笔者经过实验也发现: 使用基于第一类无奇点的广播星历拟合轨道倾角为零度的精密轨道时, 有的时段会出现拟合发散或者拟合误差过大的现象。针对这个问题需要进一步探究可能的解决方案。

### 3.3 基于第二类无奇点根数的广播星历设计

无论是基于 GPS LNAV/CNAV 改进的广播星历, 或者是基于第一类无奇点轨道根数设计的广播星历, 都无法解决拟合小轨道倾角精密轨道时, 出现的拟合发散或者拟合误差过大的问题。类似的问题在北斗卫星导航系统也存在。由于地球同步轨道卫星的轨道倾角也近似为零, 在拟合广播星历时, 使用 GPS 广播星历模型, 或者基于第一类无奇点设计的广播星历, 也会出现拟合发散或者拟合误差过大的现象。针对这个问题, 有学者提出在拟合小轨道倾角精密轨道时, 将坐

标轴先旋转  $5^\circ$  再拟合广播星历<sup>[96,97,99]</sup>。因此，用户接收到经过旋转法拟合得到广播星历参数之后，在计算观测时刻卫星坐标时，得到的是在旋转之后的坐标系中的坐标，用户还需要把这个坐标转换至地心地固坐标系中。同时，也有文献指出，将坐标系旋转  $5^\circ$  不一定是最优选择，在实际拟合参数过程中，仍然会引起参数拟合精度超限<sup>[98]</sup>。因此，以旋转坐标轴的方式拟合广播星历，无论在拟合广播星历参数的时候，还是对于用户使用，都比较麻烦。而且旋转坐标轴旋转  $5^\circ$ ，是否是最合适的选择还有待进一步探究。为此，有学者提出基于第二类无奇点轨道根数，设计适用于地球同步轨道卫星的 16 或 18 参数广播星历。并取得了比较理想的拟合精度<sup>[86,87]</sup>。而且，第二类无奇点根数能同时避免小轨道倾角与小偏心率引起的奇异问题。鉴于 GPS 广播星历与第一类无奇点轨道根数存在的奇异问题，本文考虑基于第二类无奇点根数设计几种适用于低轨卫星的广播星历方案。通过拟合实验对设计方案进行检验并统计相关拟合精度指标。

### 3.3.1 基于第二类无奇点根数的 16 参数广播星历

令第二类无奇点根数为  $(A, e_x, e_y, i_x, i_y, M^*)$ ，其与经典的开普勒轨道根数关系可表示为<sup>[86,87,94]</sup>：

$$e_x = e \cos \tilde{\omega} \quad (3.35)$$

$$e_y = e \sin \tilde{\omega} \quad (3.36)$$

$$i_x = \sin i \cos \Omega \quad (3.37)$$

$$i_y = \sin i \sin \Omega \quad (3.38)$$

$$M^* = \Omega + \omega + M \quad (3.39)$$

$$\tilde{\omega} = \Omega + \omega \quad (3.40)$$

式中， $e_x$ 、 $e_y$  和  $i_x$ 、 $i_y$  分别是偏心率向量的二维分量与轨道倾角向量的二维分量； $M^*$  是平经度，从春分点开始计量。

定义与平经度  $M^*$  对应的真经度  $f^*$  和偏经度  $E^*$ ，如下所示：

$$f^* = \Omega + \omega + f \quad (3.41)$$

$$E^* = \Omega + \omega + E \quad (3.42)$$

其中,  $f$  和  $E$  分别为真近点角与偏近点角。

仿照 GPS 广播星历, 设计基于第二类无奇点的 16 参数广播星历, 具体参数及其含义如表 3.6 所示。

表 3.6 第二类无奇点 16 参数广播星历各参数意义

参数	意义
$\Delta A$	半长轴与参考值之差
$e_x$	偏心率向量二维分量
$e_y$	偏心率向量二维分量
$i_{x0}$	轨道倾角向量二维分量
$i_{y0}$	轨道倾角向量二维分量
$M_0^*$	平经度
$\Delta n$	平均角速度改正量
$\dot{i}_x$	轨道倾角二维向量变化率
$\dot{i}_y$	轨道倾角二维向量变化率
$C_{rc}$	卫星矢量长度余弦调和改正项
$C_{rs}$	卫星矢量长度正弦调和改正项
$C_{\lambda c}$	真经度短周期余弦改正项
$C_{\lambda s}$	真经度短期正弦改正项
$C_{Ns}$	法向距离短周期正弦改正项
$C_{Nc}$	法向距离短周期余弦改正项

### 3.3.2 用户算法

用户接收广播星历之后, 可以利用相关参数计算任意观测时刻卫星位置。令  $t_{oe}$  为格林尼治平恒星时。第二类无奇点 16 参数广播星历具体用法如下<sup>[86]</sup>:

计算观测时刻与参考时刻时间差  $t_k$ :

$$t_k = t - t_{oe} \quad (3.43)$$

计算卫星半长轴与平均运动速度:

$$A_k = A_{ref} + \Delta A \quad (3.44)$$

$$n = \sqrt{\frac{GM}{A_k^3}} \quad (3.45)$$

计算观测时刻的平经度、偏经度：

$$M^* = M_0^* + (n + \Delta n)t_k \quad (3.46)$$

根据广义开普勒方程迭代计算偏经度：

$$E^* - e_x \sin E^* + e_y \cos E^* = M^* \quad (3.47)$$

计算真经度：

$$\sin f_0^* = \frac{A_k}{r_o} \left( \sin E^* - e_y + \frac{e_x}{\beta} (-e_x \sin E^* + e_y \cos E^*) \right) \quad (3.48)$$

$$\cos f_0^* = \frac{A_k}{r_o} \left( \cos E^* - e_x - \frac{e_y}{\beta} (-e_x \sin E^* + e_y \cos E^*) \right) \quad (3.49)$$

$$r_0 = A_k (1 - e_x \cos E^* - e_y \sin E^*) \quad (3.50)$$

$$\beta = 1 + \sqrt{1 - (e_x^2 + e_y^2)} \quad (3.51)$$

$$f_0^* = \arctan \left( \frac{\sin f_0^*}{\cos f_0^*} \right) \quad (3.52)$$

计算附加短周期改正量的径向、切向与法向分量：

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \delta r \\ &= r_0 + C_{rc} \cos 2f_0^* + C_{rs} \sin 2f_0^* \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} f^* &= f_0^* + \delta f_0^* \\ &= f_0^* + C_{\lambda c} \cos f_0^* + C_{\lambda s} \sin f_0^* \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$N = C_{Nc} \cos 2f_0^* + C_{Ns} \sin 2f_0^* \quad (3.55)$$

计算卫星在轨道坐标系中的位置向量：

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos f^* \\ r \sin f^* \\ N \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

计算轨道坐标系至地心惯性坐标系的旋转矩阵<sup>[87]</sup>:

$$M = R_z(-\Omega) R_x(-i) R_z(\Omega) \\ = \begin{pmatrix} 1 - \frac{i_y^2}{1 + \cos i} & \frac{i_x i_y}{1 + \cos i} & i_y \\ \frac{i_x i_y}{1 + \cos i} & 1 - \frac{i_x^2}{1 + \cos i} & -i_x \\ -i_y & i_x & \cos i \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

$$i_x = i_{x0} + \dot{i}_x t_k \quad (3.58)$$

$$i_y = i_{y0} + \dot{i}_y t_k \quad (3.59)$$

$$\cos i = \sqrt{1 - (i_x^2 + i_y^2)} \quad (3.60)$$

令地心惯性坐标系至地心地固坐标系的旋转矩阵为  $R_z(\theta_g)$ ,

$$\theta_g = \theta_{g0} + \omega_e t_k \quad (3.61)$$

其中,  $\omega_e$  为地球自转角速度。

计算卫星在地心地固坐标系中的位置:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_z(\theta_g) M \mathbf{r} \quad (3.62)$$

### 3.3.3 基于第二类无奇点的广播星历设计

基于第二类无奇点设计广播星历时, 同样需要考虑轨道根数的长期与短期变化。长期变化主要考虑轨道半长轴与卫星角速度校正值的长期变化。具体算法如(3.1)式和(3.2)式所示。对于轨道正向、切向和法向的短期变化考虑周期、半周期

与三分之一周期的变化。具体算法如(3.63)至(3.65)式所示。

$$\begin{aligned} \delta r = & C_{rc1} \cos f_0^* + C_{rs1} \sin f_0^* + C_{rc} \cos 2f_0^* + C_{rs} \sin 2f_0^* \\ & + C_{rc3} \cos 3f_0^* + C_{rs3} \sin 3f_0^* \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \delta f_0^* = & C_{\lambda c1} \cos f_0^* + C_{\lambda s1} \sin f_0^* + C_{\lambda c} \cos 2f_0^* + C_{\lambda s} \sin 2f_0^* \\ & + C_{\lambda c3} \cos 3f_0^* + C_{\lambda s3} \sin 3f_0^* \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} N = & C_{Nc1} \cos f_0^* + C_{Ns1} \sin f_0^* + C_{Nc} \cos 2f_0^* + C_{Ns} \sin 2f_0^* \\ & + C_{Nc3} \cos 3f_0^* + C_{Ns3} \sin 3f_0^* \end{aligned} \quad (3.65)$$

### 3.3.4 不同广播星历模型拟合实验

采用 STK 仿真低轨卫星精密轨道。仿真策略与 3.1.2 节中的策略基本相同。唯一不同的是将轨道倾角改为零度,以检测基于第二类无奇点轨道根数设计的广播星历,对于小轨道倾角精密轨道数据的拟合能力。同样,拟合时间长度为 20 min 与 30 min,被拟合轨道高度为 1000 km。具体拟合精度如表 3.7 和表 3.8 所示。

表 3.7 几种基于第二类无奇点改进方案 1000 km 轨道的拟合结果 (拟合时间长度:20 min; 单位: m)

参数个数	模式	URE RMS	R	A	C	轨道倾角
16		0.121	0.147	0.146	0.022	0°
17	$\dot{A}$	0.060	0.073	0.073	0.013	0°
	$\Delta \dot{n}$	0.058	0.071	0.071	0.013	0°
18	$\dot{A}, \ddot{A}$	0.049	0.059	0.059	0.013	0°
	$\Delta \dot{n}, \Delta \ddot{n}$	0.047	0.056	0.056	0.013	0°
	$C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.046	0.056	0.056	0.013	0°
	$\dot{A}, \Delta \dot{n}$	0.044	0.053	0.053	0.013	0°
	$C_{rc3}, C_{rs3}$	0.028	0.033	0.033	0.013	0°
19	$\dot{A}, \ddot{A}, \Delta \dot{n}$	0.027	0.031	0.031	0.013	0°
	$\dot{A}, \Delta \dot{n}, \Delta \ddot{n}$	0.026	0.031	0.031	0.013	0°
	$\dot{A}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.021	0.024	0.024	0.013	0°
	$\Delta \dot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.021	0.023	0.023	0.013	0°
20	$C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.021	0.023	0.024	0.013	0°



续表

参数个数	模式	URE RMS	R	A	C	轨道倾角
21	$\dot{A}, \ddot{A}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.019	0.021	0.021	0.013	0°
	$\Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.019	0.021	0.021	0.013	0°
	$\Delta\dot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.014	0.014	0.014	0.013	0°
	$\dot{A}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.015	0.016	0.016	0.013	0°

表 3.8 几种基于第二类无奇点改进方案 1000 km 轨道的拟合结果 (拟合时间长度:30 min; 单位: m)

参数个数	模式	URE RMS	R	A	C	轨道倾角
16		0.383	0.462	0.468	0.081	0°
17	$\dot{A}$	0.238	0.284	0.289	0.070	0°
	$\Delta\dot{n}$	0.230	0.274	0.280	0.070	0°
18	$\dot{A}, \ddot{A}$	0.192	0.230	0.230	0.070	0°
	$\Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}$	0.184	0.218	0.223	0.069	0°
	$C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.182	0.218	0.216	0.070	0°
	$\dot{A}, \Delta\dot{n}$	0.178	0.212	0.212	0.070	0°
19	$C_{rc3}, C_{rs3}$	0.105	0.119	0.119	0.070	0°
	$\dot{A}, \ddot{A}, \Delta\dot{n}$	0.120	0.139	0.138	0.069	0°
	$\dot{A}, \Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}$	0.118	0.136	0.135	0.069	0°
	$\dot{A}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.086	0.094	0.094	0.069	0°
	$\Delta\dot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.086	0.093	0.093	0.069	0°
	$C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.080	0.085	0.085	0.069	0°
20	$\dot{A}, \ddot{A}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.080	0.084	0.084	0.069	0°
	$\Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.085	0.092	0.093	0.069	0°
	$\Delta\dot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.070	0.072	0.068	0.069	0°
21	$\dot{A}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.066	0.064	0.064	0.069	0°

结合表 3.7 与表 3.8 中可以看到: 在第二类无奇点 16 参数广播星历的基础上, 合理增加某些参数吸收轨道根数的长期与短期变化, 能有效提高拟合精度并且可以很好地克服 GPS 广播星历与基于第一类无奇点根数设计的广播星历, 在拟合小轨道倾角数据时遇到的奇异问题。对于轨道高度为 1000 km 的低轨卫星精密轨道数据, 通过合理设计广播星历, 当拟合长度为 20 min 至 30 min 时, 可以满足拟合 URE 在 10 cm 以内的要求。然而, 第二类无奇点轨道根数在拟合近极

轨道时仍然存在奇点<sup>[154]</sup>。通过实际拟合实验，笔者也发现：使用基于第二类无奇点轨道根数设计的广播星历，在拟合轨道倾角高于  $70^\circ$  的 1000 km 轨道高度的低轨卫星精密轨道时，仍然会出现参数拟合失败的现象。

### 3.4 基于第二类无奇点改进根数的广播星历设计

在之前的章节中已经指出：GPS 广播星历无法解决小偏心率与小轨道倾角引起的奇异问题；虽然第一类无奇点轨道根数能解决小偏心率引起的奇异问题，但无法解决小轨道倾角引起的奇异问题；而第二类无奇点轨道根数虽然能同时避免小偏心率小轨道倾角引起的奇异问题，但是在拟合极轨道精密星历时，仍然存在奇异问题。因此，基于改进的第二类无奇点轨道根数<sup>[94]</sup>设计适用于低轨卫星的广播星历，同时消除上述奇异问题影响是值得考虑的。鉴于大部分文献缺乏该研究思路的谈论，本节将尝试进行探究。

#### 3.4.1 基于第二类无奇点改进根数的 16 参数广播星历

令基于改进的第二类无奇点轨道根数为： $(A, e_x, e_y, i_x, i_y, M^*)$ ，其与经典的开普勒轨道根数关系为<sup>[94]</sup>：

$$e_x = e \cos \tilde{\omega} \quad (3.66)$$

$$e_y = e \sin \tilde{\omega} \quad (3.67)$$

$$i_x = \sin \frac{i}{2} \cos \Omega \quad (3.68)$$

$$i_y = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega \quad (3.69)$$

$$M^* = \Omega + \omega + M \quad (3.70)$$

$$\tilde{\omega} = \Omega + \omega \quad (3.71)$$

式中， $e_x$ 、 $e_y$  和  $i_x$ 、 $i_y$  分别是偏心率向量的二维分量与轨道倾角向量的二维分量； $M^*$  是平经度，从春分点开始计量。与第二类无奇点轨道根数相比，仅对轨道倾角二维向量进行了改进，这样可以避免轨道倾角为  $90^\circ$  时的奇点<sup>[94]</sup>。其余参数定义与第二类无奇点轨道根数保持一致。

### 3.4.2 用户算法

基于第二类无奇点改进根数的16参数广播星历的用户算法,与3.3.2节叙述的计算过程基本一致。但是由于轨道倾角二维矢量定义存在差异,从轨道坐标系至地心惯性坐标系的旋转矩阵略有不同。本节推导适用于第二类无奇点改进根数的旋转矩阵  $\mathbf{M}$ 。由于轨道坐标系与地心惯性坐标系的转换与轨道倾角与升交点赤经有关,对于基于改进的第二类无奇点轨道根数的广播星历模型,令

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= (\mathbf{P} \ \mathbf{Q} \ \mathbf{W}) \\ &= R_z(-\Omega) R_x(i) R_z(\Omega)\end{aligned}\quad (3.72)$$

根据改进根数的定义,矩阵  $\mathbf{M}$  需要用二维轨道倾角向量表示。

根据(3.72)式可知:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos(-\Omega)\cos\Omega - \sin\Omega\sin(-\Omega)\cos i \\ \sin\Omega\cos\Omega - \sin\Omega\cos(-\Omega)\cos i \\ \sin\Omega\sin i \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos\Omega\sin\Omega + \sin(-\Omega)\cos i\cos\Omega \\ \sin^2\Omega + \cos^2\Omega\cos i \\ -\sin i\cos\Omega \end{pmatrix} \quad (3.74)$$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \sin(-\Omega)\sin i \\ \cos(-\Omega)\sin i \\ \cos i \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

根据轨道倾角二维向量的定义可知:

$$i_x^2 + i_y^2 = \sin^2 \frac{i}{2} = \frac{1 - \cos i}{2} \quad (3.76)$$

所以,

$$\cos i = 1 - 2(i_x^2 + i_y^2) \quad (3.77)$$

因为,

$$i_y = \sin \frac{i}{2} \sin \Omega \quad (3.78)$$

所以,

$$\sin \frac{i}{2} = \frac{k}{\sin \Omega} \quad (3.79)$$

$$i_x = \frac{i_y}{\sin \Omega} \cos \Omega \quad (3.80)$$

$$\frac{i_x}{i_y} = \frac{\cos \Omega}{\sin \Omega} \quad (3.81)$$

$$\frac{\cos^2 \Omega}{1 - \cos^2 \Omega} = \frac{i_x^2}{i_y^2} \quad (3.82)$$

所以,

$$\cos^2 \Omega = \frac{h^2}{k^2 + h^2} \quad (3.83)$$

$$\sin^2 \Omega = \frac{k^2}{k^2 + h^2} \quad (3.84)$$

对于向量  $\mathbf{P}$ ,

$$\begin{aligned} & \cos(-\Omega)\cos\Omega - \sin\Omega\sin(-\Omega)\cos i \\ &= \frac{i_x^2 + i_y^2 - 2i_y^2(i_x^2 + i_y^2)}{i_x^2 + i_y^2} \\ &= 1 - \frac{2i_y^2(i_x^2 + i_y^2)}{i_x^2 + i_y^2} \\ &= 1 - 2i_y^2 \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} & \sin\Omega\cos\Omega - \sin\Omega\cos(-\Omega)\cos i \\ &= \sqrt{\frac{i_y^2 i_x^2}{(i_y^2 + i_x^2)^2}} - \sqrt{\frac{i_y^2 i_x^2}{(i_y^2 + i_x^2)^2}} (1 - 2i_x^2 - 2i_y^2) \\ &= 2i_x i_y \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned}
& \sin \Omega \sin i \\
&= \sqrt{\frac{i_y^2}{i_x^2 + i_y^2}} \sqrt{1 - \left(1 - 2(i_x^2 + i_y^2)\right)^2} \\
&= 2i_y \sqrt{\frac{-(i_x^2 + i_y^2)^2 + i_x^2 + i_y^2}{i_x^2 + i_y^2}} \\
&= 2i_y \sqrt{1 - (i_x^2 + i_y^2)}
\end{aligned} \tag{3.87}$$

至此，向量  $\boldsymbol{P}$  用二维轨道倾角向量表示完毕；

对于向量  $\boldsymbol{Q}$ ,

$$\begin{aligned}
& \cos \Omega \sin \Omega + \sin(-\Omega) \cos i \cos \Omega \\
&= \frac{i_x i_y}{i_x^2 + i_y^2} \left(1 - 1 + 2(i_x^2 + i_y^2)\right) \\
&= 2i_x i_y
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$\begin{aligned}
& \sin^2 \Omega + \cos^2 \Omega \cos i \\
&= \frac{i_y^2}{i_x^2 + i_y^2} + \frac{i_x^2}{i_x^2 + i_y^2} \left(1 - 2i_x^2 - 2i_y^2\right) \\
&= 1 - 2i_x^2
\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin i \cos \Omega \\
&= -\sqrt{1 - \left(1 - 2(i_x^2 + i_y^2)\right)^2} \sqrt{\frac{i_x^2}{i_x^2 + i_y^2}} \\
&= -2i_x \sqrt{1 - (i_x^2 + i_y^2)}
\end{aligned} \tag{3.90}$$

至此，向量  $\boldsymbol{Q}$  用二维轨道倾角向量表示完毕；

对于向量  $\boldsymbol{W}$ ,

$$\begin{aligned}
& \sin(-\Omega) \sin i \\
&= -\sqrt{\frac{i_y^2}{i_y^2 + i_x^2}} \sqrt{1 - \left(1 - 2(i_y^2 + i_x^2)\right)^2} \\
&= -2i_y \sqrt{1 - (i_y^2 + i_x^2)}
\end{aligned} \tag{3.91}$$

$$\begin{aligned} & \cos(-\Omega)\sin i \\ &= \sqrt{\frac{i_x^2}{i_x^2 + i_y^2}} \sqrt{1 - \left(1 - 2(i_y^2 + i_x^2)\right)^2} \\ &= 2i_x \sqrt{1 - (i_y^2 + i_x^2)} \end{aligned} \tag{3.92}$$

而  $\cos i$  在前文已经计算完毕，如(3.77)式所示。至此矩阵  $\mathbf{M}$  用二维轨道倾角向量表示完毕，即：

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\mathbf{P} \ \mathbf{Q} \ \mathbf{W}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2i_y^2 & 2i_x i_y & -2i_y \sqrt{1 - (i_y^2 + i_x^2)} \\ 2i_x i_y & 1 - 2i_y^2 & 2i_x \sqrt{1 - (i_y^2 + i_x^2)} \\ 2i_y \sqrt{1 - (i_y^2 + i_x^2)} & -2i_x \sqrt{1 - (i_y^2 + i_x^2)} & 1 - 2(i_y^2 + i_x^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.93}$$

3.4.3 基于第二类无奇点改进根数的广播星历设计

基于第二类无奇点改进根数的广播星历设计思路，基本与 3.3.3 一致。同时考虑轨道根数的长期与短期变化。

3.4.4 不同广播星历模型拟合实验

同样，先基于第二类无奇点改进的轨道根数设计几种方案，再使用这些方案拟合仿真的低轨卫星精密轨道数据。所使用的仿真数据与 3.3.4 节保持一致。各设计方案拟合结果如表 3.9 和表 3.10 所示。从中可以看出：使用基于第二类无奇点的改进根数仍然可以同时克服小偏心率小轨道倾角引起的奇异问题。在基于第二类无奇点改进根数的 16 参数广播星历设计方案的基础上，针对低轨卫星运动特点，通过适当添加参数，可以大幅度提高广播星历拟合精度。本节的 22 参数广播星历设计方案是值得推荐的。在后续章节，将会探讨轨道倾角、轨道偏心率、轨道高度等几个可能影响参数拟合精度的因素对于该方案的影响。

表 3.9 几种基于第二类无奇点改进根数方案 1000 km 轨道的拟合结果(拟合时间长度:20 min; 单位: m)

参数个数	模式	URE RMS	R	A	C	轨道倾角
16		0.727	0.888	0.888	0.013	0°
17	$\dot{A}$	0.098	0.120	0.120	0.013	0°
	$\Delta \dot{n}$	0.092	0.112	0.112	0.013	0°

续表

参数个数	模式	URE RMS	R	A	C	轨道倾角
18	$C_{rc3}, C_{rs3}$	0.149	0.182	0.183	0.013	0°
	$\dot{A}, \Delta\dot{n}$	0.082	0.100	0.100	0.013	0°
	$\dot{A}, \ddot{A}$	0.063	0.077	0.076	0.013	0°
	$\Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}$	0.047	0.057	0.057	0.013	0°
19	$\Delta\dot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.037	0.044	0.044	0.013	0°
	$\dot{A}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.035	0.041	0.042	0.013	0°
	$\dot{A}, \ddot{A}, \Delta\dot{n}$	0.026	0.031	0.031	0.013	0°
	$\dot{A}, \Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}$	0.025	0.029	0.029	0.013	0°
20	$C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.024	0.027	0.027	0.013	0°
	$\Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.020	0.022	0.022	0.013	0°
	$\dot{A}, \ddot{A}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.019	0.021	0.022	0.013	0°
21	$\dot{A}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.013	0.014	0.013	0.013	0°
	$\Delta\dot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.013	0.013	0.013	0.013	0°
22	$\Delta\ddot{n}, \Delta\dot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.012	0.011	0.012	0.013	0°

表 3.10 几种基于第二类无奇点改进根数方案 1000 km 轨道的拟合结果(拟合时间长度:30 min; 单位: m)

参数个数	模式	URE RMS	R	A	C	轨道倾角
16		3.967	4.835	4.862	0.071	0°
17	$\dot{A}$	0.679	0.830	0.827	0.069	0°
	$\Delta\dot{n}$	0.633	0.773	0.772	0.069	0°
18	$C_{rc3}, C_{rs3}$	1.095	1.336	1.338	0.069	0°
	$\dot{A}, \Delta\dot{n}$	0.571	0.698	0.695	0.069	0°
	$\dot{A}, \ddot{A}$	0.379	0.460	0.461	0.069	0°
	$\Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}$	0.192	0.229	0.230	0.069	0°
19	$\Delta\dot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.369	0.448	0.449	0.069	0°
	$\dot{A}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.326	0.395	0.396	0.069	0°
	$\dot{A}, \ddot{A}, \Delta\dot{n}$	0.141	0.164	0.166	0.069	0°
	$\dot{A}, \Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}$	0.125	0.144	0.146	0.069	0°
20	$C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.208	0.247	0.252	0.069	0°
	$\Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.101	0.113	0.113	0.069	0°
	$\dot{A}, \ddot{A}, C_{rc3}, C_{rs3}$	0.097	0.108	0.107	0.069	0°

续表

参数个数	模式	URE RMS	R	A	C	轨道倾角
21	$\dot{A}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.068	0.068	0.068	0.069	0°
	$\Delta\dot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.067	0.066	0.066	0.069	0°
22	$\Delta\ddot{n}, \Delta\dot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$	0.058	0.052	0.052	0.069	0°

3.5 几类轨道根数型广播星历的比较与分析

正如前文几个章节所述，针对低轨卫星广播星历设计，本文讨论了四类轨道根数型广播星历设计方案，分别是：基于 GPS LNAV/CNAV 的广播星历设计、基于第一类无奇点轨道根数广播星历设计、基于第二类无奇点轨道根数广播星历设计与基于第二类无奇点改进轨道根数的广播星历设计。每类都设计了几种不同的方案，并采用仿真的低轨卫星精密轨道进行拟合实验。本文对这四大类中较优的方案进行互相比对，以找到对于低轨卫星广播星历设计更适合的轨道根数型方案。

方案 1：对基于 GPS LNAV/CNAV 广播星历的设计方案，选取 GPS 16 参数广播星历附加  $\dot{A}, \Delta\dot{n}, C_{us3}, C_{uc3}$  方案为在第一类中的较优设计方案；

方案 2：对基于第一类无奇点的广播星历设计方案，选取第一类无奇点 16 参数广播星历附加  $\Delta\dot{n}, \Delta\ddot{n}, C_{us3}, C_{uc3}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{ic3}, C_{is3}$  的方案为第二大类中较优的设计方案；

方案 3：对基于第二类无奇点轨道根数设计的广播星历，选取第二类无奇点 16 参数广播星历附加  $\Delta\dot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$  的方案为第三大类中较优的设计方案；

方案 4：对于基于第二类无奇点改进轨道根数设计的广播星历，选取第二类无奇点改进根数 16 参数广播星历附加  $\Delta\ddot{n}, \Delta\dot{n}, C_{rc3}, C_{rs3}, C_{\lambda c3}, C_{\lambda s3}$  为第四大类中较优的设计方案。

对于这四种较优的设计方案，分别从轨道偏心率、轨道倾角和轨道高度这 3 个方面全面评估广播星历设计方案的性能。

3.5.1 小偏心率小轨道倾角低轨卫星精密轨道拟合

对于小偏心率小轨道倾角的低轨卫星精密轨道拟合，方案 3 与方案 4 拟合情况在 3.3.4 节与 3.4.4 节已经分别做过讨论。对于方案一与方案二，使用与 3.3.4 节与 3.4.4 节相同的低轨卫星精密轨道仿真数据进行拟合，探究其对于小偏心率与小轨道倾角的拟合效果，具体拟合结果如表 3.11 所示。从表中可以看到：对于



小偏心率与小轨道倾角的拟合,方案一与方案二拟合效果都非常不理想。而且在拟合过程中笔者发现,这2种方案都存在拟合次数过多的问题。经过分析,这是小偏心率小轨道倾角引起奇异问题,导致参数之间相关关系过大造成的;反观方案三与方案四,由于针对小偏心率小轨道倾角引起的奇异问题,重新定义了轨道根数,所以在拟合各自广播星历参数的过程中取得了较优的拟合精度。由于方案一与方案二对于小偏心率小轨道倾角精密轨道拟合精度不佳,后续不再讨论这2种设计方案。

表 3.11 方案一与方案二拟合小偏心率与小轨道倾角低轨卫星轨道结果(拟合时间长度: 20 min; 单位: m)

方案	URE RMS	R	A	C	轨道倾角
方案一	0.433	0.467	0.587	0.012	0°
方案二	2.867	4.057	2.828	0.015	0°

### 3.5.2 轨道倾角对于拟合精度的影响

在实现低轨卫星增强 GNSS 定位的过程中,低轨卫星的星座设计是非常关键的步骤之一。在设计星座的过程中,各种轨道倾角的低轨卫星都有可能出现<sup>[46]</sup>。为了讨论轨道倾角对于广播星历参数拟合精度的影响,本文拟合了从 0° 至 90° 低轨卫星精密轨道数据,轨道倾角从 0° 开始,每 5° 仿真一次精密轨道。除了轨道倾角设置不同之外,其余仿真策略与 3.1.2 节相同。2 种方案的拟合结果如图 3.1 所示。从图中可以看出:第二类无奇点根数对于高轨道倾角轨道存在奇异问题,导致拟合精度较差,当轨道倾角高于 70° 时,甚至会出现拟合失败的现象。反观方案四,针对高轨道倾角轨道存在的奇异问题,重新定义二维轨道倾角矢量后,即使在轨道倾角较高时,拟合精度依然相对稳定,能够取得较稳定的拟合精度,满足拟合 URE 在 10 cm 以内的要求。鉴于方案三存在的问题,本文后续章节将不再讨论方案三。

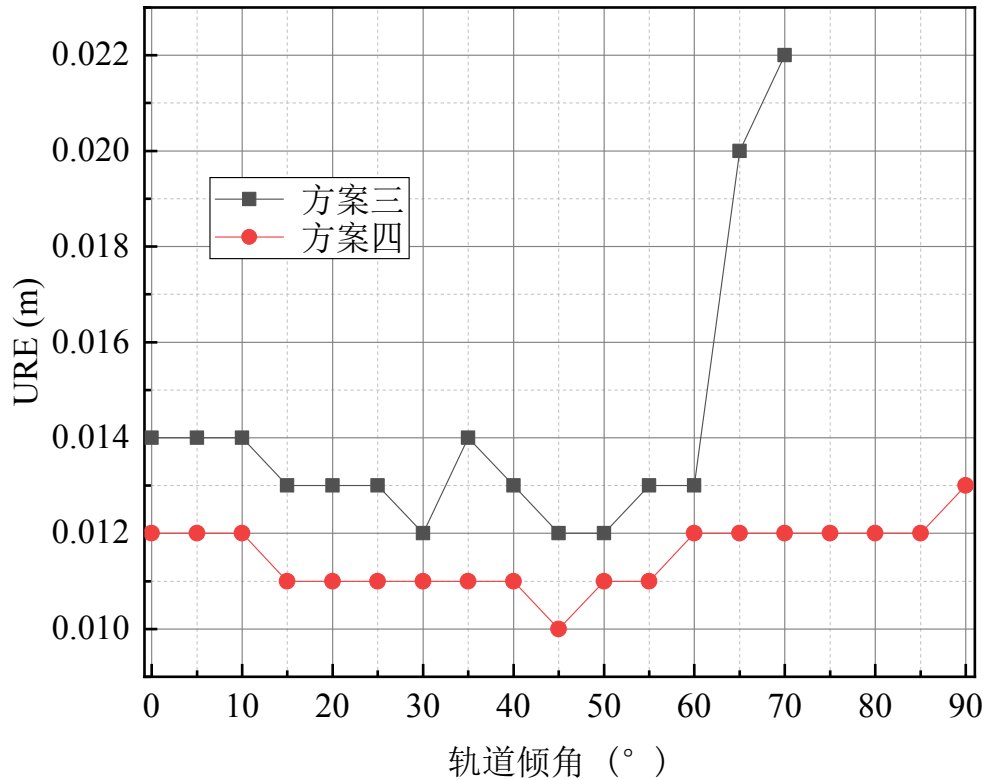


图 3.1 轨道倾角对方案三与方案四参数拟合精度的影响（拟合时间长度：20 min；单位：m；如果没有拟合精度值，则说明拟合失败）

### 3.5.3 轨道高度对于拟合精度的影响

低轨卫星所处轨道高度越低，则卫星受力情况越复杂，广播星历拟合难度也就越大。为了探究轨道高度对于广播星历拟合精度的影响，本节将卫星轨道倾角设置为  $45^\circ$ ，轨道高度设置为 600 km 至 1400 km，其余仿真策略与 3.1.2 节相同。使用方案四拟合这些仿真低轨卫星精密轨道数据的拟合结果如图 3.2 所示。从表中的统计结果可以看出：轨道高度对于广播星历参数拟合精度有着明显影响。轨道高度越高，拟合精度越高。方案四在拟合时间长度为 20 min，轨道高度为 600 km 至 1400 km 时，可以满足拟合 URE 在 10 cm 以内的要求。

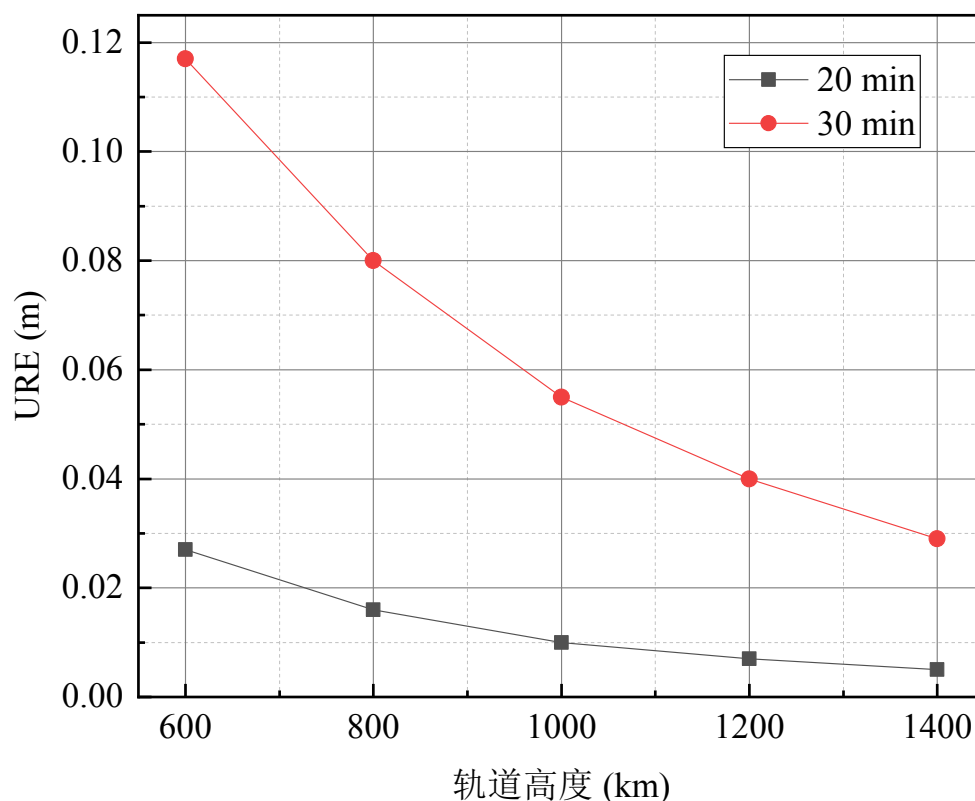


图 3.2 轨道高度对方案四参数拟合精度的影响（拟合时间长度：20 min，30 min；单位：m）

### 3.5.4 轨道偏心率对于拟合精度的影响

为了探究低轨卫星轨道偏心率对广播星历参数拟合精度可能存在的影响，对在不同偏心率轨道上的卫星进行参数拟合，本节将卫星轨道倾角设置为  $45^\circ$ ，轨道高度设置为 1000 km，其余仿真策略与 3.1.2 节相同。具体拟合结果如图 3.3 所示。随着偏心率的增大，当拟合时间长度为 20 min 时，拟合精度有缓慢下降的趋势，但总体而言方案四可以满足 URE 在 10 cm 以内的要求；在拟合时间长度为 30 min 时，随着轨道偏心率的增大，拟合精度下降明显。

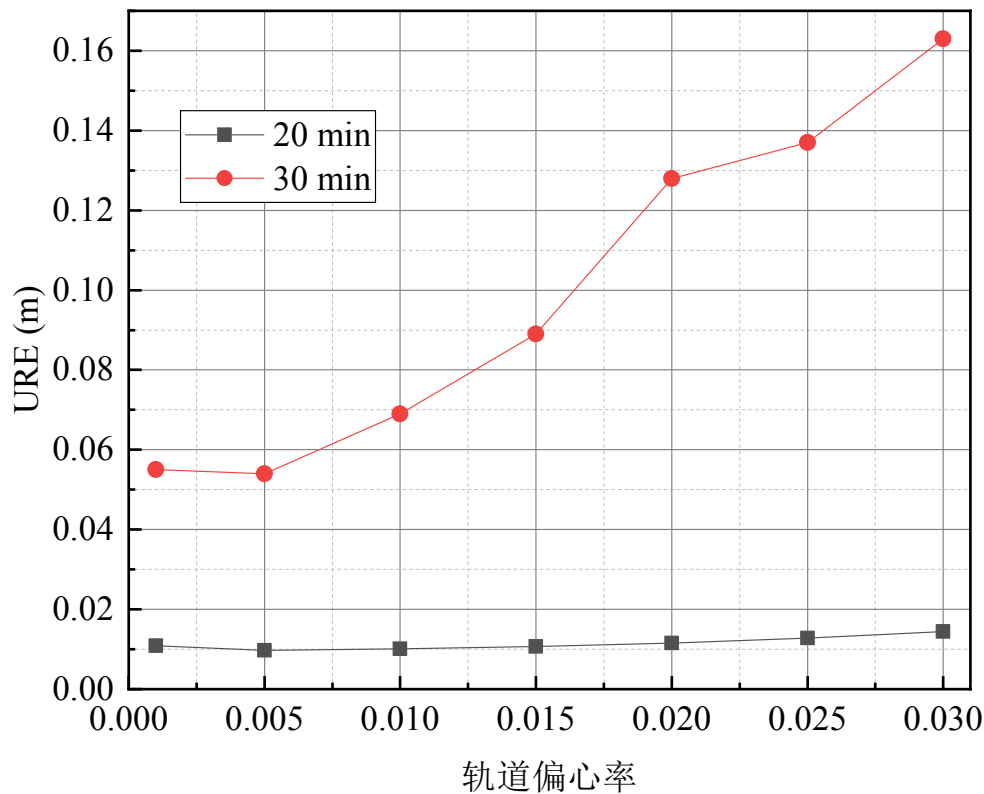


图 3.3 轨道偏心率对方案四参数拟合精度的影响（拟合时间长度：20 min，30 min；单位：m）

### 3.5.5 真实低轨卫星精密轨道数据拟合

前文的拟合实验，都是基于仿真的精密卫星轨道数据开展的。为了进一步验证星历设计方案的可靠程度，本节使用了 3 个真实的低轨卫星精密轨道数据，这些低轨卫星是：CryoSat-2、HY-2A 和 Jason-2，它们的卫星轨道高度大约在 720 km 至 1300 km。表 3.12 列出了这些卫星的基本轨道参数，这些低轨卫星的偏心率几乎接近于零。如果不采用无奇点轨道根数，将很难克服由于小轨道偏心率造成的奇点的问题。

表 3.12 用于拟合广播星历参数的真实低轨卫星基本轨道参数

卫星	轨道倾角	轨道偏心率	轨道高度 (km)
CryoSat-2	92°	0	720
HY-2A	99.35°	0.00117	971
Jason-2	66°	0	1336

这些真实低轨卫星的精密轨道拟合结果具体如图 3.4 所示。从图中可以看出，

尽管这些真实存在的低轨卫星，其偏心率非常接近于零，但方案四仍然能成功拟合广播星历参数，并且当拟合时间长度为 20 min 时，满足拟合 URE 不超过 10 cm 的要求。同时，也可以发现，轨道高度对于拟合精度有着显著影响，高度越高，拟合精度越高，反之，则会降低。

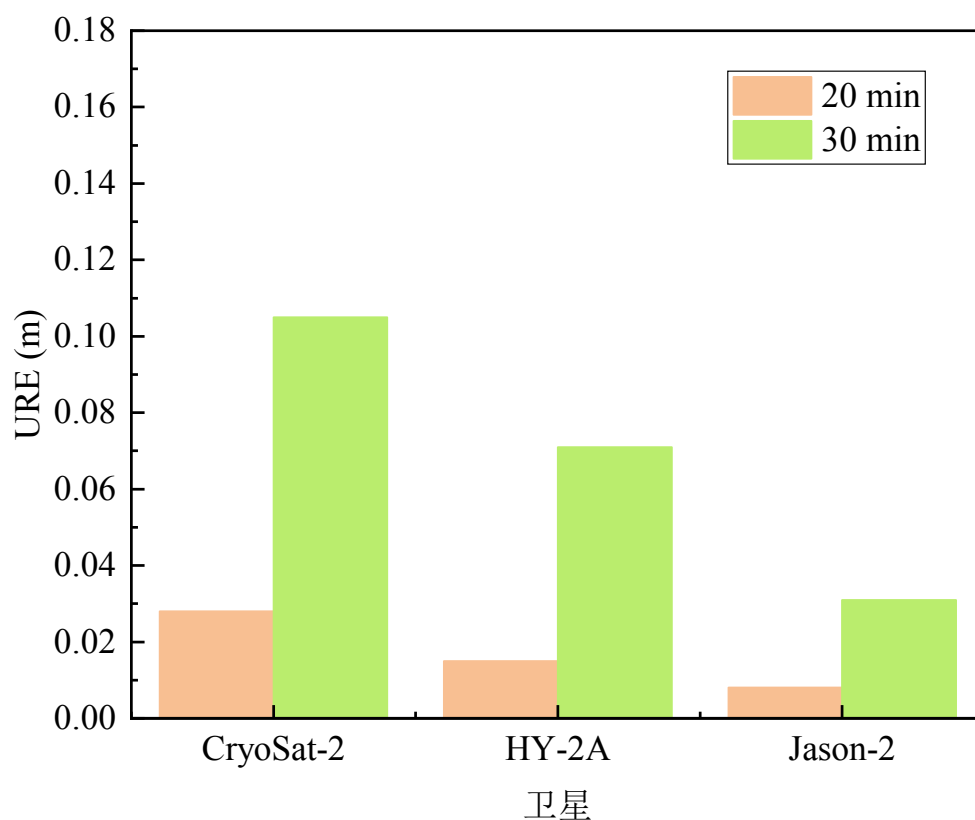


图 3.4 方案四拟合真实低轨卫星精密轨道拟合结果（拟合时间长度：20 min，30 min；单位：m）

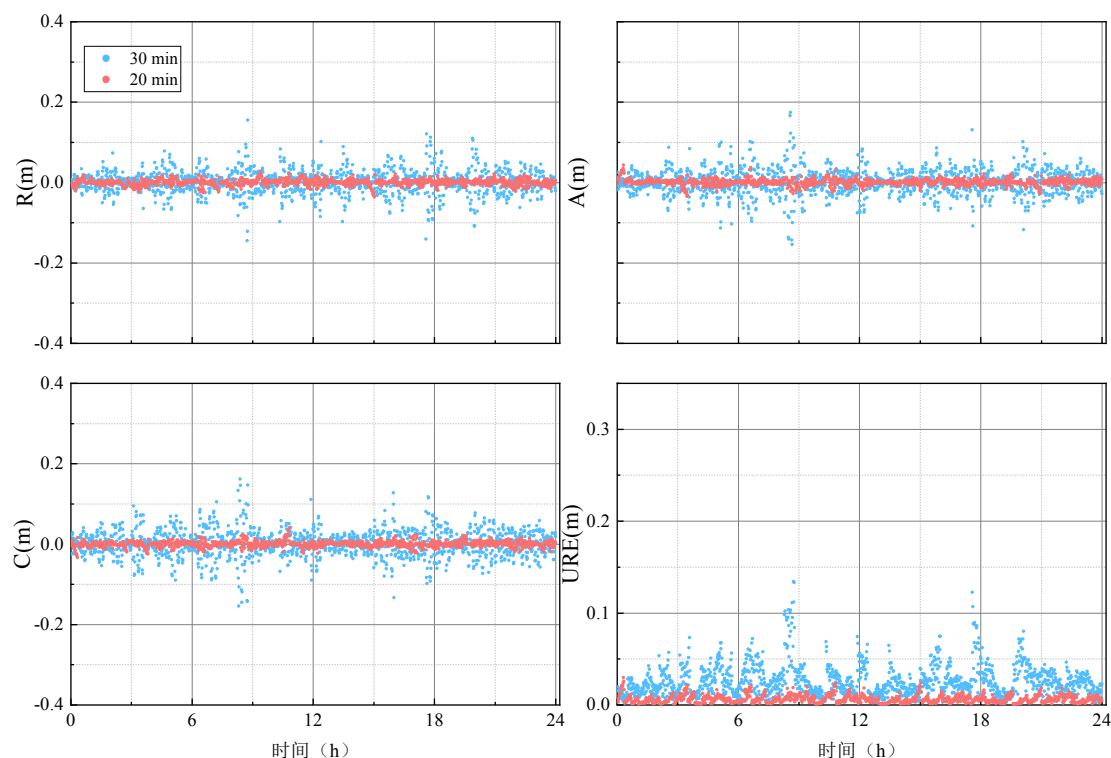


图 3.5 Jason-2 卫星在径向 (R)，切向 (A) 和法向 (C) 以及拟合 URE 的时间序列 (拟合时间长度: 20 min, 30 min; 单位: m)

图 3.5 展现了低轨卫星 Jason-2 的拟合误差时间序列。当拟合时间长度为 20 min 时，在径向、切向与法向的拟合误差不超过 $\pm 4.5$  cm，拟合 URE 优于 3 cm。当拟合时间长度为 30 min 时，在径向、切向与法向，拟合误差不超过 $\pm 18$  cm，而拟合 URE 不超过 14 cm。因此，拟合时间长度对于广播星历拟合精度有着非常显著的影响，这在仿真实验中也有所体现。

### 3.6 本章小结

与 MEO、IGSO 和 GEO 卫星相比，低轨卫星运行周期短，并且受力情况更为复杂，因此设计广播星历模型难度更大。本文基于四大类轨道根数型广播星历，设计了多种不同方案，采用仿真与真实低轨卫星数据，检验不同方案的可靠性。针对低轨卫星的运行特点，为每个大类设计了多个方案。经过实验发现：第一大类，基于 GPS LNAV/CNAV 广播星历设计的方案，难以解决小偏心率小轨道倾角引起的奇异问题；而第二大类，基于第一类无奇点轨道根数设计的方案，虽然能避免因小偏心率轨道引起奇异问题，但是无法解决小轨道倾角引起的奇异问题；第三大类，基于第二类无奇点轨道根数设计的方案，虽然能够同时避免小偏心率

与小轨道倾角引起的奇异问题,但是当轨道倾角接近极轨时,仍然会出现奇异问题,造成拟合误差过大;针对以上三大类问题,本文提出基于第二类无奇点的改进轨道根数设计低轨卫星广播星历。相比于第二类无奇点轨道根数,重新定义了轨道倾角二维矢量。在第二类无奇点根数的基础上,避免了拟合极轨道数据时出现的奇异问题。为了测试这四大类方案的拟合精度,笔者在这几大类方案中,分别选择了较优的四个具体方案。采用仿真与真实精密低轨卫星数据,使用控制变量法进行拟合测试。讨论了轨道倾角、轨道高度与偏心率,对于广播星历参数拟合精度的影响。结果表明:基于第二类无奇点改进轨道根数设计的方案,即方案四,在多种情况下,当拟合长度为 20 min 时,都取得了较优的拟合结果,满足拟合 URE 在 10 cm 以内的要求。

第4章 基于矢量积分的低轨卫星广播星历设计与精度对比

虽然轨道根数类型广播星历模型，被大部分卫星导航系统使用，但在某些情况下，由于存在奇点问题造成拟合误差过大。在第 3 章，采用轨道根数设计低轨卫星广播星历时，为解决在某些特殊情况下的奇点问题，进行了大量探索，做了许多工作。与其他卫星导航系统非常不同的是，GLONASS 系统采用基于矢量积分的广播星历模型，与轨道根数型广播星历相比，该模型具有良好的无奇异特点<sup>[104]</sup>。因此，可以考虑设计基于矢量积分的低轨卫星广播星历。

4.1 广播星历模型设计

现在正在使用的标准 GLONASS 广播星历模型，包含 9 个状态参数与 1 个时间参数。该模型简单，适合描述中、高轨卫星摄动运动。但由于低轨卫星运动情况，相比中、高轨卫星更为复杂，标准的 GLONASS 广播星历模型直接用于低轨卫星，存在拟合误差过大的问题。所以，在标准 GLONASS 广播星历模型的基础上，需要考虑添加一些额外的参数<sup>[155]</sup>。使用 STK 软件，在 HPOP 模式下，仿真在 600 km 与 1000 km 轨道高度的低轨卫星精密星历。详细的轨道参数如表 4.1 所示。低轨卫星在 3 个轨道周期内的加速度变化情况如图 4.1 所示。很明显，低轨卫星在 ECEF 坐标系中的加速度具有非常明显的与卫星轨道周期有关的周期变化。同时，也具有一定的趋势性变化。所以，可以考虑使用切比雪夫多项式与傅里叶级数描述卫星加速度的变化情况，构建增强的矢量积分型广播星历模型。

表 4.1 低轨卫星详细轨道参数

参数	数值	
轨道高度	600 km	1000 km
半长轴	6878.14 km	7378.14 km
轨道偏心率	0.001	0.001
轨道倾角	45°	5°
近地点角距	0°	30°
升交点赤经	0°	0°
真近点角	0°	0°



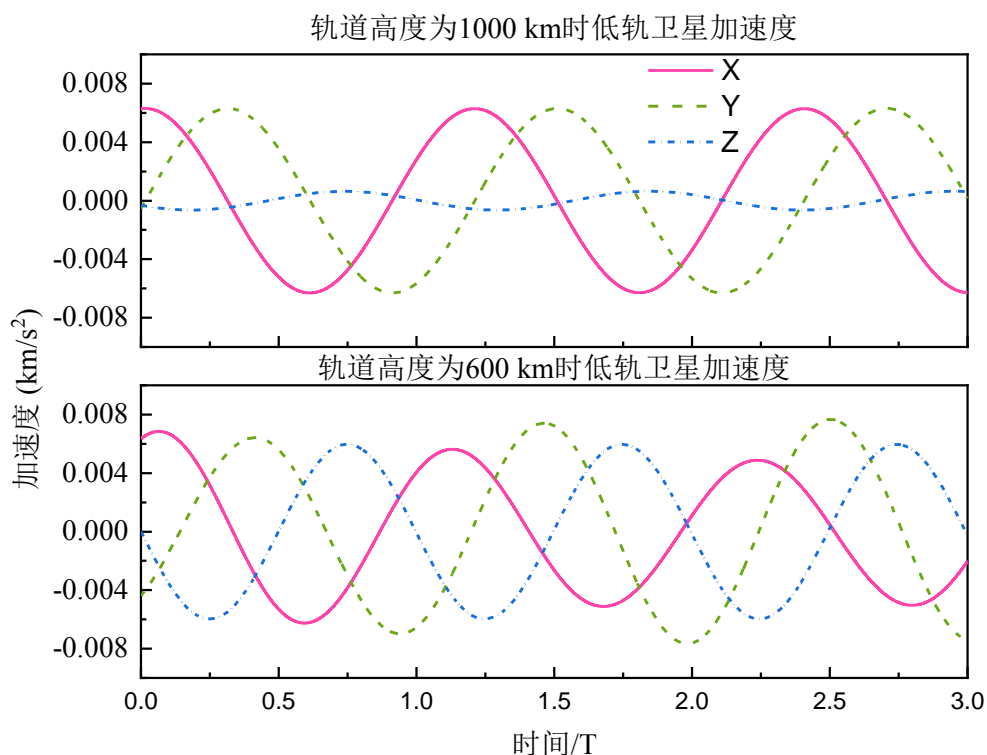


图 4.1 在地心地固坐标系加速度在 X, Y, Z 方向变化情况 (3 个轨道周期)

根据上述分析结果,使用 3 阶和 2 阶切比雪夫多项式拟合低轨卫星加速趋势变化特征,使用傅里叶级数拟合加速度的周期变化特征。设计了四种方案,具体参数及其意义如表 4.2 至表 4.5 所示。

表 4.2 增强的矢量积分型广播星历参数及其意义 (方案一, 标准的 GLONASS 广播星历模型)

参数	意义
$t_{oe}$	广播星历参数参考时刻
$X, Y, \text{ 和 } Z$	卫星在参考时刻在 ECEF 坐标系位置
$V_x, V_y, \text{ 和 } V_z$	卫星在参考时刻在 ECEF 坐标系速度
$a_x, a_y, a_z$	卫星在 X, Y, Z 分量加速度

表 4.3 增强的矢量积分型广播星历参数及其意义 (方案二)

参数	意义
$t_{oe}$	广播星历参数参考时刻
$X, Y, \text{ 和 } Z$	卫星在参考时刻在 ECEF 坐标系位置
$V_x, V_y, \text{ 和 } V_z$	卫星在参考时刻在 ECEF 坐标系速度
$a_x, a_y, a_z$	卫星在 X, Y, Z 分量加速度

续表

参数	意义
$(A_X, B_X), (A_Y, B_Y)$ 和 $(A_Z, B_Z)$	描述卫星加速度在 X, Y, Z 方向周期变化的三角函数幅值

表 4.4 增强的矢量积分型广播星历参数及其意义（方案三）

参数	意义
$t_{oe}$	广播星历参数参考时刻
$X, Y,$ 和 $Z$	卫星在参考时刻在 ECEF 坐标系位置
$V_X, V_Y,$ 和 $V_Z$	卫星在参考时刻在 ECEF 坐标系速度
$C_{X0}, C_{X1}, C_{X2},$ 和 $C_{X3}$	描述卫星加速度在 X 方向趋势变化的切比雪夫多项式系数
$C_{Y0}, C_{Y1}, C_{Y2},$ 和 $C_{Y3}$	描述卫星加速度在 Y 方向趋势变化的切比雪夫多项式系数
$C_{Z0}, C_{Z1}, C_{Z2},$ 和 $C_{Z3}$	描述卫星加速度在 Z 方向趋势变化的切比雪夫多项式系数

表 4.5 增强的矢量积分型广播星历参数及其意义（方案四）

参数	意义
$t_{oe}$	广播星历参数参考时刻
$X, Y,$ 和 $Z$	卫星在参考时刻在 ECEF 坐标系位置
$V_X, V_Y,$ 和 $V_Z$	卫星在参考时刻在 ECEF 坐标系速度
$C_{X0}, C_{X1}, C_{X2},$ 和 $C_{X3}$	描述卫星加速度在 X 方向趋势变化的切比雪夫多项式系数
$C_{Y0}, C_{Y1}, C_{Y2},$ 和 $C_{Y3}$	描述卫星加速度在 Y 方向趋势变化的切比雪夫多项式系数
$C_{Z0}, C_{Z1},$ 和 $C_{Z2}$	描述卫星加速度在 Z 方向趋势变化的切比雪夫多项式系数
$(A_X, B_X), (A_Y, B_Y)$ 和 $(A_Z, B_Z)$	描述卫星加速度在 X, Y, Z 方向周期变化的三角函数幅值

4.2 用户算法

与标准的 GLONASS 广播星历用户算法稍有不同的是, 计算卫星在 ECEF 坐标系的加速度时, 用式(4.1)至(4.3)计算:

$$\begin{aligned} \ddot{R}_{ECEF-X} = & -\frac{GM}{r^3}X + \frac{3}{2}C_{20}\frac{GMa_e^2}{r^5}X\left(1 - \frac{5Z^2}{r^2}\right) + A_X\cos(n(t_{oe}-t)) \\ & + B_X\sin(n(t_{oe}-t)) + \omega_e^2X + 2\omega_eV_Y + \sum_{i=0}^3C_{X_i}T_i(\tau) \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\ddot{R}_{ECEF\_Y} = & -\frac{GM}{r^3}Y + \frac{3}{2}C_{20}\frac{GMa_e^2}{r^5}Y\left(1 - \frac{5Z^2}{r^2}\right) + A_Y \cos(n(t_{oe} - t)) \\ & + B_Y \sin(n(t_{oe} - t)) + \omega_e^2 X - 2\omega_e V_X + \sum_{i=0}^3 C_{Y_i} T_i(\tau)\end{aligned}\quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}\ddot{R}_{ECEF\_Z} = & -\frac{GM}{r^3}Z + \frac{3}{2}C_{20}\frac{GMa_e^2}{r^5}Z\left(3 - \frac{5Z^2}{r^2}\right) + A_Z \cos(n(t_{oe} - t)) \\ & + B_Z \sin(n(t_{oe} - t)) + \sum_{i=0}^2 C_{Z_i} T_i(\tau)\end{aligned}\quad (4.3)$$

$T_i(\tau)$ 可用迭代公式计算:

$$\tau = \frac{2}{\Delta t}(t_{oe} - t), t \in [t_0, t_0 + \Delta t] \quad (4.4)$$

其中,  $\tau \in [-1, 1]$ 可以根据观测历元计算:

$$\tau = \frac{2}{\Delta t}(t_{oe} - t), t \in [t_0, t_0 + \Delta t] \quad (4.5)$$

其中,  $\Delta t$ 为拟合时间长度。

在计算卫星的加速度之后, 如(2.10)式所示, 采用数值积分的方法, 计算参数有效期内任意观测时刻卫星在 ECEF 坐标系中的位置与速度。对于数值积分方法的选择, 本文将会在后续章节讨论。

### 4.3 实验验证

本文使用 STK 软件, 仿真了从 600 km 至 1400 km 轨道高度的低轨卫星精密轨道数据, 仿真时间设置为 2019 年 4 月 27 日 0 时至 2019 年 4 月 28 日 0 时。使用这些精密轨道对增强的矢量积分型广播星历模型进行测试, 对前文提到的四种矢量积分型广播星历设计方案进行分析比较。在测试过程中, 详细讨论了数值积分方法, 积分步长, 轨道倾角, 轨道偏心率, 轨道高度与拟合时间段长度对于拟合精度可能造成的影响。然后, 使用真实低轨卫星精密轨道数据拟合广播星历, 进一步验证模型可靠程度。

#### 4.3.1 不同设计方案比较

在本节使用前文提到的四种方案, 拟合在 1000 km 轨道高度的低轨卫星精密

星历，对这四种矢量积分型星历设计方案进行比较分析。该低轨卫星的轨道倾角与偏心率分别设置为  $0^\circ$  与 0.001。在拟合广播星历过程中，使用四阶龙格库塔积分方法，积分步长设置为 30 s。积分方法与积分步长的影响，将会在后续章节详细讨论。四种设计方案的拟合精度如表 4.6 与表 4.7 所示。

表 4.6 四种设计方案拟合精度 (拟合时间长度: 20 min; 单位: m)

方案	URE RMS	R	A	C
方案 1	3.034	3.657	3.604	1.078
方案 2	0.186	0.221	0.225	0.060
方案 3	0.063	0.076	0.074	0.023
方案 4	0.011	0.013	0.013	0.006

表 4.7 四种设计方案拟合精度 (拟合时间长度: 30 min; 单位: m)

方案	URE RMS	R	A	C
方案 1	7.195	8.674	8.536	2.572
方案 2	0.796	0.950	0.948	0.302
方案 3	0.323	0.386	0.385	0.119
方案 4	0.068	0.079	0.079	0.048

正如表 4.6 与表 4.7 所示，方案四的拟合精度最优；标准的 GLONASS 广播星历表现最差。当拟合时间长度从 20 min 延长至 30 min 时，方案四拟合精度下降幅度最小。低轨卫星加速度变化情况非常复杂，其短周期与长期趋势项变化应该同时考虑。而方案四恰好同时考虑了两者的影响，因此方案四是值得推荐的。本节成功拟合小偏心率、小轨道倾角精密轨道，也说明矢量积分型广播星历良好的无奇异特性。在后续章节中，将会从多个方面对矢量积分型广播星历的实用性进行分析。

### 4.3.2 数值积分方法的影响

在基于矢量积分型的广播星历模型中，需要使用数值积分方法计算任意观测时刻的卫星位置与速度。数值积分方法通常分为单步法与多步法<sup>[94,156]</sup>。尽管在理论上，多步法具有更高的积分精度，但算法也更为复杂且耗费时间。单步法，比如广泛应用的龙格库塔方法，算法简单，可以满足卫星位置与速度积分精度要求。本节评估了龙格库塔 3 阶、4 阶与 5 阶算法，在广播星历参数拟合精度方面造成的差异。龙格库塔 3 阶，龙格库塔 4 阶与龙格库塔 5 阶具体计算过程，分别

具体如式(4.6)至(4.8)所示。本文使用这3种积分方法,拟合轨道高度为1000 km,偏心率0.001,轨道倾角为0°的低轨卫星精密轨道数据。具体的拟合精度的均方根误差统计情况如表4.8和表4.9所示。

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 = hf(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2) \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1\right) \\ k_3 = hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n - \frac{1}{3}k_1 + k_2\right) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_1 - k_2 + k_3) \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{24}k_1 + \frac{5}{48}k_4 + \frac{27}{56}k_5 + \frac{125}{336}k_6 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{4}k_2\right) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n - k_2 + 2k_3) \\ k_5 = hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{7}{27}k_1 + \frac{10}{27}k_2 + \frac{1}{27}k_4\right) \\ k_6 = hf\left(x_n + \frac{1}{5}h, y_n + (28k_1 - 125k_2 + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5)\right) \end{cases} \quad (4.8)$$

其中,  $y$  表示函数值;  $x$  为自变量;  $h$  为积分步长。

表 4.8 使用 3 至 5 阶龙格库塔算法拟合广播星历精度的差异 (拟合时间长度: 20 min; 单位: m)

拟合精度	龙格库塔 3 阶	龙格库塔 4 阶	龙格库塔 5 阶
URE RMS	0.015	0.011	0.011

续表

拟合精度	龙格库塔 3 阶	龙格库塔 4 阶	龙格库塔 5 阶
R	0.018	0.013	0.013
A	0.017	0.013	0.013
C	0.006	0.006	0.006

表 4.9 使用 3 至 5 阶龙格库塔算法拟合广播星历精度的差异（拟合时间长度：30min；单位：m）

拟合精度	龙格库塔 3 阶	龙格库塔 4 阶	龙格库塔 5 阶
URE RMS	0.122	0.068	0.068
R	0.152	0.079	0.079
A	0.15	0.079	0.079
C	0.048	0.048	0.048

正如表 4.8 和表 4.9 所示，当拟合时间长度为 20 min 时，不同数值积分方法的拟合精度差异不大。但是，当拟合积分长度为 30 min 时，3 阶龙格库塔方法的拟合精度明显很低，此时，4 阶与 5 阶龙格库塔的拟合精度差异不大。考虑到 5 阶龙格库塔算法相比于 4 阶龙格库塔方法更为复杂。因此，使用 4 阶龙格库塔算法计算卫星位置与速度是比较合适的。

4.3.3 数值积分步长的影响

除了积分方法的影响，积分步长的影响也值得考虑。如果积分步长太小，则会导致计算负担较重，影响实时性。反之，如果步长较长，则会影响广播星历拟合精度。在本节，同样使用轨道高度在 1000 km，轨道偏心率为 0.001，轨道倾角为 0° 的低轨卫星精密轨道数据。数值积分步长与广播星历拟合精度的关系如图 4.2 所示。

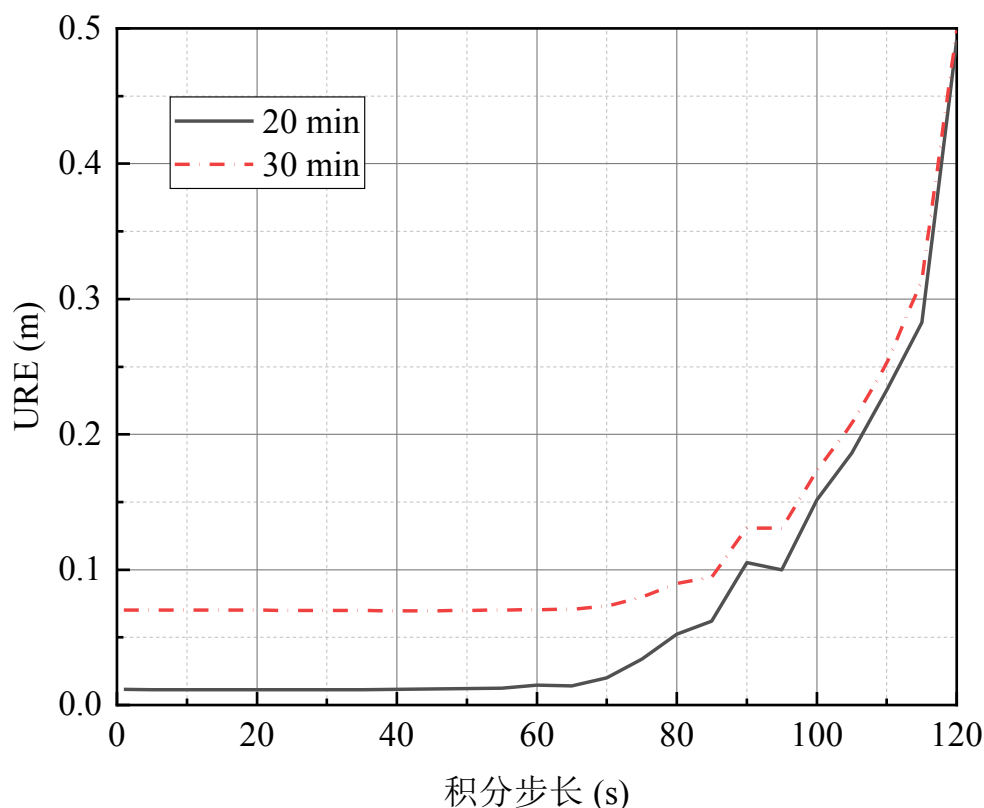


图 4.2 数值积分步长与拟合精度的关系（拟合时间长度：20 min，30 min）

数值积分步长的选择，应该考虑到广播星历拟合精度与计算效率的平衡。综合考虑之后，将积分步长设置为 30 s 是比较合适的。

#### 4.3.4 轨道倾角与偏心率的影响

轨道倾角与偏心率对广播星历拟合精度的影响需要仔细考虑。在基于轨道根数设计广播星历时，由小轨道倾角与小偏心率造成的奇异问题，引起了许多困难。在本节，低轨卫星的轨道偏心率与轨道高度仍然设置为 0.001 与 1000 km。轨道倾角从  $0^\circ$  变化到  $90^\circ$ 。这样在未来的低轨卫星增强星座设计方案中，所有轨道倾角可能出现的情况都能被考虑。轨道倾角对于拟合精度造成的影响如图 4.3 所示。当拟合时间长度为 20 min 时，拟合精度随轨道倾角的变化非常平稳。但是，当拟合时间长度为 30 min 时，拟合精度的变化程度略大。此外，为了评估轨道偏心率对于广播星历造成的影响。轨道偏心率从 0.001 变化至 0.030，将轨道倾角设置为  $45^\circ$ ，轨道高度仍然设置为 1000 km。轨道偏心率对于广播星历拟合精度的影响如图 4.4 所示。很明显，尽管轨道偏心率发生了变化，但拟合精度依然比较稳定。

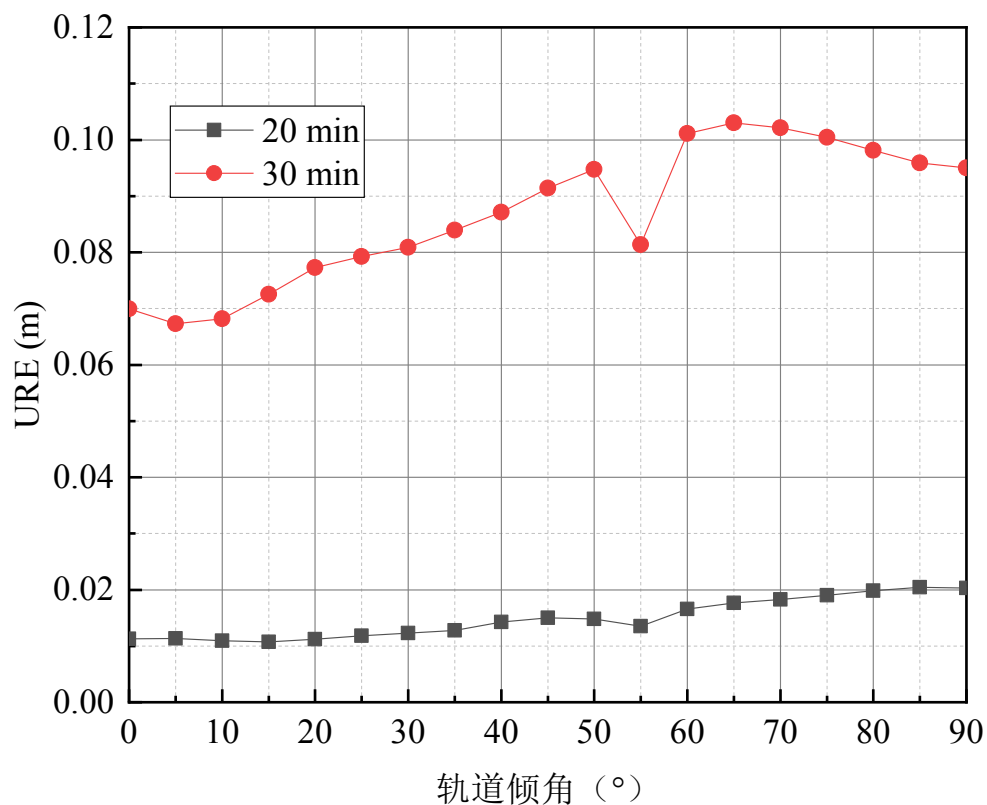


图 4.3 轨道倾角对于广播星历拟合精度的影响（拟合时间长度：20min，30min）

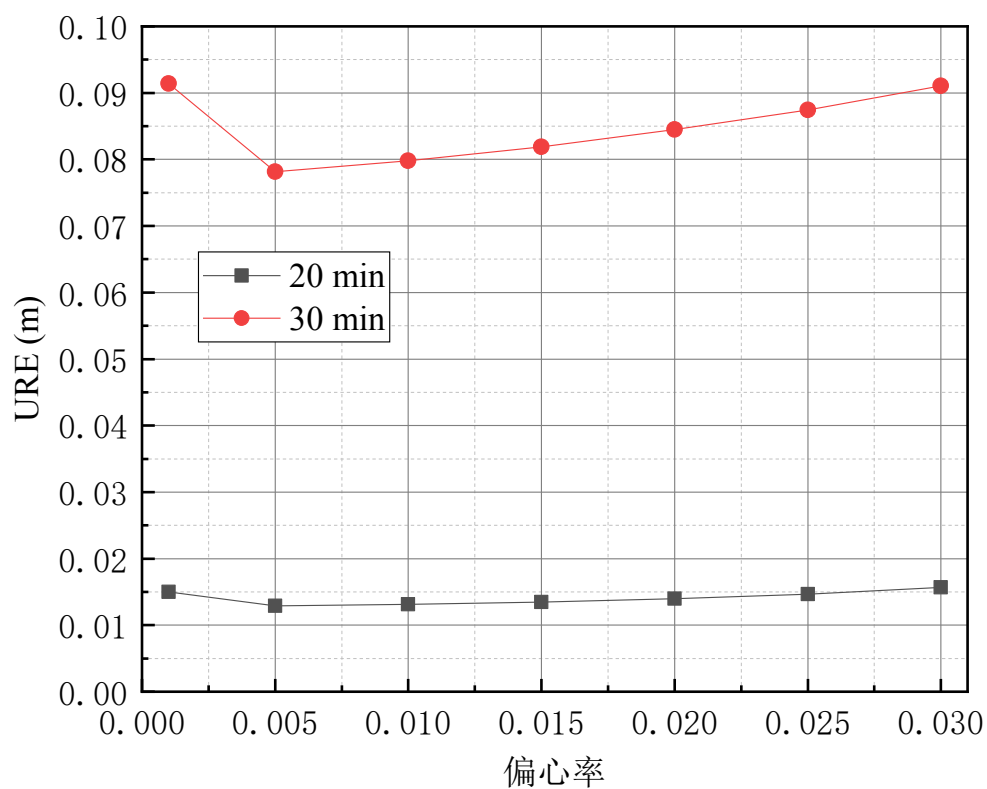


图 4.4 轨道偏心率对广播星历拟合精度的影响（拟合时间长度：20 min，30 min）



总之,从以上实验结果可以发现:在轨道根数类型广播星历设计中,遇到小偏心率,小轨道倾角或者大轨道倾角造成的奇异问题,在矢量积分类型广播星历得到了解决。奇异问题出现的根本原因是:在某些特殊情况下,轨道根数的定义是不明确的<sup>[94]</sup>。与此相反的是,矢量积分型广播星历能够很好克服奇异问题。此外,笔者在拟合广播星历过程中发现:在拟合矢量积分型广播星历时,平均需要3至4次迭代便可以收敛。但是,对于拟合基于第二类无奇点改进轨道根数设计的广播星历时,采用同样的拟合策略,却在大多数情况下需要7至8次迭代才能收敛。这是因为对于轨道根数类型广播星历,参数之间具有较强相关关系;而矢量积分类型广播星历参数之间相关关系较弱。这也从另一个角度说明了矢量积分类型广播星历良好的无奇异特性。

#### 4.3.5 轨道高度的影响

卫星的轨道高度将会对广播星历拟合精度产生显著影响。在本节,仍然将轨道倾角与偏心率分别设置为 $45^\circ$ 与0.001,仿真时间为2019年4月27日0时至2019年4月28日0时。卫星轨道高度从600 km变化至1400 km。由图4.5可以发现:轨道高度越高,广播星历拟合精度就越高。当卫星轨道高度在1000 km以上,拟合时间长度为20 min时,拟合精度甚至要优于1 cm。总之当使用增强的矢量积分型广播星历模型,拟合时间长度为20 min时,对于在轨道高度600 km至1400 km的低轨卫星,拟合精度可以控制在4 cm以内,完全可以满足相关要求。

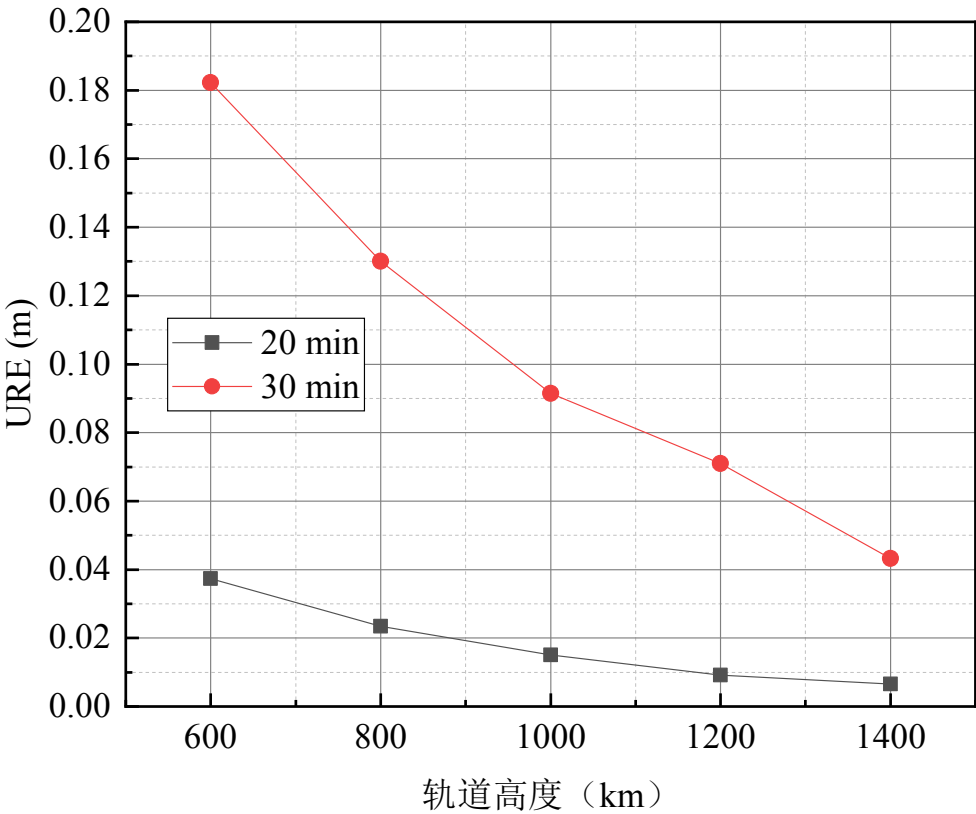


图 4.5 轨道高度对拟合精度的影响（拟合时间长度：20 min，30 min）

4.3.6 真实低轨卫星精密轨道数据拟合

考虑到上述实验都是基于仿真的精密星历展开的，在本节使用真实的低轨卫星精密轨道数据，拟合增强的矢量积分型广播星历模型，以检验该模型可靠程度。所采用的真实低轨卫星精密轨道数据与 3.5.5 节保持一致。

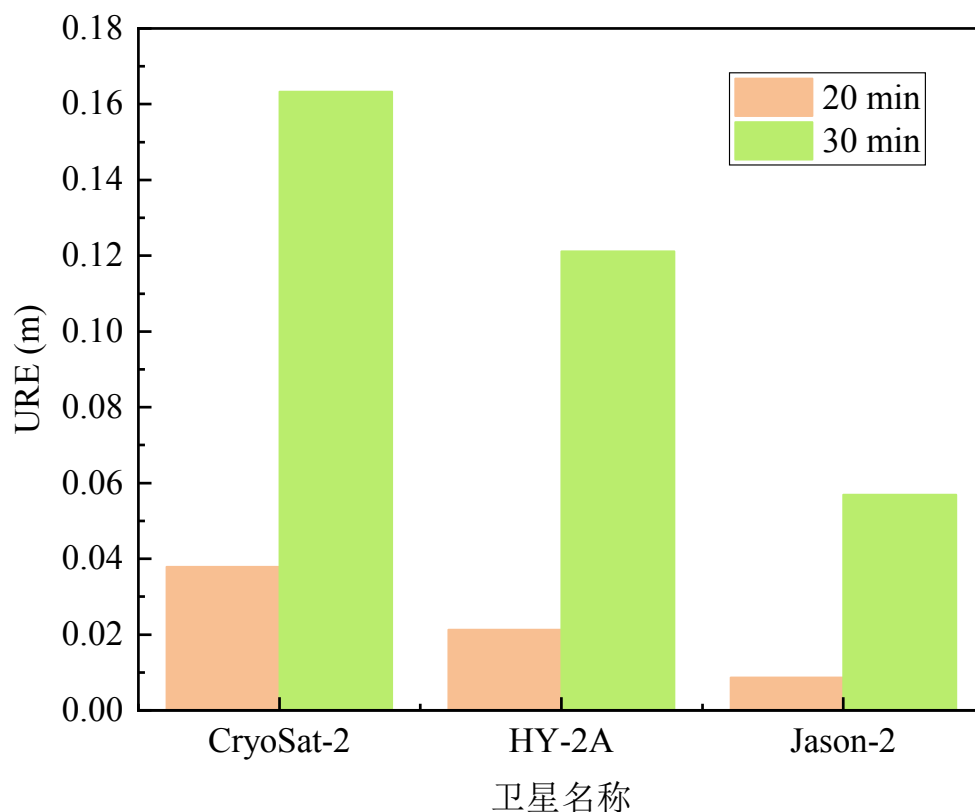


图 4.6 真实低轨卫星的广播星历拟合精度（拟合时间长度：20 min，30 min）

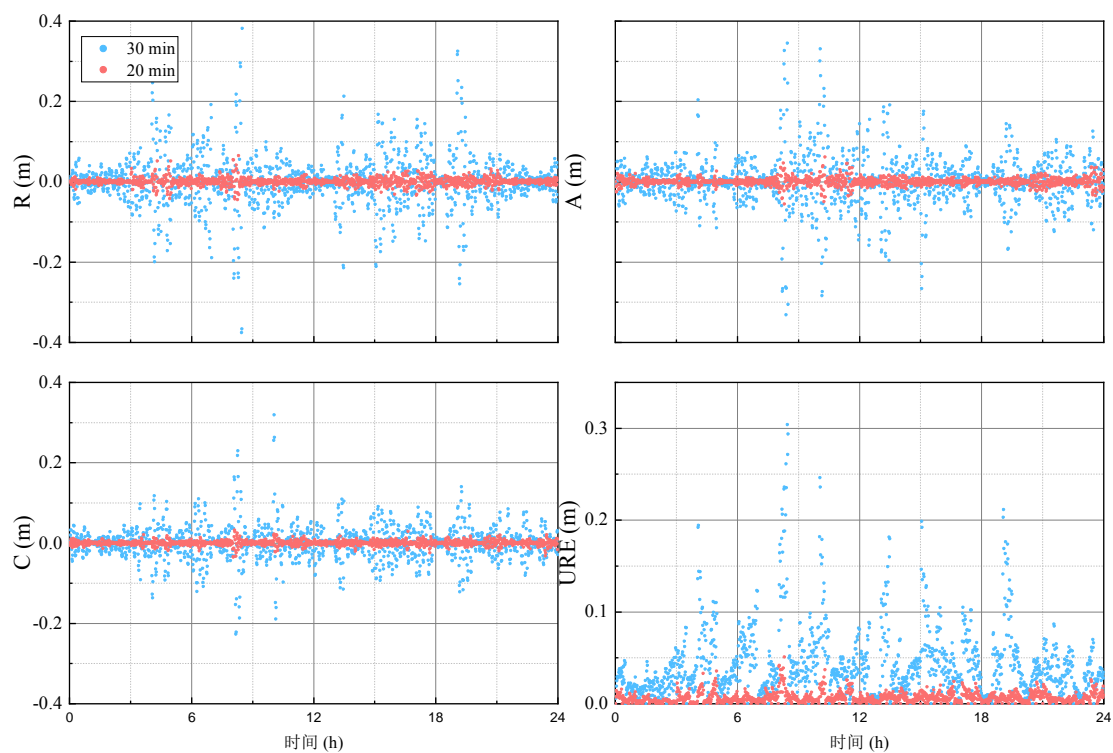


图 4.7 Jason-2 卫星在径向 (R)，切向 (A) 和法向 (C) 以及拟合 URE 的时间序列（拟合时间长度：20 min，30 min）

图 4.6 展示了 3 个真实低轨卫星的广播星历拟合精度。与之前的仿真实验结果类似，轨道高度越高，拟合精度越高。尽管这些真实的低轨卫星轨道偏心率非常小，仍然能成功拟合广播星历参数。至于拟合时间长度的影响，当拟合时间长度不超过 20 min 时，对于这 3 种低轨卫星，拟合 URE 的 RMS 统计值不超过 4 cm。图 4.7 展现了低轨卫星 Jason-2 的拟合误差时间序列。当拟合时间长度为 20 min 时，在径向、切向与法向拟合误差不超过 $\pm 6.5$  cm，拟合 URE 优于 5.1 cm。当拟合时间长度为 30 min 时，在径向、切向与法向拟合误差不超过 $\pm 39$  cm，而拟合 URE 不超过 31 cm。与 3.5.5 节的轨道根数型广播星历拟合结果相比，拟合时间长度为 20 min 时拟合精度相当，但当拟合时间长度延长至 30 min 时，矢量积分型广播星历拟合精度下降更明显。这说明矢量积分型广播星历不适合长时间轨道描述。

## 4.4 矢量积分型与轨道根数型广播星历比较

基于矢量积分型与轨道根数型广播星历，分别设计了适合于低轨卫星的广播星历模型。本节在轨道倾角，轨道偏心率，轨道高度，拟合时间长度这几个方面对这两种类型的广播进行对比分析，总结各自的特点。轨道根数型与矢量积分型广播星历分别采用第三章与本章最优方案。

### 4.4.1 轨道倾角

本节将轨道偏心率设置为 0.001，轨道高度为 1000 km，轨道倾角从  $0^\circ$  变化至  $90^\circ$ ，以探究轨道倾角对于拟合精度的影响。使用 STK 软件仿真低轨卫星精密星历，用于拟合广播星历参数。图 4.8 展示了随着轨道倾角的变化，对轨道根数型与矢量积分型广播星历拟合结果影响的对比。从中可以发现：

- (1) 矢量积分型广播星历与基于第二类无奇点改进根数设计的轨道根数型广播星历，都能克服由于轨道倾角引起的奇异问题。在各种轨道倾角情形，两者都能成功拟合相应参数；
- (2) 当拟合时长为 20 min 时，两者拟合精度差异不大，拟合精度差异基本在毫米级。但是当拟合时间长度为 30 min 时，矢量积分型广播星历拟合精度下降更明显。这说明轨道根数型广播星历在长时间轨道运动学描述方面优势比较明显；
- (3) 矢量积分型广播星历在轨道倾角较大时，拟合精度较差。这是因为在描述 Z 方向的运动状态的参数较少。如果星地间数据传输资源允许，可以考虑

在 Z 方向增加相应参数。

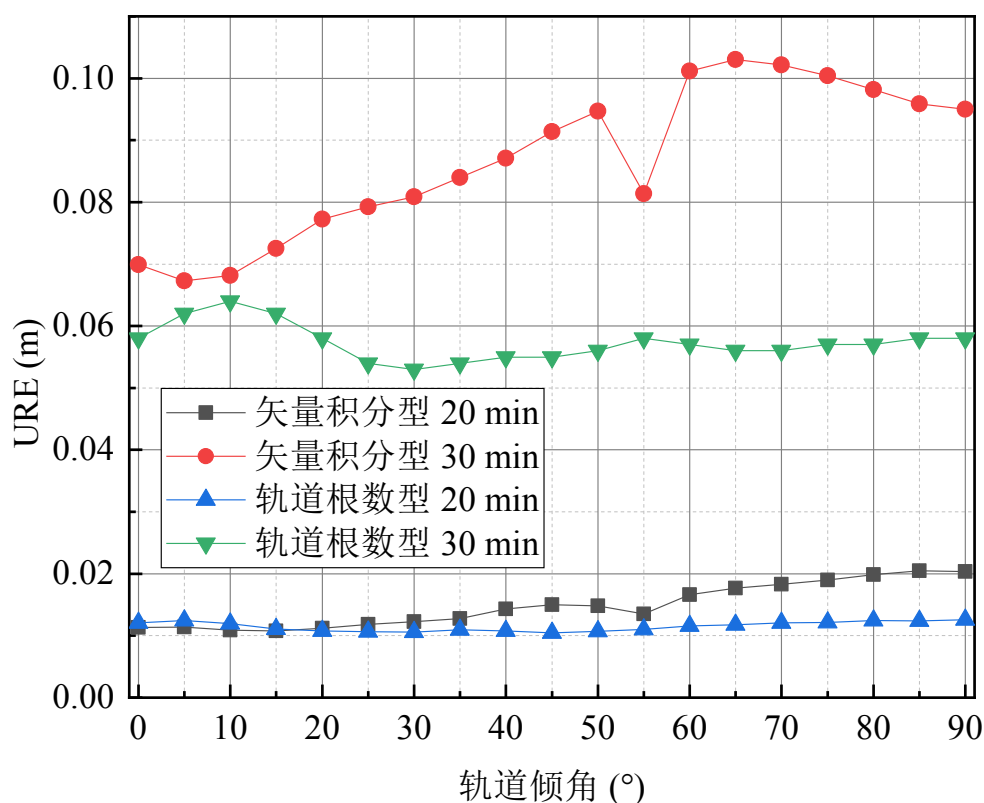


图 4.8 轨道倾角对于矢量积分型与轨道根数型广播星历拟合精度的影响（拟合时间长度：20 min，30 min；单位：m）

#### 4.4.2 轨道偏心率

本节将轨道偏心率设置为0.001,轨道高度为1000 km,轨道倾角设置为 $45^{\circ}$ ,轨道偏心率从0.001变化至0.030,以探究轨道偏心率对于拟合精度的影响。同样,使用STK软件仿真低轨卫星精密星历,用于拟合广播星历参数。图4.9展示了随着轨道偏心率的变化对于轨道根数型与矢量积分型广播星历拟合结果影响的差异。从中可以发现:

- (1) 当拟合时间长度为20 min时,矢量积分型与轨道根数型广播星历的拟合精度差异不大,差异在5 mm以内。当轨道偏心率较小时,轨道根数型广播星历拟合精度略好,但是随着轨道偏心率的增大,矢量积分型广播星历的拟合精度逐渐逼近,甚至优于轨道根数型广播星历的拟合精度;
- (2) 当拟合时间延长至30 min时,两种类型的广播星历拟合精度都有了较大幅度的降低;在轨道偏心率较小时,轨道根数广播星历拟合精度明显更高。但是,当轨道偏心率大于0.015时,轨道根数型广播星历拟合精度,急剧

降低。矢量积分型广播星历的拟合精度，仍然比较平稳。因此，矢量积分型广播星历对于偏心率较大的轨道适应能力更强。

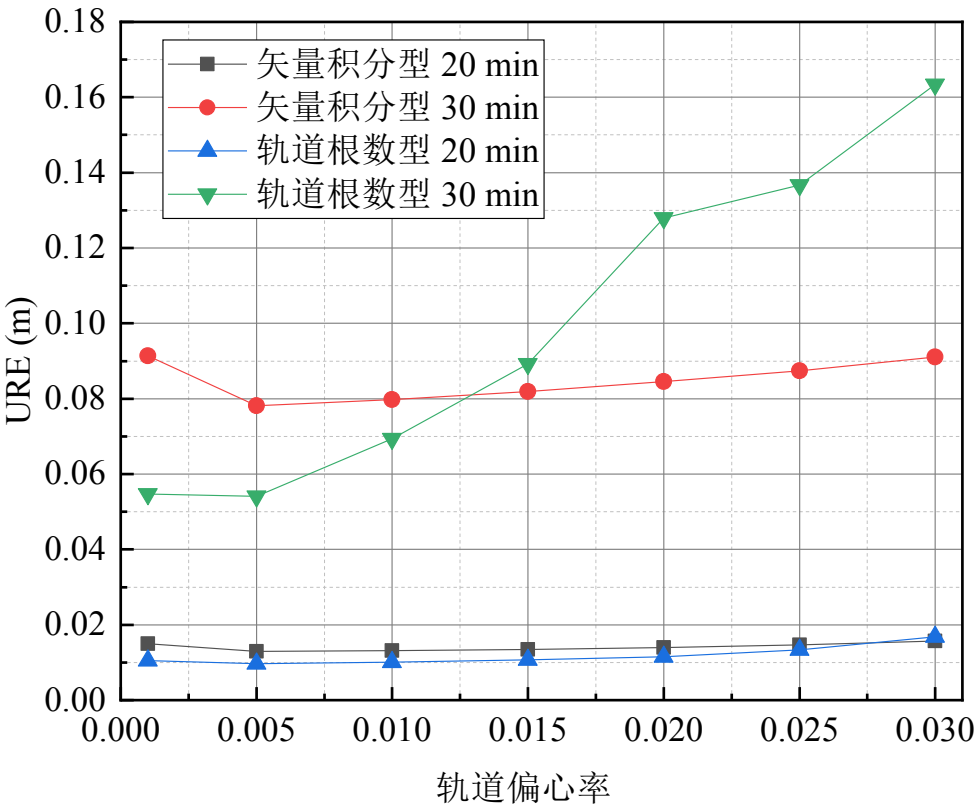


图 4.9 轨道偏心率对矢量积分型与轨道根数型广播星历拟合精度的影响（拟合时间长度：20 min，30 min；单位：m）

### 4.4.3 轨道高度

本节将轨道偏心率设置为 0.001，轨道倾角设置为  $45^\circ$ ，轨道高度从 600 km 变化至 1400 km。以探究轨道高度对于拟合精度的影响。同样，使用 STK 软件仿真低轨卫星精密星历，用于拟合广播星历参数。图 4.10 展示了轨道高度对于两种广播星历模型拟合精度的影响。从中可以看出：

- （1）当拟合时间长度为 20 min 时，矢量积分型与轨道根数型广播星历都可以满足拟合 URE 精度在 10 cm 以内的要求。随着轨道高度的增高，拟合精度都有提高。当轨道高度较低时，轨道根数型广播星历拟合精度略高，而当轨道高度高于 1000 km 及以上时，两者拟合精度相当；
- （2）当拟合时间长度为 30 min 时，轨道根数型广播星历的拟合精度更高。轨道高度在 1000 km 以上时，二者都能满足拟合 URE 不超过 10 cm 的要求。总之，轨道高度对这两种广播星历拟合精度都有影响，特别是当拟合

时间长度较短，轨道高度越高时，拟合精度提升也越明显。

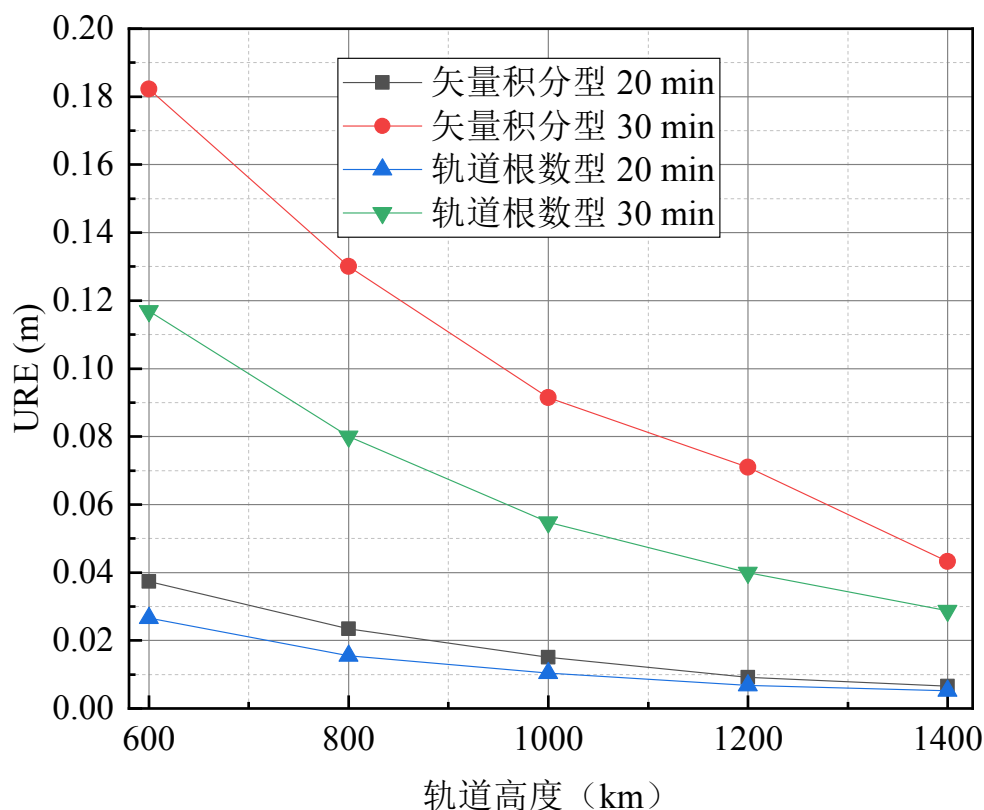


图 4.10 轨道高度对矢量积分与轨道根数型广播星历拟合精度的影响

#### 4.4.4 拟合时间长度

图 4.8 至图 4.10 展示了拟合时间长度，在不同情形下对于矢量积分型与轨道根数型广播星历的影响。从这些图中可以看出：拟合时间长度，对广播星历拟合精度有着明显影响。在各个拟合情形中，随着拟合时间长度的增加，星历拟合精度都有着不同程度的下降。这是因为低轨卫星运动状态非常复杂，如果拟合时间过长，则难以精确描述卫星运动状态。除了轨道偏心率较大，拟合时间长度为 30 min 的情形之外，总体上观察，轨道根数型广播星历拟合长时间跨度精密轨道数据时拟合精度更高。

### 4.5 本章总结

本章设计了适用于低轨卫星的矢量积分型广播星历。所构建的增强矢量积分型广播星历模型的可靠性，用仿真的与真实的低轨卫星精密星历进行了验证。全面考虑了，数值积分方法、数值积分步长、轨道倾角与偏心率、拟合时间长度和

轨道高度这几个因素，对于广播星历拟合精度的影响。实验结果表明：随着轨道高度的提高，广播星历的拟合精度也明显提高；拟合时间长度缩短，拟合精度也会提高；受益于矢量积分型广播星历良好的无奇异特性，能够完全克服奇点问题的影响。

对于矢量积分与轨道根数型广播星历进行了比较分析。两种类型广播星历，在拟合时间长度为 20 min 时，对于 600 km 至 1400 km 的低轨卫星都能满足拟合 URE 在 10 cm 以内的要求。当拟合时间长度为 30 min 时，除了在轨道偏心率较大，拟合时间长度为 30 min 的情形之外，轨道根数型广播星历更适合较长时间轨道运动学描述。虽然现阶段矢量积分型广播星历，对于长时间精密轨道拟合能力较差，但是用户如果有条件进行精密轨道外推，则根据矢量积分型广播星历计算得到的卫星位置还能提高。此外，在拟合过程中发现，对于轨道根数型广播星历，平均需要 7 至 8 次迭代才能拟合成功。而对于矢量积分型广播星历，平均只需要迭代 3 至 4 次便可以拟合成功。这说明矢量积分型广播星历具备更优的无奇异特性。



## 第5章 基于扩展的概率模型评估星座性能

前几章关于低轨卫星广播星历设计的讨论,更多是在探究卫星与用户之间的测距问题。除了测距问题,在实现低轨卫星增强 GNSS 的过程中,采用合理的星座设计方案,使得卫星与用户之间形成良好的空间构型也是实现高质量定位的重要前提之一。本章介绍了使用概率模型评估卫星导航星座性能的方法。该方法只需一些基本的星座参数,便可以评估卫星导航星座在全球范围内的卫星可见性与各类 DOP 值的分布情况。此外,使用概率模型,本章还探讨了椭圆轨道卫星,作为一种新的潜在的星基增强方式在未来的卫星导航系统发展中,搭配高、中和低轨卫星时可能起到的作用。同时,对于 QZO 与 IGSO 卫星在空间构型分布的特点也进行比较分析。最后,对未来可能包含的 MEO、IGSO、GEO、低轨与椭圆轨道卫星构成的 GNSS+星座设计方案的实用性进行分析。

### 5.1 扩展的概率模型

传统方法估计卫星可见性与 DOPs ((geometric DOP, GDOP), (horizontal DOP, HDOP), (position DOP, PDOP), (time DOP, TDOP) 和 (vertical DOP, VDOP)) 值时,通常需要使用真实的或者仿真的精密星历<sup>[119-121]</sup>。Wang 等<sup>[115]</sup>首先提出使用概率模型评估 GPS 星座的性能。王解先等<sup>[157]</sup>使用概率模型评估了 Galileo/GPS 组合系统与 GPS 单系统的实用性进行了比较分析。陈俊平等<sup>[122]</sup>使用概率模型计算低轨卫星星载接收机观测到的 GNSS 卫星 DOP 值。但他们所提出的概率模型仅仅适用于 MEO 卫星。为了将其扩展至 IGSO 与 GEO 卫星,Wang 等<sup>[114]</sup>提出了优化的概率模型。本节通过总结之前的概率模型,提出扩展的概率模型<sup>[158]</sup>。

在之前的概率模型中<sup>[114,115]</sup>,用户在地球椭球某个地点所能观测到的天空,以经度和纬度被划分为  $1^\circ \times 1^\circ$  的网格,根据每颗卫星在网格内出现的概率可以确定可见卫星数量。对于在地球椭球表面上的某个地点,卫星的可见数量是在该地点可见天空范围内,所有可见卫星概率的总和<sup>[115]</sup>。在计算在该地点的 DOPs 值时,这些卫星可能出现的概率被当作权重因子。根据这些 DOPs 值,就可以评估卫星导航星座的卫星可见性与空间几何分布情况。值得注意的是:卫星的轨道倾角,决定着卫星可能在天空中出现的纬度范围。也就是说,卫星出现在比轨道倾角还高的纬度之上的概率是零。考虑到原始的概率模型只适用于运行在圆轨道上

的卫星，本章扩展并优化概率模型，使其适用于类似 QZSS 的在椭圆轨道运行的 QZO 卫星与北斗的 IGSO 卫星。

### 5.1.1 MEO 与低轨卫星出现概率

在低轨卫星广播星历设计章节曾提到，低轨卫星的轨道偏心率非常小。在 2.4.6 节，通过计算 GPS 卫星每颗卫星的轨道偏心率，发现 GPS 所使用的 MEO 卫星也基本在近圆轨道上运行。在这种情况下，之前的概率模型是有效的。当纬度为  $\varphi$  与经度为  $\lambda$  时，记为  $(\varphi, \lambda)$ ，卫星在东西方向上的速度  $V_\lambda$  和在南北方向上的速度  $V_\varphi$  可表示为<sup>[115]</sup>：

$$\begin{cases} V_\lambda = \sqrt{\frac{GM}{R}} \cdot \frac{\cos i_{orb}}{\cos \varphi} \\ V_\varphi = \sqrt{\frac{GM}{R}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\cos i_{orb}}{\cos \varphi}\right)^2} \end{cases} \quad (5.1)$$

其中， $R$  为卫星矢量的模长； $i_{orb}$  为卫星轨道倾角； $\varphi$  为大地纬度； $\lambda$  为大地经度。

如式(5.1)所示，卫星在某个网格内出现的速度，仅仅与纬度有关。所以，对于处在同一个纬度上的卫星， $V_\varphi$  是相同的。由于 GNSS 星座在设计上，卫星在东西方向是对称分布的<sup>[115]</sup>。因此，卫星出现的概率只由  $V_\varphi$  决定。卫星在某个网格内可能出现概率的优化计算方法可以表示为<sup>[114]</sup>：

$$P^{M/L} = \begin{cases} \frac{k}{V_\varphi} = \sqrt{\frac{R}{GM}} \frac{k \cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 i_{orb}}}, & |\varphi| < i_{orb} \\ 0, & |\varphi| \geq i_{orb} \end{cases} \quad (5.2)$$

其中， $k$  是适用于 MEO 或者低轨卫星星座的概率常数。上标  $M/L$  表示 GNSS 的 MEO 或者低轨卫星。

用户在地球椭球某点所能观测的天空被划分为  $1^\circ \times 1^\circ$  的网格，每个网格的坐标  $(\varphi_i, \lambda_j)$  可表示为：

$$\begin{cases} \varphi_i = i - 0.5 & i = -89, -88, \dots, 90 \\ \lambda_j = j - 0.5 & j = -180, -179, \dots, 180 \end{cases} \quad (5.3)$$

而概率常数  $k$  可以确定为：

$$k = \frac{n}{\sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} \frac{1}{V_{\varphi}}} \quad (5.4)$$

其中,  $n$  表示 GNSS 星座中 MEO 或者低轨卫星的总数量。

### 5.1.2 GEO 与 IGSO 卫星出现概率

在 ECEF 坐标系统, GEO 卫星理论上相对于地球是静止的。因此, 北斗三号星座的 3 颗 GEO 卫星应该分别分布在东经  $80^\circ$ ,  $110.5^\circ$  和  $140^\circ$  静止不动<sup>[159]</sup>。所以, 在理论上, GEO 卫星在特定点出现的概率是 1, 在非特定点出现的概率是 0。那么 GEO 卫星概率计算函数可以写为:

$$P_{(X,Y,Z)}^{GEO} = \begin{cases} 1, (X,Y,Z) \in P \\ 0, other\ positions \end{cases} \quad (5.5)$$

其中,  $P$  表示某颗 GEO 卫星被设计的定点出现位置。

对于 IGSO 卫星, 其星下点轨迹是一条封闭的曲线。比如北斗三号的 3 颗 IGSO 卫星, 在星座设计上, 它们的星下点轨迹是重合的, 交点位于赤道东经  $118^\circ$ , 三颗卫星的相位差为  $120^\circ$ <sup>[160]</sup>。当真近点角  $f$  每转过一定角度时, 便可以计算该卫星在 ECEF 坐标系统中的坐标, 当真近点角转过一周时, 对于 IGSO 卫星而言, 在一个地球自转周期内, 所有的可能出现的卫星坐标都可以被计算得到, 这些卫星空间坐标组成的集合被称为  $B$ 。对于 IGSO 卫星, 当真近点角从  $0^\circ$  转至  $360^\circ$  时, 在一个地球自转周期内, 卫星所有可能在 ECEF 坐标系中出现的空间坐标及其相应的速度都可以被计算得到。考虑到计算效率与精度这两个方面的因素, 当真近点角  $f$  每转过  $0.25^\circ$  时, 便计算一个点<sup>[114]</sup>。然后, 基于概率模型思想, IGSO 卫星在集合  $B$  中的某个点出现的概率可以根据速度确定。综上所述, IGSO 卫星在集合  $B$  中的某个点出现概率的优化计算方式为<sup>[158]</sup>:

$$P_{(X,Y,Z)}^{IGSO} = \begin{cases} \frac{k^{IGSO}}{V_{(X,Y,Z)}^{IGSO}}, (X,Y,Z) \in B \\ 0, other\ positions \end{cases} \quad (5.6)$$

其中,  $V_{(X,Y,Z)}^{IGSO}$  是 IGSO 卫星在  $B$  中某点出现时对应的在 ECEF 坐标系统中的速度;  $k^{IGSO}$  是针对 IGSO 卫星的概率常数, 可以使用下方公式计算:

$$k^{IGSO} = \frac{n^{IGSO}}{\sum_{(X,Y,Z) \in B} \frac{1}{V_{(X,Y,Z)}^{IGSO}}} \quad (5.7)$$

其中,  $n^{IGSO}$  是具有相同星下点轨迹的 IGSO 卫星的数量。  $V_{(X,Y,Z)}^{IGSO}$  可以通过如下方式计算: 首先根据真近点角  $f$  可以计算 IGSO 卫星在 ECEF 坐标系中的坐标; 然后, 卫星在 X, Y 和 Z 分量 ECEF 坐标系中的速度  $V_X$ ,  $V_Y$ , 和  $V_Z$  可以计算为:

$$\begin{cases} V_X = \frac{X_{t+\Delta t} - X_t}{\Delta t} \\ V_Y = \frac{Y_{t+\Delta t} - Y_t}{\Delta t} \\ V_Z = \frac{Z_{t+\Delta t} - Z_t}{\Delta t} \end{cases} \quad (5.8)$$

其中,  $t$  为某个历元; X, Y 和 Z 为在历元  $t$  或者  $t + \Delta t$  的 ECEF 坐标系中的坐标;  $\Delta t$  为卫星从一个点飞向另一个点所需要的时间。那么,  $V_{(X,Y,Z)}$  在这个点的速度为:

$$V_{(X,Y,Z)}^{IGSO} = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2} \quad (5.9)$$

在本节, 使用优化的概率计算方式, 研究了北斗三号 3 颗 IGSO 卫星的概率分布。从图 5.1 中可以看到, 在 IGSO 卫星“8”字型星下点轨迹的南北两端 (也即: 星下点轨迹“留”的附近), 卫星出现的概率更大, 与 Wang 等<sup>[14]</sup>相应的结果相比更接近真实情况。

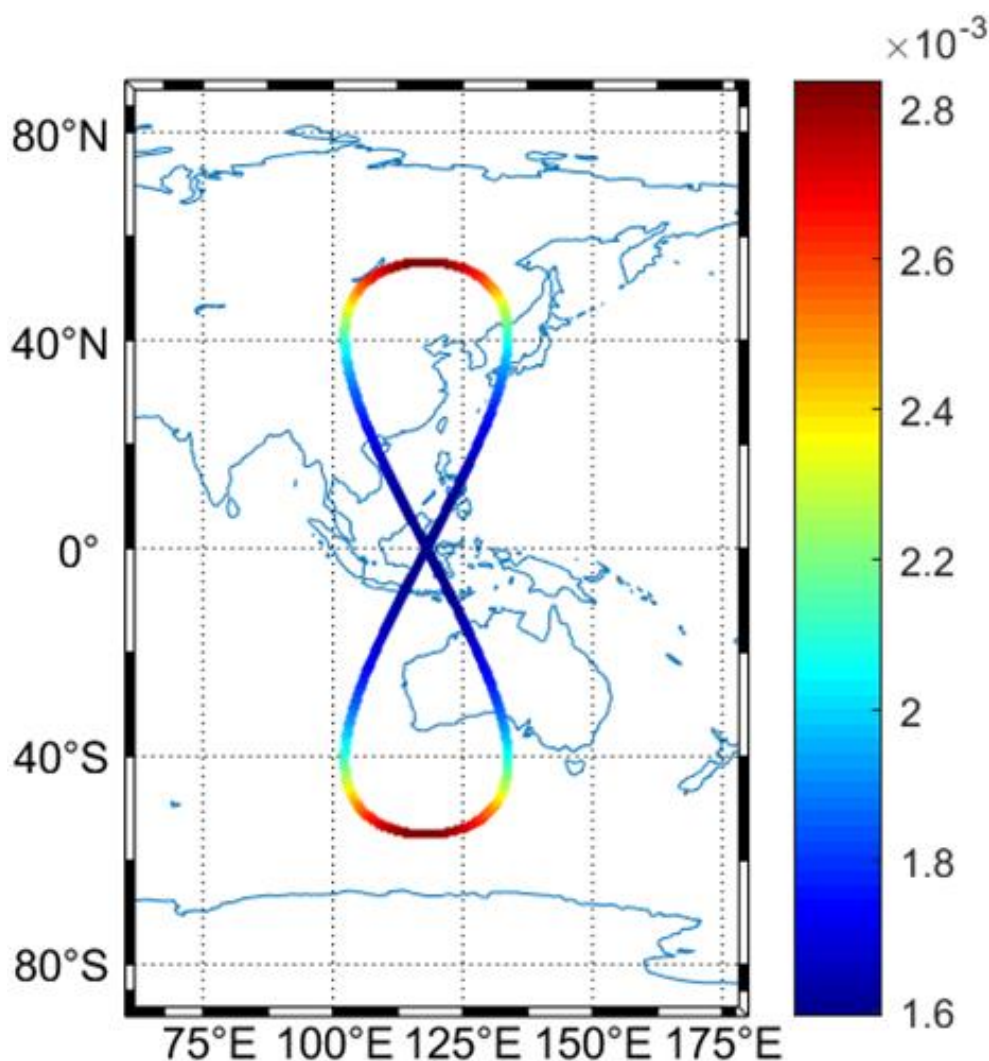


图 5.1 北斗三号系统 3 颗 IGSO 卫星观测概率分布情况

### 5.1.3 椭圆轨道卫星出现概率

MEO、GEO、IGSO 和低轨卫星都在近圆轨道上运行，所以卫星的位置与速度的大小，在各个时刻都近似相等，这也是之前的概率模型能够应用的重要前提<sup>[114,115]</sup>。然而，一些运行在特殊轨道的卫星，其轨道偏心率比较大，比如日本 QZSS 的 QZO 卫星<sup>[161]</sup>。QZO 卫星的轨道偏心率大约为 0.075，而大部分 GPS 卫星轨道偏心率要小于 0.01。为了评估处于椭圆轨道上的卫星对于卫星可见性与空间构型起到的作用，需要对传统的概率模型进行改进。为达到这个目的，关键在于计算卫星在 ECEF 坐标系统的出现的空间坐标及其相应的速度。因此，有以下几个问题需要注意：（1）卫星与地球的距离总是在变化；（2）卫星从一个点飞向邻近点所需要的时间并不总是相同；（3）卫星速度的大小，一直都在改变。

对于问题（1），卫星与地球的距离可以使用如下公式计算<sup>[94,158]</sup>：

$$R = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \quad (5.10)$$

其中， $e$  表示轨道偏心率； $a$  为轨道半长轴。从式(5.10)可以看到卫星与地球的距离是关于真近点角  $f$  的函数。

对于问题（2），根据开普勒第二定律，卫星在单位时间内扫过的面积相同，也就是说，在二体问题中，卫星的面积速度是常数。那么面积速度  $\dot{A}$  可表示为：

$$\dot{A} = \frac{\sqrt{aGM(1-e^2)}}{2} \quad (5.11)$$

因此，对于在椭圆轨道上运行的卫星，从某个点飞向邻近点所需要的时间，可以通过这段时间内卫星扫过的面积  $A$  除以面积速度计算得到，即： $A / \dot{A}$ 。如果，真近点角  $f$  仅仅转过微小的角度，那么卫星扫过的区域可以近似看作为扇形。此时，这个微小区域的面积， $dA$ ，可以通过下面的公式进行计算：

$$dA = \frac{1}{2} R^2 df = \frac{1}{2} \left( \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \right)^2 df \quad (5.12)$$

其中， $df$  为真近点角转过的微小量。那么在整个区间，对真近点角  $f$  进行积分，便可以确定整个区域的面积，如(5.13)式所示，积分区间为  $[f, f+0.25^\circ]$ 。

$$A = \frac{1}{2} \int_f^{f+0.25^\circ} \left( \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \right)^2 df \quad (5.13)$$

然而，采用牛顿-莱布尼茨公式进行积分计算是非常困难的。因此，考虑使用数值计算的方法。把积分区间  $[f, f+0.25^\circ]$  平均分成 10000 个小区间。那么，式(5.13)可以近似计算为<sup>[158]</sup>：

$$A \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10000} \left( \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(f+0.000025i)} \right)^2 (f+0.000025i) \quad (5.14)$$

那么对于运行在椭圆轨道上的卫星，从一个点飞向另一个点所需要的时间， $\Delta t$ ，可计算为：

$$\Delta t \approx \frac{A}{\dot{A}} \quad (5.15)$$

当  $\Delta t$  确定之后, 便可以确定卫星在 ECEF 某点速度。卫星在轨道平面直角坐标系内的坐标可以用如下公式计算:

$$\begin{cases} \eta_f = R \cos f \\ \xi_f = R \sin f \end{cases}, f = 0, 0.25, \dots, 360, \dots \quad (5.16)$$

其中,  $\eta$  为指向升交点,  $\xi$  与  $\eta$  垂直。

卫星在轨道坐标系内坐标, 可以转换至 ECEF 坐标系:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} = R_3(-\Omega_i) R_1(-i_{orb}) \begin{pmatrix} \eta_i \\ \xi_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

其中,  $R_3(-\Omega_i)$  和  $R_1(-i_{orb})$  为旋转矩阵, 可分别根据式(5.18)和(5.19)计算:

$$R_3(-\Omega_i) = \begin{pmatrix} \cos \Omega_i & -\sin \Omega_i & 0 \\ \sin \Omega_i & \cos \Omega_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

$$R_1(-i_{orb}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_{orb} & -\sin i_{orb} \\ 0 & \sin i_{orb} & \cos i_{orb} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

其中,  $\Omega_i$  为升交点赤经, 如式(5.20)所示:

$$\Omega_i = (\Omega_0 - \Delta t \cdot \omega_{earth}) \frac{\pi}{180^\circ} \quad (5.20)$$

其中,  $\Omega_0$  为在初始时刻的升交点赤经;  $\omega_{earth}$  为地球自转角速度。 $\Delta t$  可以根据式(5.15)计算。这样就计算得到椭圆轨道卫星在一个地球自转周期内经过的空间坐标, 并把这些点构成的集合记为  $\Gamma$ 。

至于问题(3), 在 ECEF 坐标系中每个点速度, 可以根据式(5.8)和(5.9)计算。

最后, 椭圆轨道卫星在  $\Gamma$  的某个点出现的概率, 可以用式(5.21)计算:

$$P_{(X,Y,Z)}^{EO} = \begin{cases} \frac{k^{EO}}{V_{(X,Y,Z)}^{EO}}, (X,Y,Z) \in \Gamma \\ 0, other\ positions \end{cases} \quad (5.21)$$

其中，上标  $EO$  表示具有相同星下点轨迹的，运行在椭圆轨道上的卫星； $k^{EO}$  为与具有相同星下点轨迹的椭圆轨道卫星对应的概率常数，可以根据式(5.22)计算：

$$k^{EO} = \frac{n^{EO}}{\sum_{(X,Y,Z) \in \Gamma} \frac{1}{V_{(X,Y,Z)}^{EO}}} \quad (5.22)$$

其中， $n^{EO}$  为具有相同星下点轨迹的椭圆轨道卫星的总数； $V_{(X,Y,Z)}^{EO}$  为椭圆轨道卫星运行到  $\Gamma$  中的某个点时，在 ECEF 坐标系统中的速度。

综上所述，3 颗 QZO 卫星的概率分布如图 5.2 所示。本文 QZO 卫星的轨道偏心率设置为 0.075，轨道倾角与星下点轨迹的中心经度与北斗三号系统的 IGSO 卫星保持一致。从概率分布图可以看到，在星下点轨迹的北端，卫星出现的概率更高。这与图 5.1 展示的北斗三号系统 IGSO 卫星的概率分布非常不一样。这是因为：在星下点轨迹的北端，卫星正处于远地点，此时卫星运行速度比较慢，卫星在此处出现的概率也就更大。



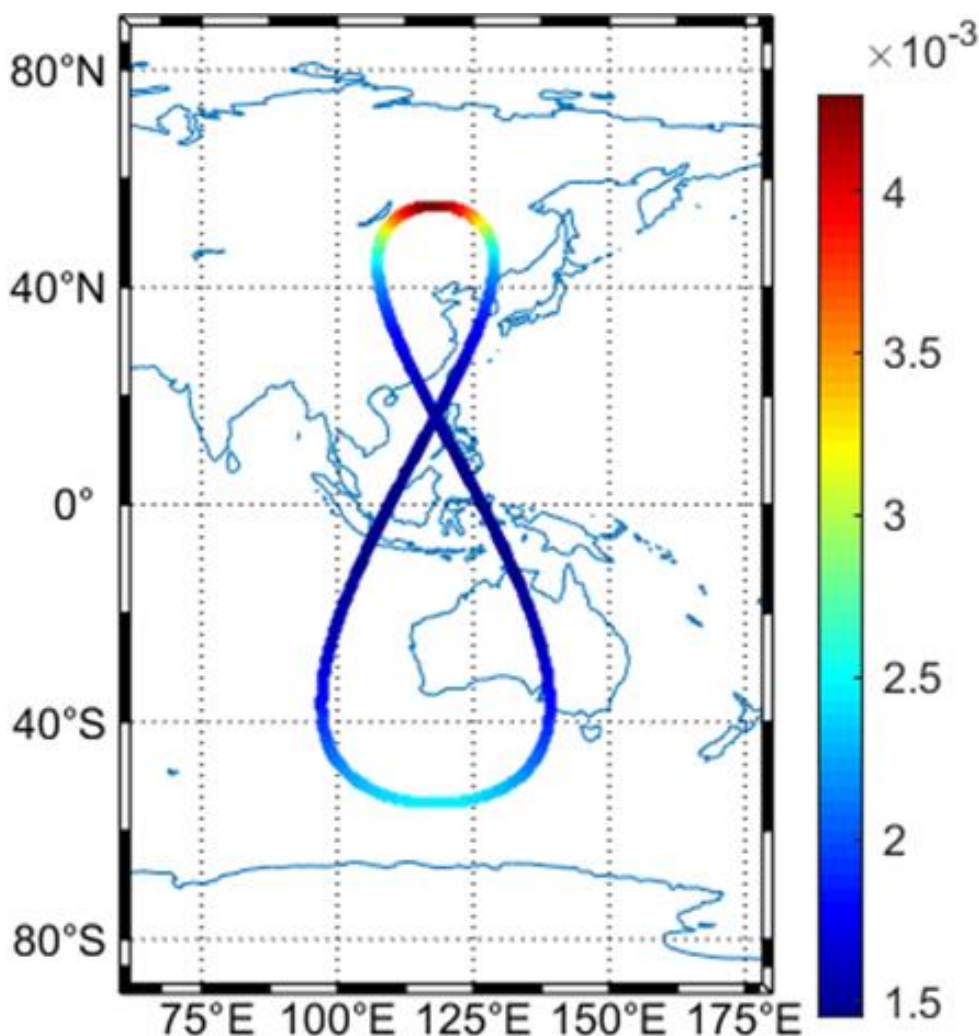


图 5.2.3 颗 QZO 卫星的观测概率分布

#### 5.1.4 DOPs 值与卫星可见性的计算

当卫星出现在截止高度角之上时，便可以为用户看到。为了确保以较高的精度估计卫星可见性与 DOPs 值，把截止高度角设置为  $5^\circ$  比较合适<sup>[114]</sup>。对于每一个用户可以看到的网格，我们都计算卫星可能在这个网格出现的概率。那么，可见卫星的数量可以通过式(5.23)计算：

$$N = \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij}^{MEO} + \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij}^L + \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij}^{EO} + \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij}^{IGSO} + \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij}^{GEO} \quad (5.23)$$

某颗卫星形成的观测方程可以写为<sup>[4]</sup>:

$$v = \begin{pmatrix} e_x & e_y & e_z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \\ c\delta t \end{pmatrix} - l \quad (5.24)$$

其中,  $e_x$ ,  $e_y$  和  $e_z$  卫星-测站向量的单位向量;  $v$  是残差;  $c\delta t$  是接收机钟差改正数;  $l$  是观测向量;  $\delta X$ ,  $\delta Y$  和  $\delta Z$  相对于测站初值坐标的改正值。在概率模型中, 每一个可以被观测到的网格或者空间点, 都可以根据对应的卫星出现概率构建观测方程。那么对于在地球椭球上的任意地点, 法方程的系数矩阵可以写为<sup>[115]</sup>:

$$Nbb = \begin{pmatrix} \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij} e_x^2 |_D & \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij} e_x e_y |_D & \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij} e_x e_z |_D & \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij} e_x |_D \\ & \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij} e_y^2 |_D & \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij} e_y e_z |_D & \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij} e_y |_D \\ & & \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij} e_z^2 |_D & \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij} e_z |_D \\ \text{symmetry} & & & \sum_{i=-89}^{90} \sum_{j=-180}^{180} P_{ij} |_D \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

其中,  $D$  是可被用户观测到的点或者网格。

对根据式(5.25)计算得到的法方程进行求逆运算, 便可以得到方差协方差矩阵  $Q$ :

$$Q = Nbb^{-1} \quad (5.26)$$

根据 GDOP 的定义, 方差协方差矩阵  $Q$  的迹的平方根便是 GDOP 的值。笛卡尔空间坐标可以转换为测站坐标系中的坐标: 北 (N)、东 (E) 和高 (U)。如式(5.27)所示:

$$\begin{pmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \\ c\delta t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(X \ Y \ Z)}{\partial(U \ E \ N)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta U \\ \delta E \\ \delta N \\ c\delta t \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \delta U \\ \delta E \\ \delta N \\ c\delta t \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial(X \ Y \ Z)}{\partial(U \ E \ N)} = R_3(-L)R_2(B) \quad (5.28)$$

其中,  $R_3(-L)$ 和 $R_2(B)$ 是旋转矩阵, 可以分别根据式(5.29)和(5.30)计算:

$$R_3(L) = \begin{pmatrix} \cos(L) & \sin(L) & 0 \\ -\sin(L) & \cos(L) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

$$R_2(-B) = \begin{pmatrix} \cos(-B) & 0 & -\sin(-B) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(-B) & 0 & \cos(-B) \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

那么法方程可以写为:

$$N_{BLh} = S^T N_{bb} S \quad (5.31)$$

再根据方差传播定律, 方差协方差矩阵  $Q_{UEN}$  可以写为:

$$Q_{UEN} = (S^T N S)^{-1} \quad (5.32)$$

所以, 根据相关定义, DOPs 值可以计算为:

$$\begin{cases} PDOP = \sqrt{Q_{UEN}(1,1) + Q_{UEN}(2,2) + Q_{UEN}(3,3)} \\ HDOP = \sqrt{Q_{UEN}(2,2) + Q_{UEN}(3,3)} \\ VDOP = \sqrt{Q_{UEN}(1,1)} \\ TDOP = \sqrt{Q_{UEN}(4,4)} \\ NDOP = \sqrt{Q_{UEN}(3,3)} \\ EDOP = \sqrt{Q_{UEN}(2,2)} \end{cases} \quad (5.33)$$

根据式(5.33)所展示的各 DOP 值之间的关系, 大地高与接收机钟差之间的关系  $\rho_{Uclk}$  可表示为:

$$\rho_{Uclk} = \frac{Q_{UEN}(1,4)}{\sqrt{Q_{UEN}(1,1)}\sqrt{Q_{UEN}(4,4)}} \quad (5.34)$$

另外, 南北方向与东西方向定位精度的比值可以表示为:

$$NE = \frac{\sqrt{Q_{UEN}(3,3)}}{\sqrt{Q_{UEN}(2,2)}} \quad (5.35)$$

总之,根据用户在地球椭球上任意地点,所有能观测到的网格或者空间点位,并把卫星在这些位置可能出现的概率作为权重,可以建立观测方程。GNSS+星座的法方程可以表示为:

$$N_{bb}^{GNSS+} = N_{bb}^{MEO} + N_{bb}^L + N_{bb}^{GEO} + N_{bb}^{IGSO} + N_{bb}^{EO} \tag{5.36}$$

其中,  $N_{bb}^{MEO}$ ,  $N_{bb}^L$ ,  $N_{bb}^{GEO}$ ,  $N_{bb}^{IGSO}$  和  $N_{bb}^{EO}$  可以参照式(5.25)计算。

5.2 概率模型的验证

为了对概率模型进行验证,用德国地学研究中心发布的事后精密星历与北斗三号+QZO 仿真星座的精密星历,在全球范围内,计算 24 h 卫星可见数量的平均值与 DOPs 值。GPS 星座与北斗三号+QZO 星座的详细信息如表 5.1 所示。

表 5.1 GPS 星座与北斗三号+QZO 星座的详细信息<sup>[4,159,161]</sup>

参数	北斗三号+QZO			GPS
轨道类型	MEO	QZO	GEO	MEO
设计数量	24	3	3	32
轨道倾角	55°	55°	0°	55°
轨道高度(km)	21528	38950.6 (远地点)	35786	20200
轨道周期(s)	46404	86170.5	86170.5	43080

将截止高度角设置为 5° , 用概率模型计算得到的估计值与根据精密星历计算得到的参考值如图 5.3 所示。经过统计发现,使用概率模型,对于 GPS 星座,参考值与估计值之间差异的均方根误差统计值为 0.10;对于北斗三号+QZO 星座,参考值与估计值之间的差异为 0.05。估计值与参考值之间的差异,在高纬度地区稍大一些。

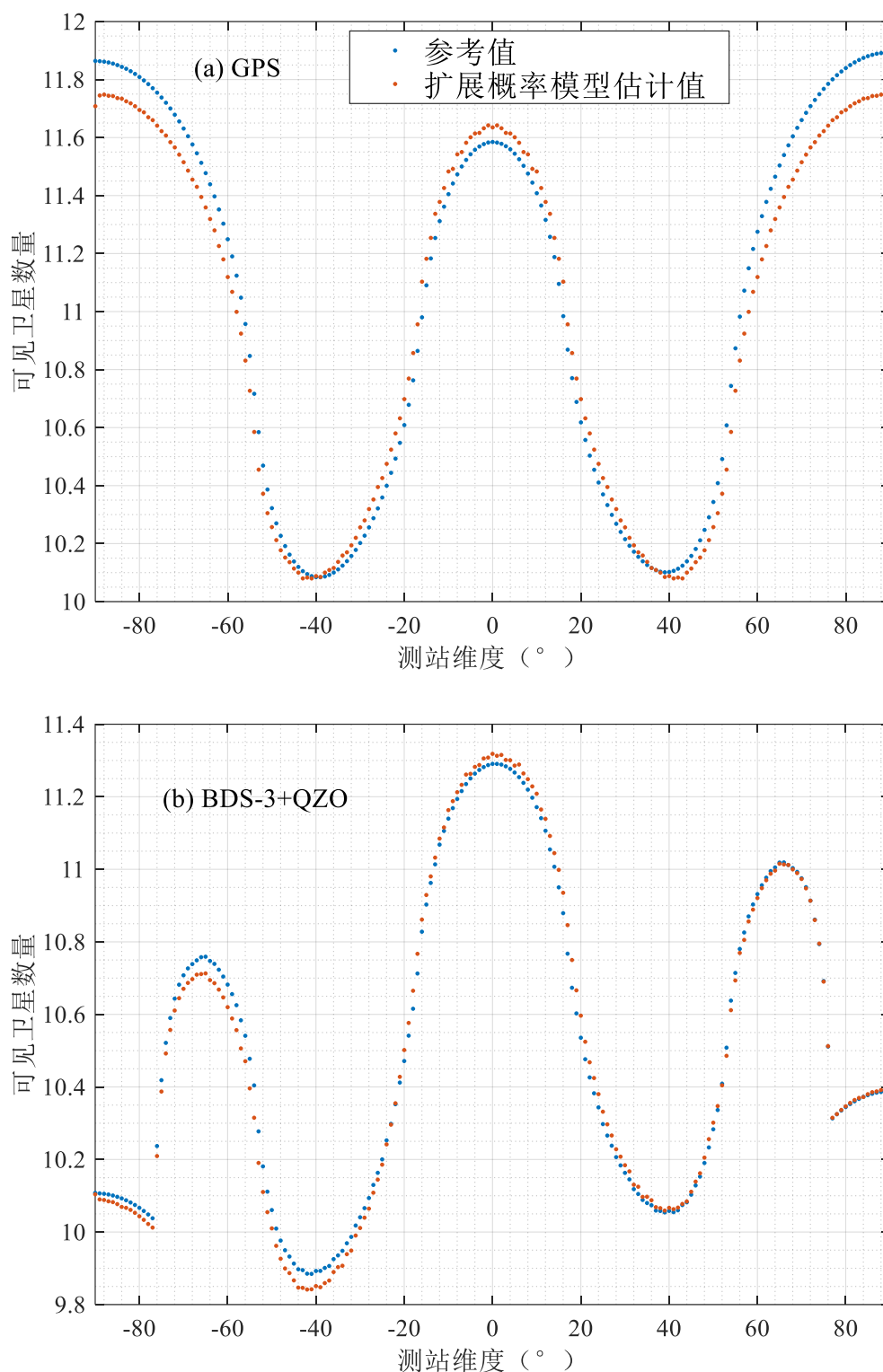


图 5.3 32 颗卫星 GPS 卫星与北斗三号 (BDS-3)+QZO 星座 30 颗卫星可见数量的估计值与参考值之间的差异 (高度角设置为  $5^\circ$ )。图 a 表示 GPS 星座 32 颗卫星的情况; 图 b 表示北斗三号+QZO 星座的情况

在截止高度角设置为  $5^\circ$  的情况下, 对于 GPS 星座与北斗三号+QZO 星座估

计 DOPs 的精度也进行了评估，统计结果如表 5.2 所示。相对于参考值，估计的平均误差为 7.95% - 11.07%。

表 5.2 GPS 与北斗三号+QZO 星座相对于 DOP 值的参考值估计误差的平均值，最小值和最大值（(参考值-估计值)/参考值×100%）

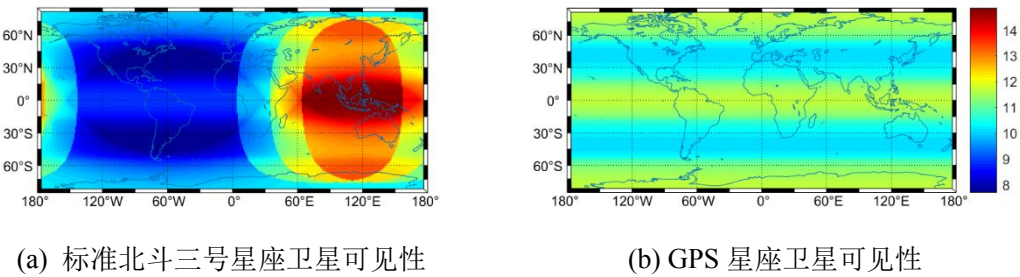
星座	DOPs 值估计误差 (%)			
	平均值.(最小值 ~ 最大值)			
	GDOP	PDOP	HDOP	VDOP
GPS	10.41(5.06~13.10)	9.85(4.58~12.40)	7.98(3.96~10.63)	10.33(4.64~13.03)
北斗 3 号+QZO	10.94(6.93~16.12)	10.39(6.46~15.09)	7.95(4.44~10.55)	11.07(6.79~16.91)

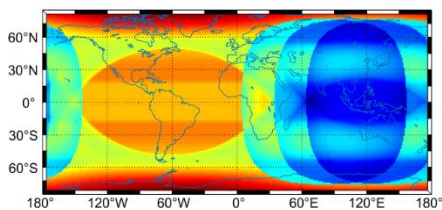
5.3 概率模型的应用

在本节，使用概率模型评估了 GNSS 星座与 GNSS+星座的性能。首先，对于标准北斗三号星座与 GPS 星座各自的特点与性能进行了分析；然后，将标准的北斗三号星座中的 3 颗 IGSO 卫星替换为 3 颗 QZO 卫星，构建北斗三号+QZO 星座并对二者的性能进行分析比较；之后，使用 5 颗椭圆轨道卫星与标准的北斗三号星座构成北斗三号+椭圆轨道卫星星座，评估椭圆轨道卫星对卫星可见性与空间构型的改善；最后，使用概率模型对包括 GNSS 卫星+椭圆轨道卫星+低轨卫星在内的 GNSS+星座的实用性进行评估。

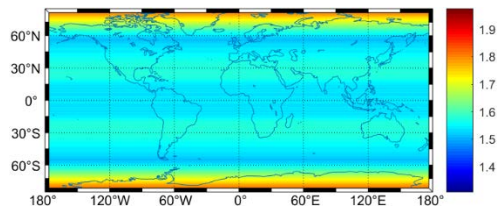
5.3.1 北斗三号与 GPS 星座实用性能比较分析

使用概率模型，从卫星可见性、DOPs 值分布、接收机钟差大地高之间的相关程度、南北向与东西向定位精度的差异这几个方面，在全球范围内对标准的北斗三号星座与 GPS 星座的特点以及实用性进行了评估。结果如图 5.4 所示。

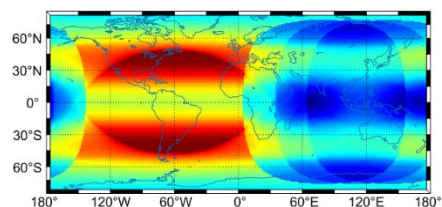




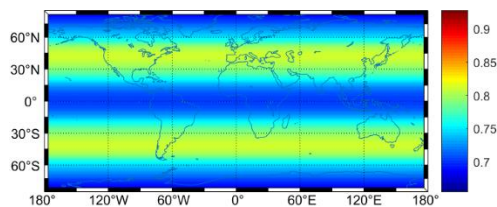
(c) 标准北斗三号星座 GDOP 值



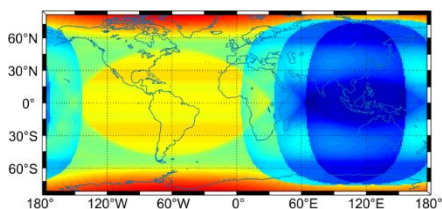
(d) GPS 星座的 GDOP 值



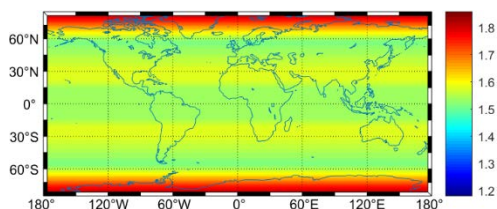
(e) 标准北斗三号星座 HDOP 值



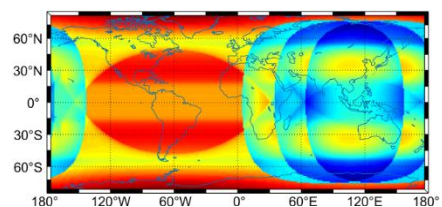
(f) GPS 星座的 HDOP 值



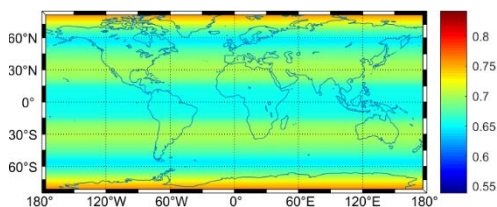
(g) 标准北斗三号星座 PDOP 值



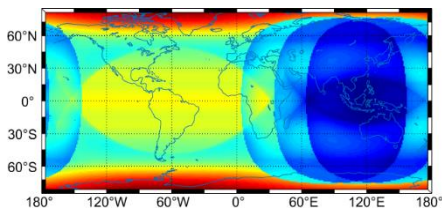
(h) GPS 星座的 PDOP 值



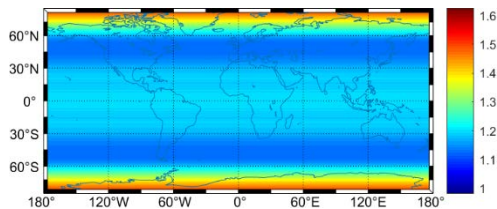
(i) 标准北斗三号星座 TDOP 值



(j) GPS 星座的 TDOP 值



(k) 标准北斗三号星座 VDOP 值



(l) GPS 星座的 VDOP 值



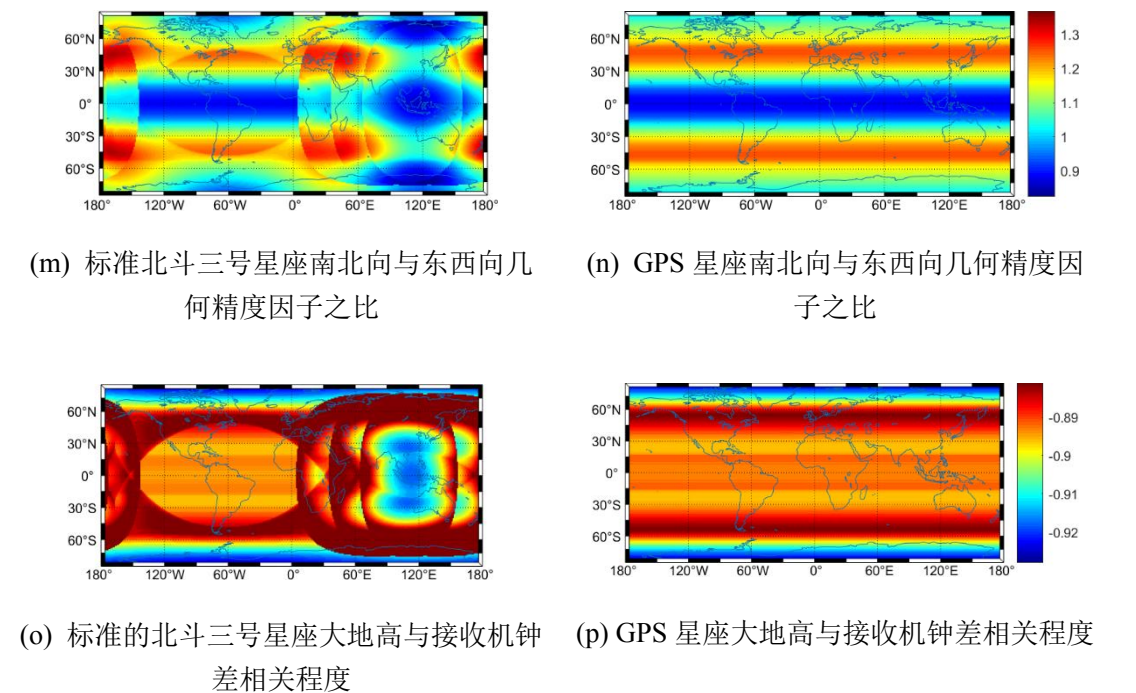


图 5.4 截止高度角为 5° 时，标准的北斗三号星座与 GPS 星座的：DOPs 值的估计值，南北向与东西向定位精度之比，大地高与接收机钟差之间相关程度。

表 5.3 标准的北斗三号星座与 GPS 星座卫星可见数量与 DOPs 值得平均值，最小值与最大值

星座	平均值 (最小值 – 最大值)					
	可见卫星数量	GDOP	HDOP	PDOP	TDOP	VDOP
标准北斗三号星座	13.20(11.27	1.46(1.31	0.73(0.66	1.46(1.31	0.67(0.56	1.08(0.98
在增强区域	~14.86)	~1.61)	~0.80)	~1.61)	~0.74)	~1.21)
标准北斗三号星座	10.48(7.69	1.68(1.31	0.78(0.66	1.68(1.31	0.73(0.54	1.29(0.98
在全球范围	~14.86)	~1.98)	~0.93)	~1.98)	~0.84)	~1.63)
GPS 星座在全球范	10.99(10.8	1.60(1.51	0.75(0.68	1.61(1.51	0.69(0.64	1.24(1.12
围	~11.75)	~1.86)	~0.81)	~1.86)	~0.78)	~1.54)

从图 5.4 的子图 a 与子图 b 可知，相比于标准的北斗三号星座，GPS 星座的全球卫星可见数量，分布更为均匀，标准的北斗三号星座在亚太地区可以看到更多卫星，在西半球观测的卫星数量更少；从图 5.4 的子图 c 至子图 l 可知，在西半球，标准的北斗三号星座在西半球的 DOPs 值比 GPS 星座更大。值得注意的是：对于标准的北斗三号星座与 GPS 星座，VDOP 值在高纬度地区，特别是在南北两极地区的 VDOP 值明显比其他地区更大。这是因为：随着纬度的提高，可



见卫星的高度角越来越低。在这种情况下,如果引入椭圆轨道卫星至 GNSS 星座之中,将会使得在高纬度地区观测到更多的具有较高高度角的卫星,改善在垂直方向上的空间构型分布;如图 5.4 的子图 m 和子图 n 所示, GPS 星座在南北方向的精度因子比东西方向更大。然而,相反的是,对于标准的北斗三号星座而言,在一些低纬度和极地地区,南北方向的精度因子更小。这是因为, GPS 星座都由 MEO 卫星构成,在 ECEF 坐标系统中,这种卫星主要在东西方向上大范围运动。而在标准的北斗三号星座,3 颗 IGSO 卫星主要在南北方向大范围运动并且 GEO 卫星也主要在改善南北方向的空间构型贡献更大<sup>[107]</sup>;对于大地高与接收机钟差之间的相关程度,如图 5.4 的子图 o 和子图 p 所示,在标准的北斗三号星座的增强区域(南纬  $60^\circ$  至北纬  $60^\circ$ , 东经  $50^\circ$  至东经  $170^\circ$ ),北斗三号星座的大地高与接收机钟差参数相关程度比 GPS 星座要高。这是因为 IGSO 和 GEO 卫星在 ECEF 坐标系统中飞行速度更慢,在用户上空停留时间更久。表 5.3 展示了在全球与局域范围内,卫星可见数量与 DOPs 值的平均值,最小值和最大值。在局域增强范围内,对于标准的北斗三号星座,平均可见卫星数量,要分别比标准北斗三号星座和 GPS 星座在全球范围内多观测 2.7 颗。类似的,标准北斗三号星座在局域增强区域的空间构型比在全球范围内更好。这是因为:在增强区域之外的地区,标准北斗三号星座能被观测到的卫星比 GPS 星座更少,造成卫星可见性与空间构型稍差。

### 5.3.2 北斗三号+QZO 卫星星座实用性能分析

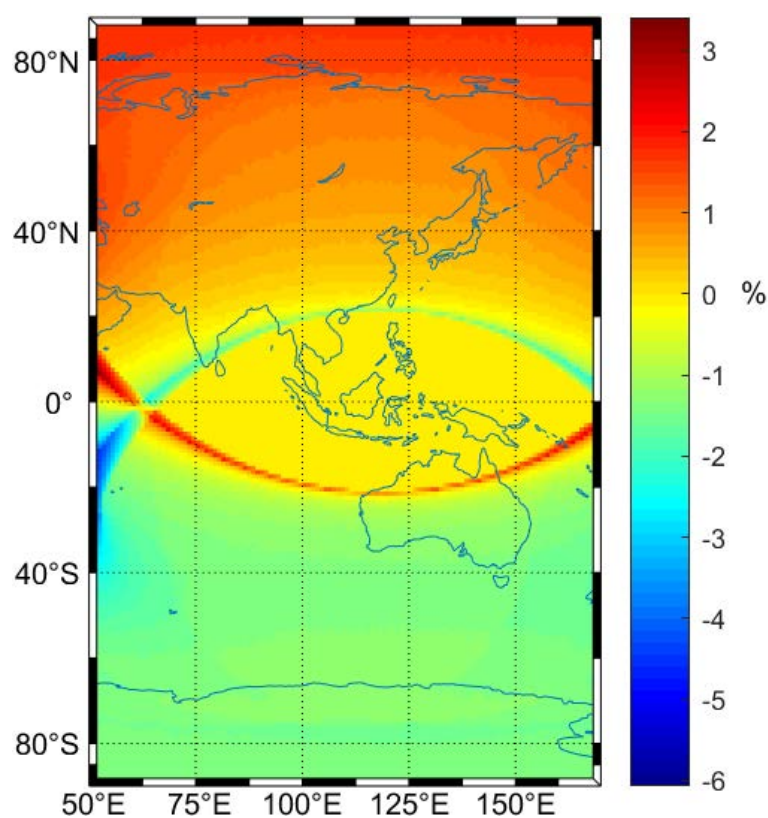
日本的 QZSS 系统服务区域为亚太地区,是 GPS 和 Galileo 的增强系统<sup>[162]</sup>。QZSS 星座的 QZO 卫星与标准的北斗三号星座中的 IGSO 卫星非常类似。在 ECEF 坐标系统中,他们的星下点轨迹都是“8”字形的。但不同的是:QZO 卫星的星下点轨迹并不是南北对称的。这是因为 QZO 卫星具有更大的轨道偏心率,其偏心率为 0.075。这样设计卫星轨道,使得卫星在日本区域上空能够以较高的高度角被观测到并且停留时间更久。这种特性对于改善在复杂城市环境下的卫星空间构型非常有帮助<sup>[163,164]</sup>。具体的 QZO 卫星轨道参数如表 5.4 所示。

表 5.4 QZO 卫星轨道参数<sup>[165]</sup>

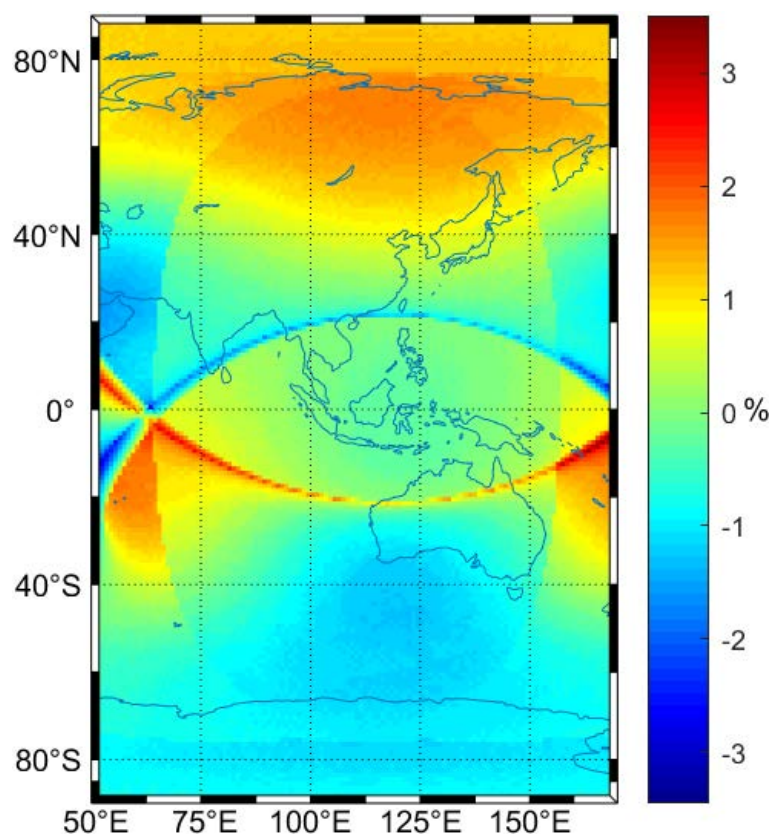
轨道参数	设计值
半长轴	42165 km
轨道偏心率	0.075
轨道倾角	$41^\circ$
近地点角距	$270^\circ$
中心经度	东经 $139^\circ$

本节使用 3 颗 QZO 卫星替换标准北斗三号星座中的 3 颗 IGSO 卫星，构建北斗三号+QZO 星座，以探究这两种类型的卫星在卫星可见性与 GDOP 的差异。QZO 卫星的轨道倾角与中心经度被分别设置为  $55^\circ$  和东经  $118^\circ$ ，与标准北斗三号星座的 IGSO 卫星相应轨道参数保持一致。此时，QZO 卫星的星下点轨迹如图 5.2 所示。北斗三号+QZO 星座的具体参数如表 5.1 所示。

如图 5.5 所示，将 3 颗 IGSO 卫星替换为 QZO 卫星之后，在北半球的高纬度地区，卫星可见数量与 GDOP 值都有了小幅度提升。但在其它地区，与标准的北斗三号星座相比，卫星可见数量和 GDOP 却变差了。这是因为 QZO 卫星在椭圆轨道上运行，当卫星在星下点轨迹北段运行时恰好在远地点，在北半球停留时间要比在南半球大约多 2.3 小时。



(a)



(b)

图 5.5 在南纬 90° 至北纬 90°，东经 50° 至东经 170° 范围内，北斗三号+QZO 星座相对标准北斗三号星座改进率(%)。子图 (a) 表示北斗三号+QZO 星座卫星可见数量相对于标准北斗三号星座改进率；子图 (b) 表示北斗三号+QZO 星座 GDOP 相对于标准北斗三号星座的改进率

### 5.3.3 北斗三号+椭圆轨道卫星星座实用性能分析

尽管北斗三号与 QZSS 系统的星座，已经使用混合星座为特定地区提高可见卫星数量，但在高纬度地区特别是两极地区，卫星的可见性仍然不理想。这是因为：对于现有的 GNSS 星座，当测站处于高纬度地区时，能够被观测到的卫星的高度角都比较低。如果引入能够对高纬度地区实现良好覆盖的卫星，那么在高纬度地区的卫星空间分布便能够得到改善。比如运行在椭圆轨道的 Molniya 卫星能够满足相关要求<sup>[94]</sup>。Molniya 卫星在 12 h 的地球同步轨道上运行，距离地面高度为 500 km 至 40000 km，轨道倾角为  $63.4^\circ$ 。这样的轨道倾角，即可以保证对北半球的良好覆盖，又能使地球的非球形摄动影响最小<sup>[94]</sup>。本节所应用的 Molniya 卫星具体轨道参数如表 5.5 所示，星下点轨迹如图 5.6 所示，空间视角的 Molniya 卫星运行轨道如图 5.7 所示。

表 5.5 Molniya 卫星轨道参数

轨道参数	设计值
半长轴	42165 km
轨道偏心率	0.740969
轨道倾角	63.4°
近地点角距	270°
中心经度	118° E

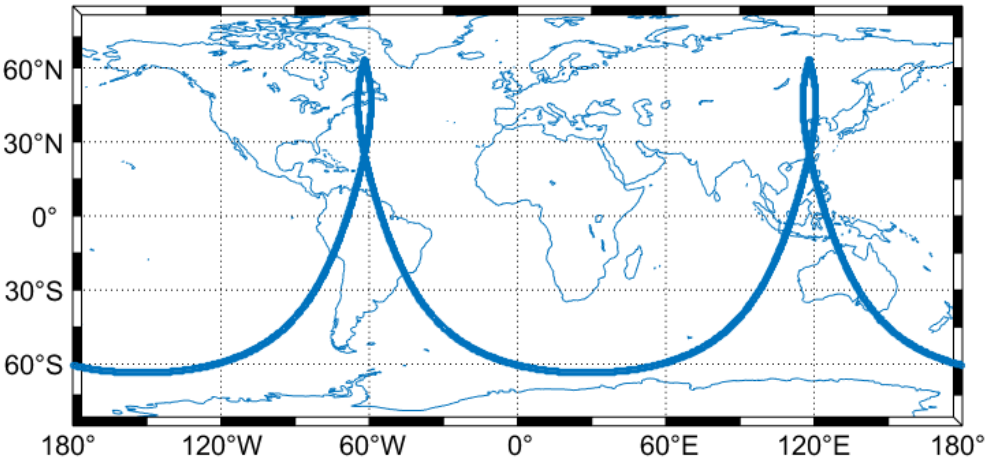


图 5.6 Molniya 卫星星下点轨迹

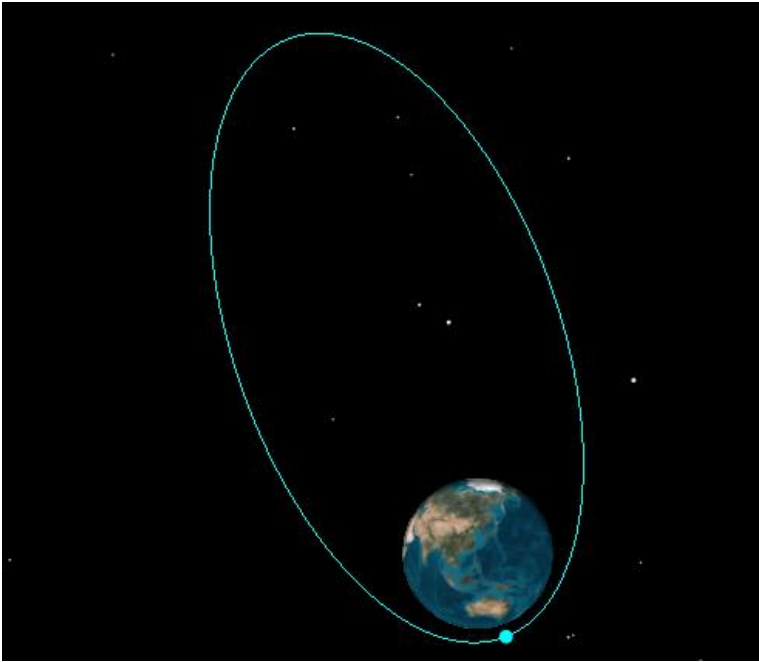


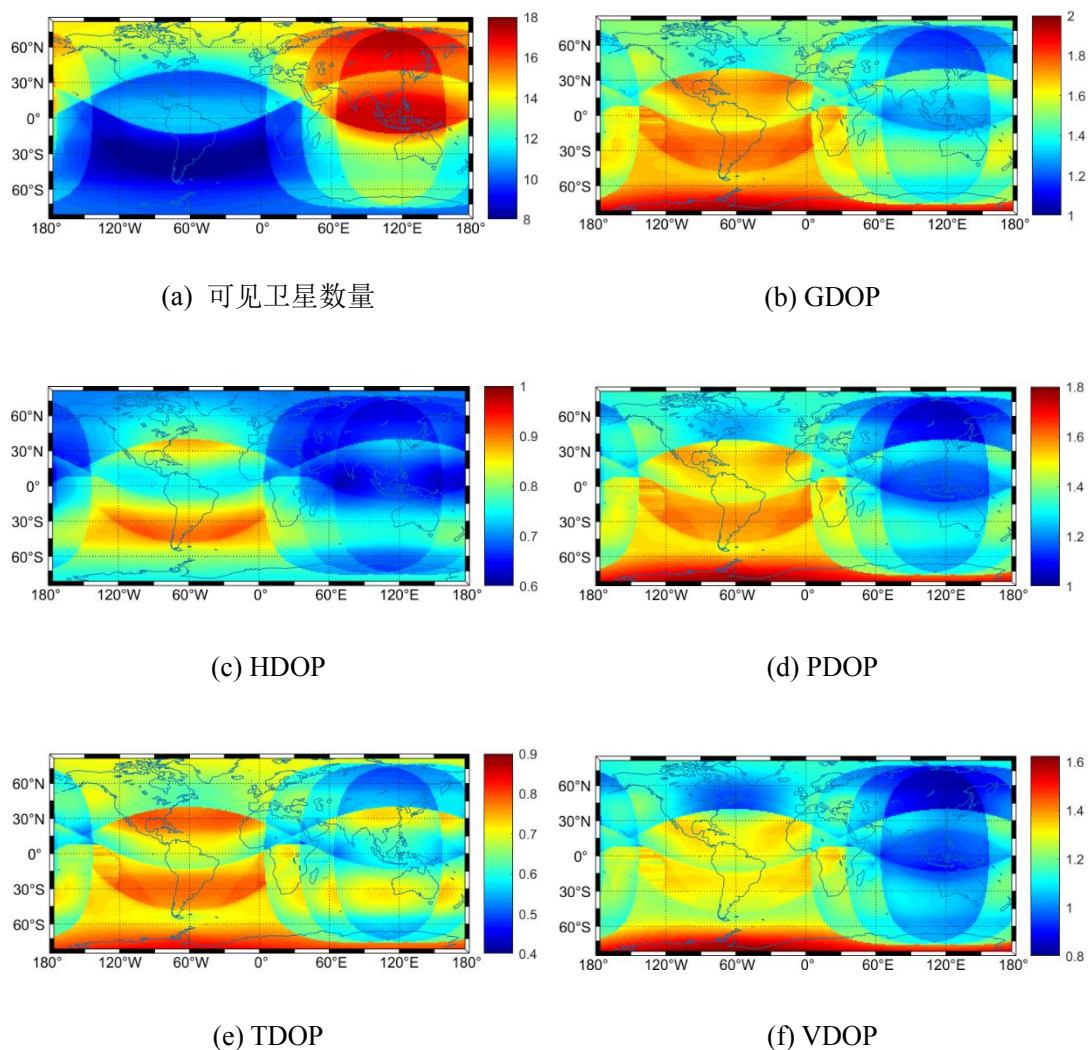
图 5.7 空间视角的 Molniya 卫星运行轨道

在标准的北斗三号星座基础上，引入 5 颗 Molniya 卫星，构建北斗三号+Molniya 星座，该星座的主要参数如表 5.6 所示。

表 5.6 北斗三号+Molniya 星座主要参数

参数	北斗三号+Molniya 星座			
轨道类型	MEO	IGSO	GEO	椭圆轨道
卫星数量	24	3	3	5
轨道倾角	55°	55°	0°	63.4°
轨道高度 (km)	21528	35786	35786	500 - 40000
轨道周期 (s)	46404	86170.5	86170.5	43061

本节在在全球范围内评估了北斗三号+Molniya 星座性能，结果如图 5.8 所示。





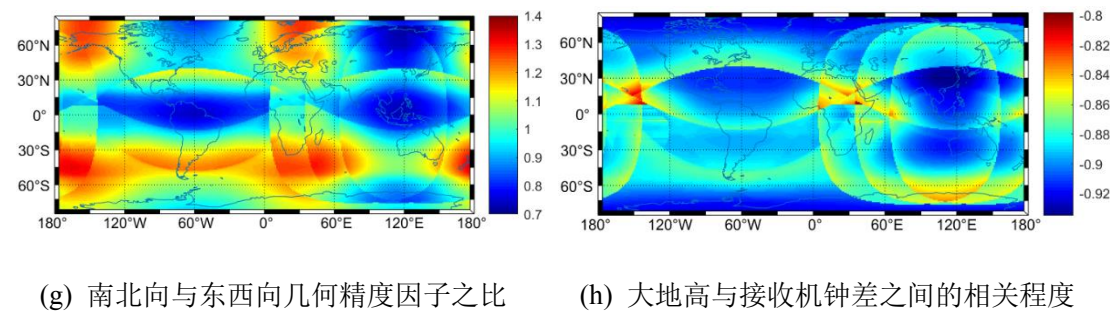


图 5.8 全球范围内北斗三号+Molniya 星座的 DOPs 值，南北向与东西向几何精度因子之比，大地高与接收机钟差之间的相关程度

在引入 Molniya 卫星之后，北斗三号+Molniya 星座相对于标准北斗三号星座在北纬 30° 至北纬 90° 的改进率，如表 5.7 所示。如图 5.8 和表 5.7 所示，引入 Molniya 卫星之后，在中高纬度地区，卫星可见数量与空间分布构型得到了明显改善。在北纬 30° 至北纬 90° 区域，相比于标准的北斗三号星座，卫星可见数量平均提升了 38.76%。另外，所有的 DOPs 值都得到了改善。GDOP, PDOP, HDOP, VDOP 和 TDOP 分别改善了 15.70%, 16.65%, 10.35%, 16.65% 和 11.52%。然而，如图 5.8 的子图 h 所示，大地高与接收机钟差的相关程度并没有降低。而且如图 5.8 的子图 g 和图 5.9 所示，加入 Molniya 卫星之后，在某些区域，如北极地区和低纬度地区，南北向的精度因子比东西向要小。这可能是因为：IGSO 卫星与 Molniya 卫星主要在南北方向上飞行，对于南北方向的空间改善贡献更大。总之，鉴于 Molniya 卫星对于中高纬度，特别高纬度地区良好的卫星可见性，一方面可以改善在该地区的卫星空间分布情况；另一方面也可以作为播放卫星导航增强信息的平台，为高纬度特别是极地地区提供增强服务，避免仅仅使用 GEO 提供增强服务时出现的“南墙效应”。

表 5.7 北斗三号+Molniya 星座相对于标准北斗三号星座在北纬 30° 至北纬 90° 的改进率

平均值 (最小值 ~ 最大值)						
可见卫星数量		GDOP	PDOP	HDOP	VDOP	TDOP
改进率	38.76(17.31~50.88)	15.70(2.30~23.25)	16.65(2.65~24.96)	10.35(4.04~18.68)	16.65(2.65~24.96)	11.52(0~2.73)

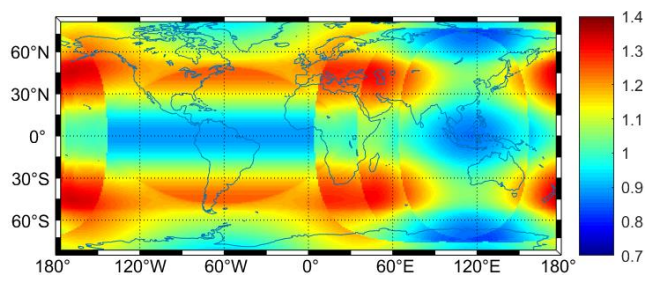


图 5.9 标准的北斗三号星座南北向与东西向几何精度因子之比

5.3.4 GNSS+星座实用性能分析

使用低轨卫星增强 GNSS 定位是未来极具潜力的发展趋势之一。椭圆轨道卫星作为另一种潜在的增强方式与低轨卫星一起引入 GNSS 星座中，将会起到提升效果值得进行探究。为此，本节加入 288 颗低轨卫星组成的极轨道星座<sup>[166]</sup>，构建 GNSS+星座：北斗三号+低轨卫星+Molniya 卫星星座。该星座的主要参数如表 5.8 所示。这些低轨卫星平均分布在 12 个轨道面上，轨道高度为 1000 km，空间视图如图 5.10 所示。使用概率模型对 GNSS+星座的特点进行了研究，结果如图 5.11 所示。

表 5.8 GNSS+星座主要参数

参数	GNSS+星座				
轨道类型	MEO	IGSO	GEO	低轨道	椭圆轨道
卫星数量	24	3	3	288	5
轨道倾角	55°	55°	0°	90°	63.4°
轨道高度（km）	21528	35786	35786	1000	500~40000
轨道周期（s）	46404	86170.5	86170.5	6307	43061

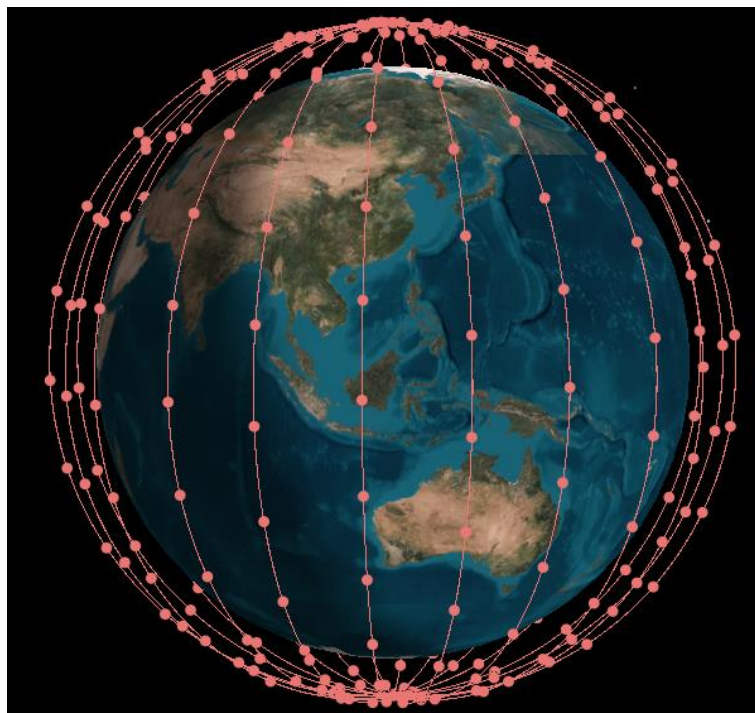
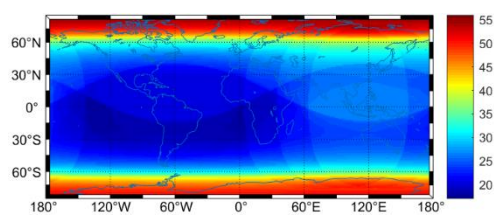
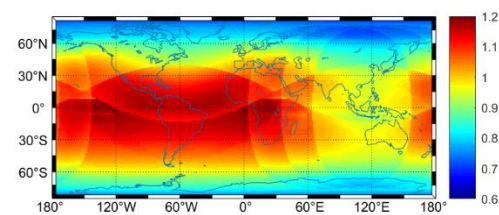


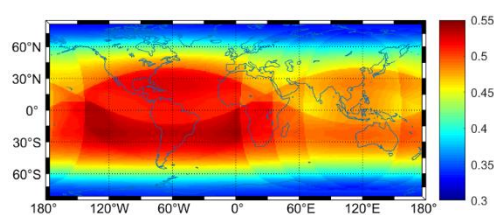
图 5.10 低轨卫星在空间的分布情况



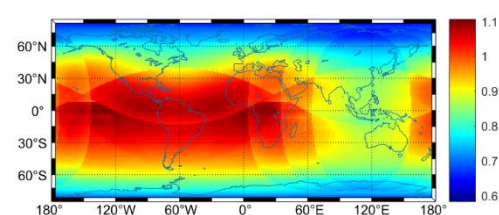
(a) 卫星可见数量



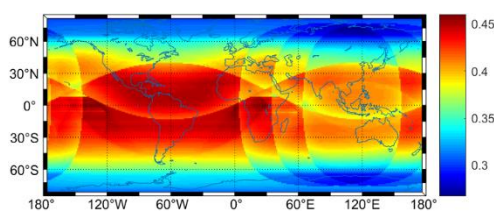
(b) GDOP



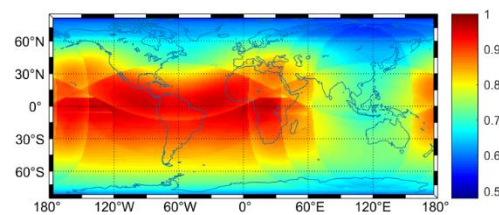
(c) HDOP



(d) PDOP

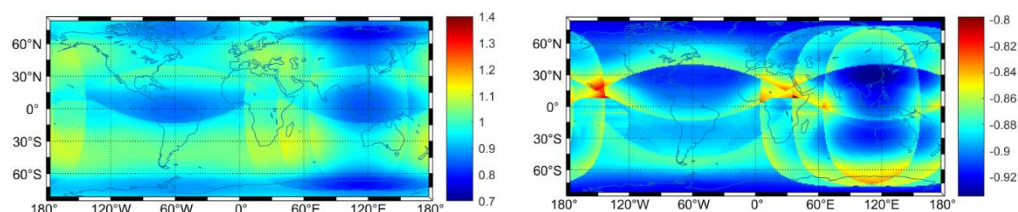


(e) TDOP



(f) VDOP





(g) 南北向与东西向几何精度因子之比 (h) 大地高与接收机钟差之间的相关程度

图 5.11 在截止高度角为  $5^\circ$  时, GNSS+星座在全球范围内卫星可见数量, DOPs 值以及南北向与东西向几何精度因子之比。

如图 5.11 所示, 引入大量低轨卫星之后, 相比现有的 GNSS 星座, 卫星空间构型得到了明显改善。如图 5.11 的子图 a 所示, 由于低轨卫星都在极轨道上运行, 在高纬度地区能够观测到大量卫星, 而在低纬度地区能观测到的卫星数量相对较少; 尽管引入了大量低轨卫星, 但如图 5.11 的子图 h 所示, 大地高与接收机钟差仍然具备较高的相关程度; 对于南北向与东西向几何精度因子之比, 对比图 5.11 的子图 g、图 5.9 和图 5.8 的子图 g 可以发现: 加入大量极轨道低轨卫星之后, 南北方向的精度因子更小。在全球范围内卫星可见数量和 DOPs 的平均值相对于标准北斗三号星座与 GPS 星座的改进率的统计结果, 如表 5.9 所示。卫星可见数量得到了大幅提升, 相对于标准北斗三号与 GPS 星座, 分别提升了 198% 和 184%。而且 DOPs 相对于标准北斗三号与 GPS 星座分别改进了大约 40%, 这将有助于改善标准单点定位精度与加快精密单点定位收敛速度<sup>[166]</sup>。

表 5.9 GNSS+星座在全球范围内相对于标准北斗三号与 GPS 星座改进率

星座	卫星可见数量	GDOP	HDOP	PDOP	TDOP	VDOP
北斗三号	197.81%	42.86%	43.59%	47.62%	49.32%	41.09%
GPS	183.99%	40.00%	41.33%	45.34%	46.38%	38.71%

## 5.4 本章总结

混合星座设计方案将会是 GNSS 星座发展趋势之一。因此, 有必要研究一个简便的方法, 评估分析在实现低轨卫星增强 GNSS 过程中, 不同星座设计方案的实用性。本章将原有的概率模型进行扩展, 提供了评估不同星座在全球范围内实用性的简便方法。无需事后或者仿真的精密星历, 仅需星座设计方案的基本参数。

使用概率模型, 对标准的北斗三号与 GPS 星座的特点进行了分析; 对于 QZO 与 IGSO 卫星在卫星可见性与空间构型等方面的特点, 进行了分析比较; 重点讨

论了椭圆轨道卫星，对于现有 GNSS 星座可能带来的提升。实验结果表明：加入椭圆轨道卫星之后，在中高纬度地区，卫星可见数量与空间构型都得到了明显改善；最后，对于 GNSS+星座的实用性进行了评估，分析结果表明：相比于现有的 GNSS 星座，引入低轨与椭圆轨道卫星的 GNSS+星座具有非常明显的优势。

本章的相关结论，对于 GNSS 星座的发展提供了初步参考与建议，为低轨卫星实现 GNSS 增强过程中，评估星座性能提供了一种简便方法。相关结论可能有益于 GNSS 产业未来的发展。

## 第6章 相位平滑伪距辅助三频周跳探测与修复

随着全球导航卫星定位系统的发展,越来越多的卫星可以发送三频信号,这将有助于整周模糊度固定和周跳探测与修复。然而,目前几乎所有三频周跳探测与修复方法都会因伪距噪声及其多路径效应过于严重,导致周跳估值取整成功率急剧降低,且这些算法都未考虑如何削弱其影响。而这也是低轨卫星实现 GNSS 增强过程中,所需要解决的问题。故本文针对 GPS/QZSS,北斗系统与低轨卫星提出了一个新的多频周跳探测修复方法:用相位平滑伪距缓解伪距噪声和多路径效应影响,以达到大幅提高周跳确定成功率目的。

### 6.1 三频周跳探测与修复方法

本文采用组合法探测修复周跳。令  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为相位组合系数; $l$ 、 $m$ 、 $n$  为伪距组合系数。

伪距与载波观测方程,可以简单表示为:

$$P_i = \rho + \frac{f_1^2}{f_i^2} I + \varepsilon_{p_i} \quad (6.1)$$

$$\varphi_i = \frac{\rho}{\lambda_i} - N_i - \frac{f_1^2}{f_i^2} I' + \varepsilon_{\varphi_i} \quad (6.2)$$

式中,  $P$  和  $\varphi$  分别表示伪距和载波的原始观测值;  $\rho$  表示包含对流程延迟,卫星接收机钟差的站星几何距离项;  $I$  和  $I'$  分别表示以米和周为单位的第一频点的电离层延迟量;  $\lambda$ 、 $N$  和  $f$  分别表示波长,整周未知数和信号频率;  $\varepsilon_{\varphi_i}$  和  $\varepsilon_{p_i}$  分别表示载波和伪距的观测噪声;  $i$  表示数据频点。

#### 6.1.1 三频无几何无电离层码相组合

第一个组合,选择无几何无电离层码相组合 (Geometry Free and Ionospheric Free, GFIF)。对于 GPS/QZSS 与北斗最优的组合如表 6.1 所示<sup>[132]</sup>。

表 6.1 GPS/QZSS 和 BDS 最优无几何无电离层组合

系统	$(a,b,c)$	$l$	$m$	$n$	$\lambda$ (m)	中误差 (周)
GPS/QZSS	(0, 1, -1)	0.012109	0.444991	0.5429	5.8610	0.0546
北斗	(0, -1, 1)	0.019945	0.552577	0.427478	4.8842	0.0633

由式(6.1)和(6.2)可知，组合观测值的整周未知数为：

$$N = aN_1 + bN_2 + cN_3 = a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\varphi_3 - \frac{(lP_1 + mP_2 + nP_3)}{\lambda_{abc}} \quad (6.3)$$

对(6.3)式进行历元间差分，如(6.4)式所示。如此，可计算得到组合观测值的周跳估值。

$$\Delta N = a\Delta N_1 + b\Delta N_2 + c\Delta N_3 = a\Delta\varphi_1 + b\Delta\varphi_2 + c\Delta\varphi_3 - \frac{(l\Delta P_1 + m\Delta P_2 + n\Delta P_3)}{\lambda_{abc}} \quad (6.4)$$

式中， $\Delta$ 表示进行历元间一次差分。当 GPS/QZSS 与北斗伪距观测噪声为 0.3 m，载波观测噪声为 0.01 周时，根据三频组合观测原理<sup>[131]</sup>，可得知表 6.1 中的无几何无电离层组合均可至少以 95.5%的成功率固定组合周跳。但伪距噪声过大时，将会导致周跳修复成功率急剧下降。当无周跳发生时，该组合观测值的周跳估值应该在零附近小幅波动，而当基础频点的载波观测值发生周跳时，会造成组合观测值的周跳估值发生大幅波动。所以，设定合理阈值，便可以用相应无几何无电离层组合进行周跳探测。但只用一个组合探测周跳，存在大量不敏感周跳组合不能被探测（如当 3 个频点周跳跳变量相等，即  $\Delta N_1 = \Delta N_2 = \Delta N_3$  时）；而且仅有这一个组合仍无法构建方程来计算每个频点跳变量，还需要再构造 2 个组合，以组成 3 组线性无关组合观测值。

### 6.1.2 无几何相位组合

为了缓解伪距噪声的影响，采用逐级修复周跳的思想，利用已经修复周跳的无几何无电离层组合，构建无几何相位组合，即：

$$\begin{aligned} \lambda_{a2b2c2}\Delta N_{a2b2c2} + \lambda_{a2b2c2}\Delta\varphi_{a2b2c2} + \beta_{a2b2c2}\Delta I_1 \approx \\ \lambda_{GFIF}\Delta N_{GFIF} + \lambda_{GFIF}\Delta\varphi_{GFIF} + \beta_{GFIF}\Delta I_1 \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\beta_{abc(GFIF)} = \frac{f_1^2(a/f_1 + b/f_2 + c/f_3)}{af_1 + bf_2 + cf_3} \quad (6.6)$$

式中,  $\beta_{abc(GFIF)}$  为相位组合  $(a, b, c)$  电离层延迟放大系数;  $\Delta I_1$  (单位: m) 为第一频点历元间电离层延迟变化量; 其余符号意义与前文保持一致。可根据下式对无几何相位组合观测值跳变量进行估计:

$$\Delta N_{a2b2c2} \approx \frac{\lambda_{GFIF} \Delta N_{GFIF} + \lambda_{GFIF} \Delta \varphi_{GFIF} - \lambda_{a2b2c2} \Delta \varphi_{a2b2c2} + (\beta_{GFIF} - \beta_{a2b2c2}) \Delta I_1}{\lambda_{a2b2c2}} \quad (6.7)$$

本文选择的相位组合系数如表 6.2 所示<sup>[167]</sup>。

表 6.2 GPS/QZSS 和 BDS 相位无几何组合系数

系统	相位组合系数(a,b,c)
GPS/QZSS	(1, -2, 1)
北斗	(1, 0, -1)

### 6.1.3 无几何码相组合

为了构造 3 个线性无关的组合, 第 3 个组合系数之和不为零。为消除几何相关项, 本文构建无几何码相组合<sup>[138,139]</sup>。根据载波和码伪距观测值, 采用下式估计组合观测值跳变量:

$$\Delta \varphi_{abc} - \frac{P_{lmn}}{\lambda_{abc}} = -K_{abc,lmn} \Delta I' + \Delta N_{abc} + \varepsilon_{\varphi_{abc}} + \frac{\varepsilon_{P_{lmn}}}{\lambda_{abc}} \quad (6.8)$$

$$K_{ijk,lmn} = \frac{\beta_{abc} + \beta_{lmn}}{\lambda_{ijk}} \quad (6.9)$$

式中,  $K$  为组合后的电离层延迟历元间变化放大系数。为了使组合观测值噪声尽可能小, 令  $l = m = n = 1/3$ <sup>[168]</sup>。为了减小电离层放大系数, 令  $|a+b+c| = 1$ <sup>[139]</sup>, 同样该组合也会严重受到伪距噪声和多路径效应影响。本文选择的无几何码相组合系数如表 6.3 所示<sup>[169]</sup>。

表 6.3 GPS/QZSS 和 BDS 无几何码相组合系数

系统	(a,b,c)	$l$	$m$	$n$
GPS/QZSS	(-3,3,1)	1/3	1/3	1/3

续表

系统	$(a,b,c)$	$l$	$m$	$n$
北斗	$(-3,2,2)$	1/3	1/3	1/3

根据 GPS/QZSS 和北斗信号特点得到的最优组合如表 6.4 所示。周跳探测的阈值是经过反复实验得到的。所谓最优，指的是得到 3 个线性无关组合观测值，在组合观测值波长足够长的情况下，构造条件数尽可能小的稳定方程，兼顾数值稳定性，而不是仅仅考虑令组合观测值的方差最小<sup>[167]</sup>。

表 6.4 GPS/QZSS 和 BDS 最优组合系数及阈值

系统	组合	$(a,b,c)$	$l$	$m$	$n$	阈值
GPS/QZSS	GFIF	$(0,1,-1)$	0.012109	0.444991	0.5429	0.36
	无几何相位组合	$(1,-2,1)$				0.65
	无几何码相组合	$(-3,3,1)$				0.68
BDS	GFIF	$(0,-1,1)$	0.019945	0.552577	0.427478	0.36
	无几何相位组合	$(1,0,-1)$				0.65
	无几何码相组合	$(-3,2,2)$				0.68

6.1.4 周跳修复

根据组合观测值与基础载波观测值之间的关系，可构造如下分别适用于 GPS/QZSS 和北斗信号的方程<sup>[169]</sup>：

$$y_{GPS/QZSS} = \begin{bmatrix} \delta N_{a1b1c1} \\ \delta N_{a2b2c2} \\ \delta N_{a3b3c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta N_1 \\ \delta N_2 \\ \delta N_3 \end{bmatrix} = Hx \tag{6.10}$$

$$y_{北斗} = \begin{bmatrix} \delta N_{a1b1c1} \\ \delta N_{a2b2c2} \\ \delta N_{a3b3c3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta N_1 \\ \delta N_2 \\ \delta N_3 \end{bmatrix} = Hx \tag{6.11}$$

以上方程系数阵能避免复杂空间搜索方法，直接矩阵求逆  $x = H^{-1}y$ ，即可计算每个基础频点的跳变量<sup>[139,141]</sup>。

### 6.1.5 伪距观测值噪声对周跳修复的影响

相关文献已经指出：组合观测值的噪声对周跳确定成功率有显著影响<sup>[138,139]</sup>，如图 6.1 所示。随着组合观测值噪声的增大，成功率将会急剧下降。而相关文献研究结果表明：北斗的 GEO 卫星受多路径影响比较严重<sup>[170]</sup>。因此，若能削弱观测噪声和多路径的影响，将有效提高周跳估值取整成功率。

假设不同频点载波相位和伪距观测量之间是互不相关的，其历元之间也不相关，则根据误差传播律，可得码相组合观测值标准差是  $\sigma_{\Delta N_{abc}}$  为：

$$\sigma_{\Delta N_{abc}} = \sqrt{2 \times \sigma_{\varphi}^2 (a^2 + b^2 + c^2) + 2 \times \sigma_p^2 (l^2 + m^2 + n^2) / \lambda_{abc}^2} \quad (6.12)$$

相位组合的标准差为：

$$\sigma_{\Delta N_{a1b1c1}} = \sqrt{\frac{\sigma_{GFIF}^2 + 2 \times \sigma_{\varphi}^2 (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)}{\lambda_{a1b1c1}^2}} \quad (6.13)$$

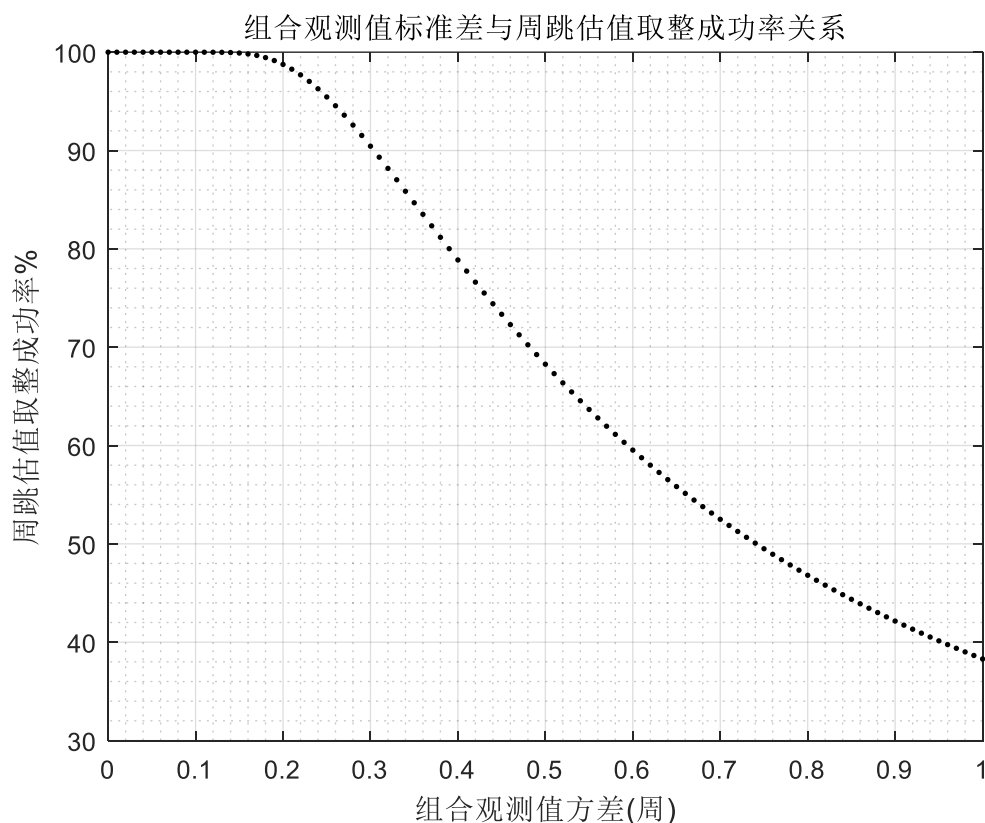


图 6.1 组合观测值方差与周跳估计值取整成功率关系

周跳确定成功率可以反映观测噪声对于周跳修复的影响<sup>[139]</sup>。由组合观测值周跳浮点值通过直接取整获得正确周跳固定值的概率为<sup>[171]</sup>：

$$P = 2\Phi(0.5\sigma_{\delta Nabc}^{-1}) - 1 \tag{6.14}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2) dz \tag{6.15}$$

由(6.14)和(6.15)可知，当组合观测值标准差越小时，取整成功率就越高。而伪距观测值的噪声及其多路径效应影响，远比载波相位观测值更为显著。因此，如果能够削弱伪距观测值噪声及其多路径效应的影响，将大幅提高周跳估值取整成功率。

当 GPS/QZSS 伪距噪声为 3 m 时，经过相位平滑后伪距噪声降为 0.6 m<sup>[138]</sup>，假设载波观测值噪声为 0.01 周。根据上述理论计算平滑前后各组合周跳固定成功率如表 6.5 所示。平滑前最终的固定成功率为：67.444%×95.055%×35.406% = 22.698%，而平滑后的最终固定成功率为：99.999%×99.99%×97.313% = 97.311%。由此可见，通过相位平滑伪距抑制伪距噪声和多路径，可以大幅提高周跳探测修复成功率<sup>[169]</sup>。

表 6.5 GPS/QZSS 平滑前后周跳估值固定成功率对比

组合	平滑前	平滑后
GFIF	67.444%	99.999%
相位组合	95.055%	99.999%
码相组合	35.406%	97.313%

6.2 相位平滑伪距方法

以上讨论了伪距观测值的噪声可以通过相位平滑的方法降低，以达到提高周跳探测修复成功率的目的。现在探讨具体的相位平滑伪距方法。

GNSS 的相位观测噪声通常仅为伪距观测噪声的 1/100 且相位所受多路径影响不会超过其波长的 0.25 倍<sup>[172,173]</sup>，而伪距所受多路径影响却可能达到十几米至数十米<sup>[1]</sup>。因此，使用相位平滑伪距方法可大幅缓解观测噪声和多路径效应对伪距观测值影响，既能提高伪距单点定位精度<sup>[173,174]</sup>又可加快精密单点定位收敛速度。Hatch 滤波方法<sup>[175]</sup>，是最早的相位平滑伪距算法，被广泛应用于 GNSS 数据处理领域。本文采用基于 Hatch 滤波改进的 Divergence-Free 滤波<sup>[174]</sup>，对伪距观测值进行平滑去噪。Hatch 滤波只能双频相位平滑双频伪距观测值<sup>[173]</sup>，而 Divergence-Free 滤波可以实现双频相位观测值平滑单频伪距观测值。单频相位平



滑伪距方法受平滑窗口长度限制<sup>[173]</sup>，而采用 Divergence-Free 滤波和 Hatch 滤波时，只要载波观测值未发生周跳或者周跳被及时正确修复，就可以一直平滑<sup>[174]</sup>。

### 6.2.1 Hatch 滤波

伪距可以用载波观测值平滑。Hatch 滤波的算法为<sup>[175]</sup>：

$$\begin{aligned}\hat{P}_{IF}(k) &= \frac{1}{n}P_{IF}(k) + \frac{n-1}{n}[\hat{P}_{IF}(k-1) + \varphi_{IF}(k)\lambda_{IF} - \varphi_{IF}(k-1)\lambda_{IF}] \\ &= \varphi_{IF}(k)\lambda_{IF} + \frac{n-1}{n}[\hat{P}_{IF}(k-1) - \varphi_{IF}(k-1)\lambda_{IF}] + \frac{1}{n}[P_{IF}(k) - \varphi_{IF}(k)\lambda_{IF}]\end{aligned}\quad (6.16)$$

其中， $k$  表示当前观测的是第几个历元；设  $N$  为平滑窗口长度， $n$  表示当前处理的历元在平滑窗口中是第几个， $\hat{P}_{IF}(k)$  表示平滑之后的伪距观测值， $IF$  表示形成电离层组合。其他参数意义与本章前文保持一致。发生周跳时该算法需重新进行初始化。第 1 个历元的伪距观测值被当作该算法的初始平滑值，即：

$$\hat{P}_{IF}(1) = P_{IF}(1) \quad (6.17)$$

### 6.2.2 Divergence Free 滤波

由于电离层对伪距和载波观测值传播有相反的作用，所以当伪距观测值与相位观测值相减时，电离层延迟会被放大 2 倍。伪距减相位观测方程，即式 (6.1) 减式 (6.2)，可得：

$$P_i - \lambda_i \varphi_i = 2 \frac{f_1^2}{f_i^2} I - \lambda_i N_i + \varepsilon_{p_i} - \lambda_i \varepsilon_{\varphi_i} \quad (6.18)$$

由式 (6.18) 可见，电离层延迟被放大 2 倍。这种现象被称之为码相偏差影响 (Code-carrier Divergence Effect, CDE) <sup>[174]</sup>。通过使用双频载波观测数据，可令平滑后的伪距观测值电离层延迟 1 阶项保持不变，以平滑第 1 频点伪距观测值为例，即：

$$\varphi_{1DF} = \lambda_1 \varphi_1 + 2\tilde{\alpha}_1(\lambda_1 \varphi_1 - \lambda_2 \varphi_2) \quad (6.19)$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \quad (6.20)$$

式中,  $\varphi_{1DF}$  为双频载波组合之后的载波观测值。用相应历元的  $\varphi_{1DF}$  取代式(6.16)中相应历元的  $\varphi_{IF}(k)\lambda_{IF}$ ,  $P_i(k)$  取代式中相应历元的  $P_{IF}(k)$ 。可得到不受 CDE 影响的平滑伪距值, 以此避免平滑窗口长度的限制, 即:

$$\begin{aligned}\hat{P}_1(k) &= \frac{1}{n} P_1(k) + \frac{n-1}{n} [\hat{P}_1(k-1) + \varphi_{1DF}(k) - \varphi_{1DF}(k-1)] \\ &= \varphi_{1DF}(k) + \frac{n-1}{n} [\hat{P}_1(k-1) - \varphi_{1DF}(k-1)] + \frac{1}{n} [P_1(k) - \varphi_{1DF}(k)]\end{aligned}\quad (6.21)$$

式(6.21)被称之为 Divergence-Free 滤波<sup>[174]</sup>。在观测数据采样率较高的情况下, 历元间载波差分观测值近似相等。因此, 如果当前历元之前的 2 个历元相位观测值已经被正确修复周跳或者未发生周跳, 则可用这 2 个历元的相位观测值平滑当前历元伪距观测值, 再形成线性组合观测值进行周跳探测修复。当前历元的载波观测值被正确修复周跳后, 又可以用于平滑下个历元伪距观测值。

### 6.2.3 Hatch 与 Divergence-Free 滤波收敛性分析

与单频相位平滑算法不同, Hatch 滤波算法消除了一阶电离层影响, 而 Divergence-Free 滤波不受 CDE 现象影响。因此, 对于这 2 种滤波算法而言, 只要载波观测值没有发生周跳或者周跳被及时修复, 便可以一直平滑, 不受平滑窗口长度限制。

为方便分析相位平滑伪距算法精度, 将 Hatch 相位平滑伪距算法写成非递推形式<sup>[172]</sup>, 即:

$$\hat{P}_{IF}(k) = L_{IF}(k) + \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d [P_{IF}(j) - L_{IF}(j)] \quad (6.22)$$

假设码和载波观测值互相独立, 不同历元同一类型观测量之间也互相独立, 且历元之间观测值精度相同, 则根据误差传播定律, 经过 Hatch 滤波平滑后的伪距方差为:

$$\sigma_{\hat{P}_{IF}(k)}^2 = \sigma_{L_{IF}}^2 + \frac{1}{d} (\sigma_{P_{IF}}^2 - \sigma_{L_{IF}}^2) \quad (6.23)$$

式中,  $\sigma_{\hat{P}_{IF}(k)}^2$  为经过 Hatch 滤波平滑后的伪距方差;  $\sigma_{P_{IF}}^2$  为原始伪距消电离层组合观测值方差;  $d$  表示在平滑窗口中当前处理的第几个历元;  $\sigma_{L_{IF}}^2$  为原始载波消电离层组合观测值方差。对式(6.23)取极限, 可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\hat{p}_{IF}(k)}^2 = \sigma_{L_{IF}}^2 \quad (6.24)$$

由式(6.24)可以得出结论, 不受周跳影响时, Hatch 滤波可一直平滑, 达到一定程度后, 平滑后的伪距精度与消电离层载波组合观测精度相当。

以第 1 频点伪距观测值为例, 经过 Divergence-Free 滤波平滑后的伪距观测值方差的极限为<sup>[169]</sup>:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{\hat{p}_1(k)}^2 &= (1 + 2\tilde{\alpha}_1^2 + \frac{1}{n} + \frac{2\tilde{\alpha}_1^2}{n})\sigma_{\varphi_1}^2 + \frac{1}{n}\sigma_{P_1}^2 \\ &\approx 20.114\sigma_{\varphi_1}^2 \end{aligned} \quad (6.25)$$

根据式(6.24)和式(6.25)可得到 Hatch 和 Divergence-Free 滤波平滑伪距精度对比图。

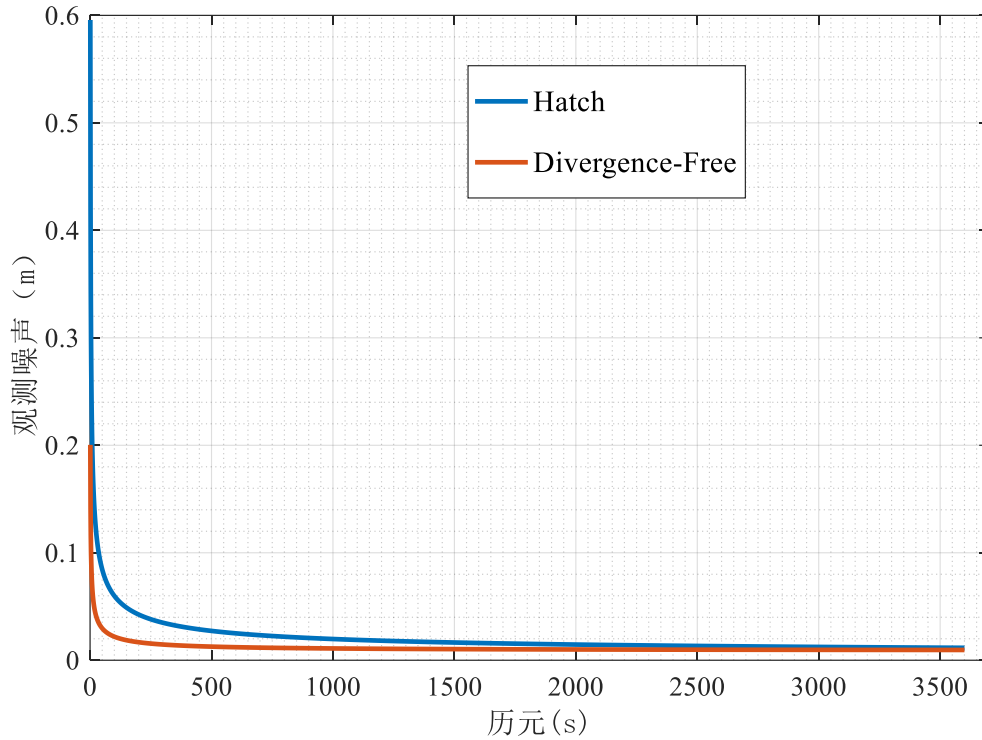


图 6.2 Hatch 与 Divergence-Free 滤波平滑伪距观测噪声收敛情况对比

本章采用周跳探测修复和 Divergence-Free 滤波相结合的方法, 既缓解伪距噪声和多路径效应对周跳探测修复的影响, 又避免周跳发生时相位平滑伪距算法需要重新初始化的问题。

6.3 计算分析

本文用 IGS（International GNSS Service，IGS）站实测的 GPS/QZSS、北斗三频数据与仿真的低轨卫星三频观测数据验证算法。所采集真实观测数据如表 6.6 所示，采样率为 1 s。2013 年 3 月 17 日有大规模磁暴发生<sup>[132]</sup>，TEC 变化活跃，基于这一天的电离层格网文件，采用 GIM 模型计算发现，该天 07: 00: 00 到 19: 00: 00 TEC 数值较大。因此，采用 GPS 的 G24 卫星从 15: 00: 00 - 20: 00: 00 的 L1、L2、L5 频点观测值数据检测本文方法在强电离层条件下的周跳探测与修复能力。其他测站观测数据用于分别检验本方法对 QZSS 和北斗不同轨道类型卫星周跳探测修复能力。在 3 个频点分别加入周跳值  $q, w, e$  记为  $(q, w, e)$ 。然后，对每个测站相应卫星观测值，每 5 个历元人为加入周跳，具体如  $(0, 0, 1), (0, 0, 2), \dots, (14, 14, 15)$ ，总共人为加入 3375 组周跳。考虑到暂时没有公开的低轨卫星观测数据，本文参考低轨卫星观测数据的仿真方法<sup>[45,103]</sup>，仿真了低轨卫星 L001 在 NTUS 测站的观测数据。该卫星的具体轨道参数如表 6.7 所示。仿真观测数据的采样率为 10 Hz，时间长度为 19 分 19 秒。仿真低轨卫星观测数据时，所采用的信号频率与 GPS 保持一致。由于低轨卫星可见时间较短，每 4 个历元人为加入周跳，具体如  $(0, 0, 1), (0, 0, 2), \dots, (10, 10, 10)$ ，总共 1210 组周跳。

表 6.6 观测数据情况

测站	卫星	轨道类型	接收机类型	观测时间
AIRA(日本)	J01	IGSO	Trimble NetR9	2017.04.20
AIRA(日本)	G08	MEO	Trimble NetR9	2017.08.17
WZTR(德国)	G24	MEO	LEICA GRX1200+GNSS	2013.03.17
	C06	GEO		2017.07.20
KNZ2(俄罗斯)	C08	IGSO	Trimble NetR9	2017.07.20
	C12	MEO		2017.07.20

表 6.7 低轨卫星 L001 轨道参数

轨道参数	数值
半长轴	7678.14 km
偏心率	0
轨道倾角	90°
近地点角距	0°

续表

轨道参数	数值
升交点赤经	105°
真近点角	47.5°

6.3.1 数据处理流程

数据处理流程如图 6.3 所示。首先，读取三频观测数据，如果是第 3 个历元及以后的观测数据，则先用之前修复了周跳的相位数据结合 Divergence-Free 滤波算法，平滑当前历元每个频点伪距观测值，再形成线性组合观测值；如果不是则直接形成组合观测值。然后，判断当前历元是否有周跳发生，没发生周跳则判断当前历元是否为最后历元；如果有周跳发生则列方程计算每个频点跳变量，修复载波观测值，并再次检测周跳是否发生，即判断周跳是否修复正确，若错误则放弃修复，若正确，则用当前历元和上个历元载波观测数据，进行正常相位平滑伪距，并判断是否是最后一个历元；如果是最后历元则数据处理完毕，否则再重复上述过程，直到所有历元数据处理完毕。

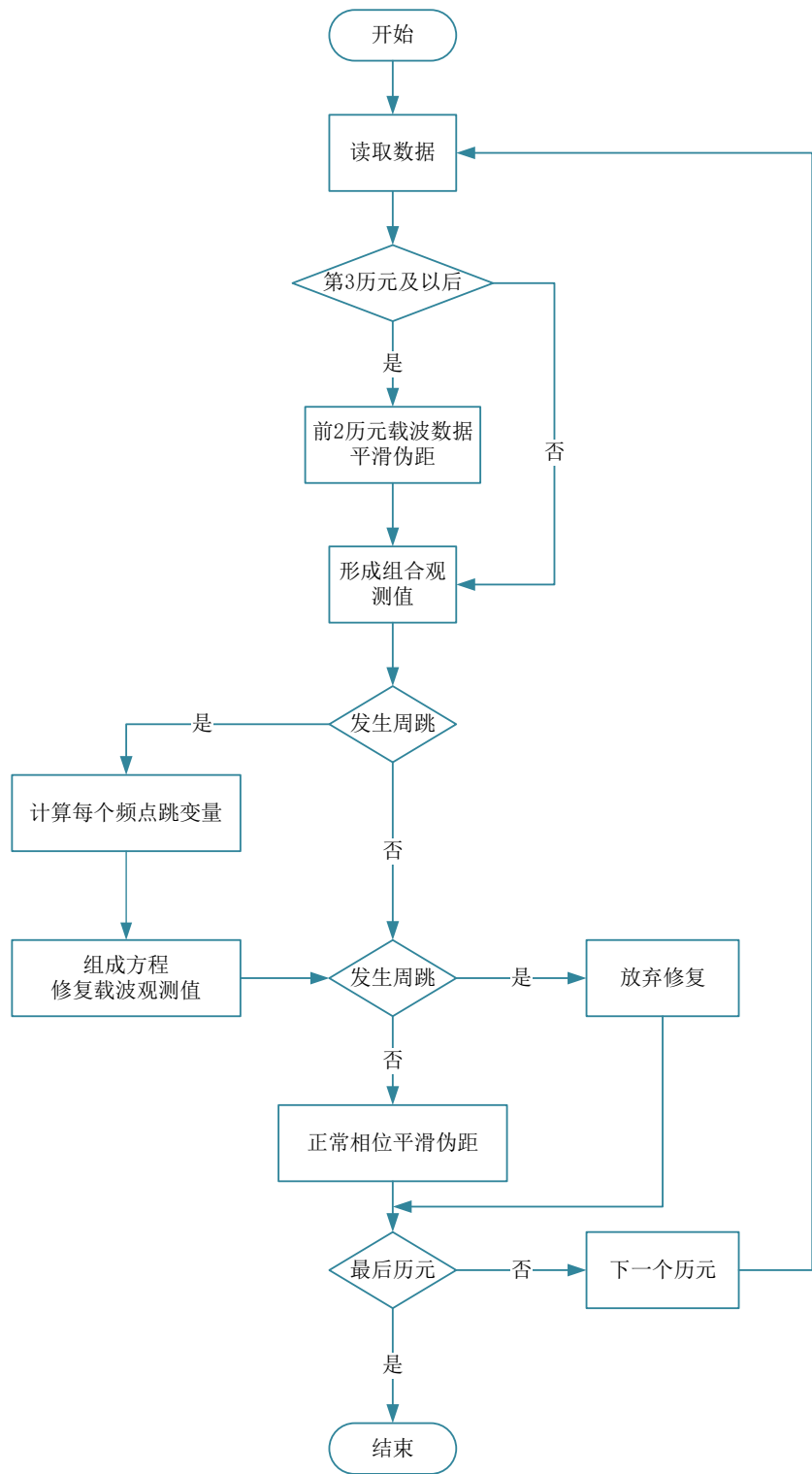
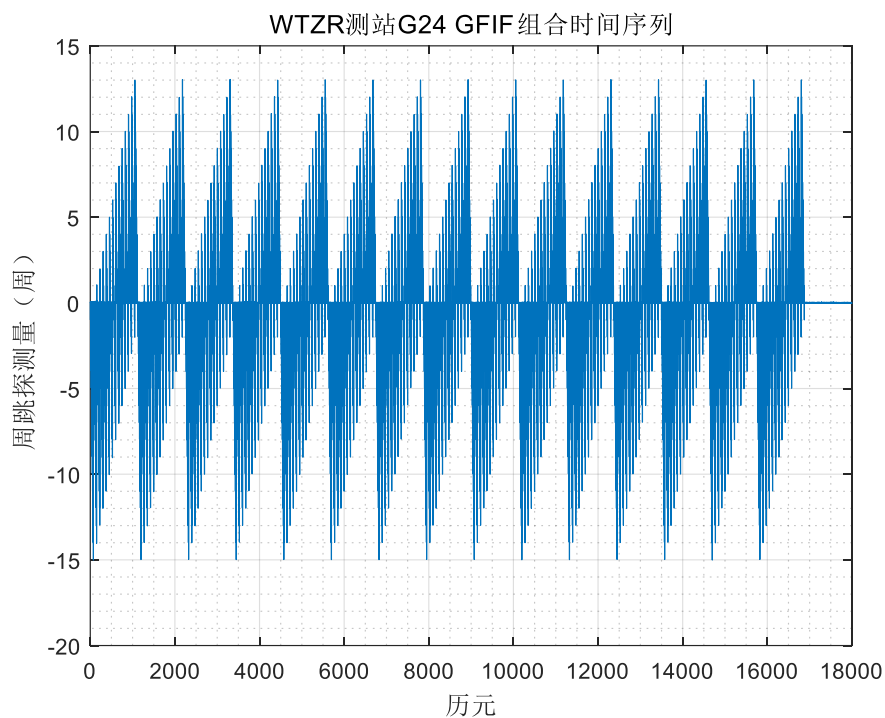


图 6.3 数据处理流程图

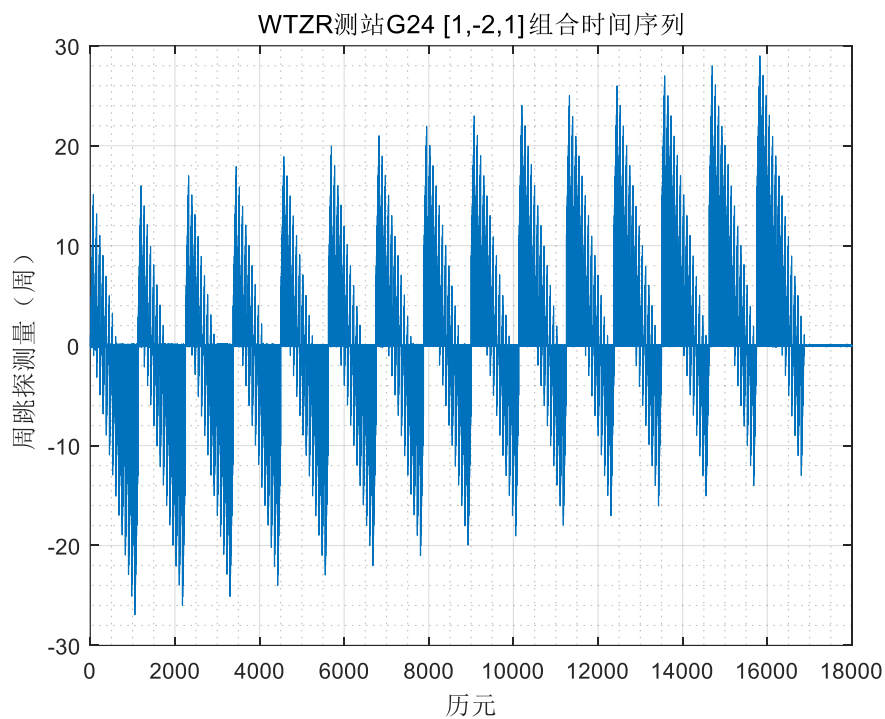
6.3.2 周跳探测修复结果

WTZR 测站 G24 卫星的周跳探测测量时间序列如图 6.4 所示。其他测站卫星

情况与此类似，所有人为加入的周跳都被正确探测。



(a) GFIF



(b) (1, -2, 1)

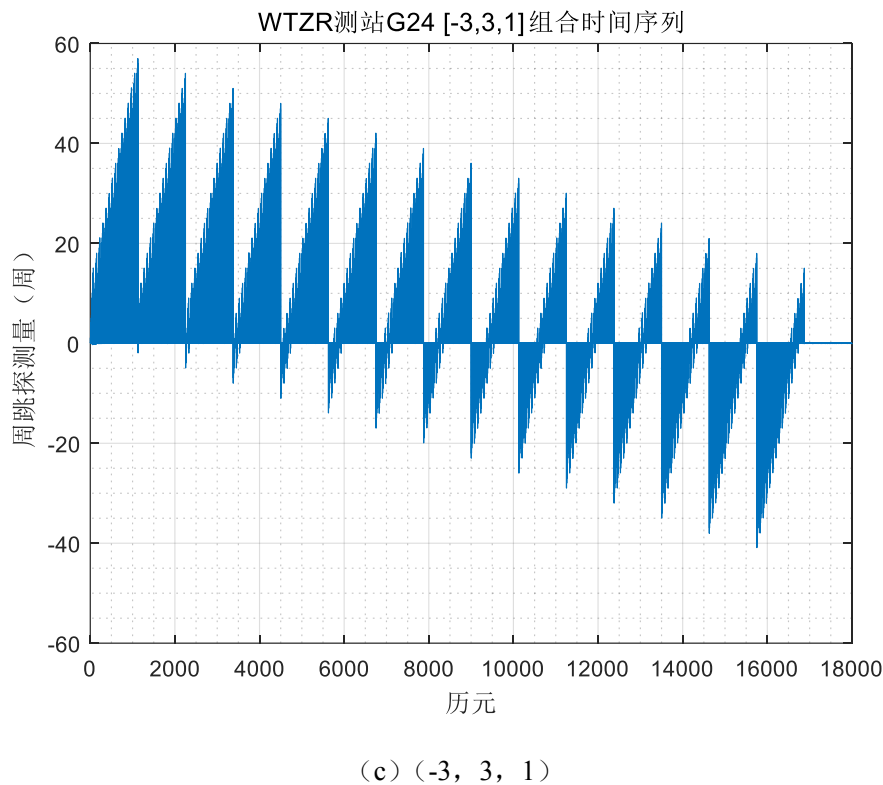
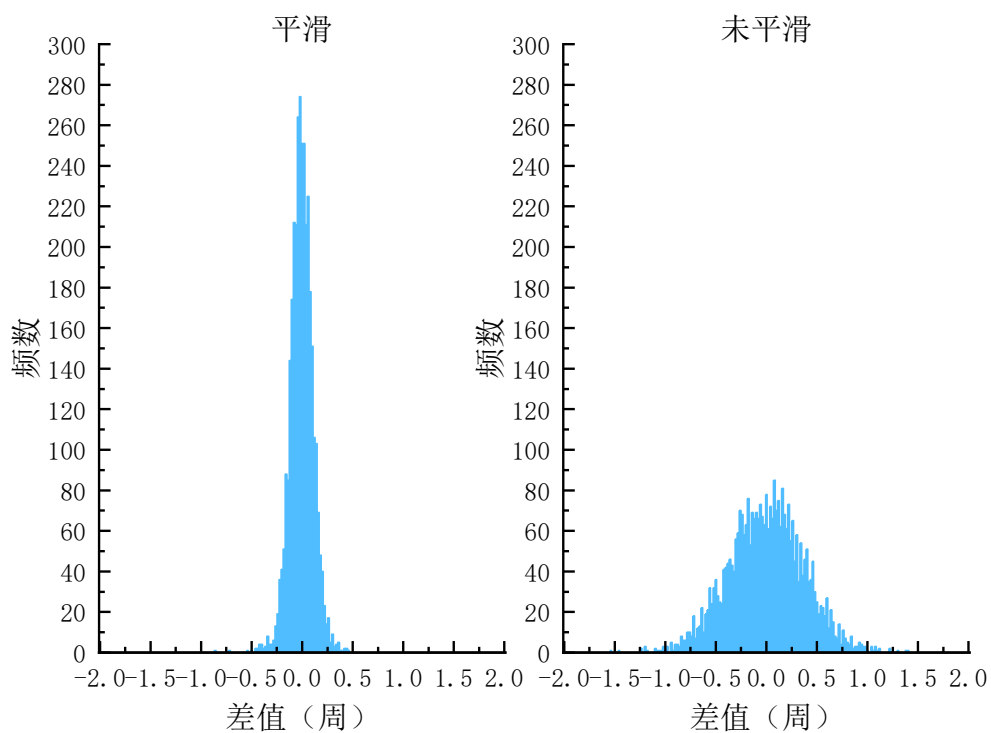


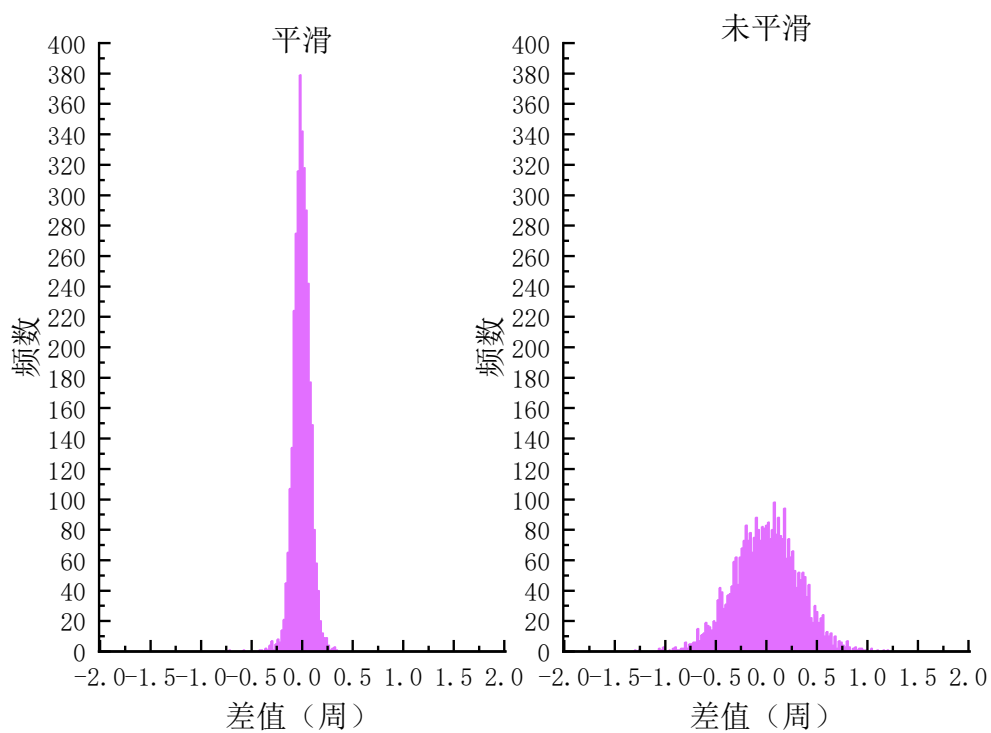
图 6.4 WTZR G24 所有周跳探测量时间变化序列。(a) GFIF (b) (1,-2,1) (c) (-3,3,1)

为更直观展示相位平滑伪距抑制伪距噪声和多路径效应之后，对周跳修复的提升效果，图 6.5 用直方图的形式展示了 AIRA J01 卫星观测数据平滑与不平时周跳浮点值与真值之间的差值。经过统计，未平滑时 3 个频点周跳浮点值与真值在  $-0.5 - 0.5$  区间的比率分别为 83.41%、89.51%、93.75%，而平滑后比率分别提高至 99.91%、99.94%和 99.94%。图 6.6 展示了低轨卫星，在平滑与未平滑的情况下，计算得到的周跳浮点值与固定值之间差距的时间序列图。很明显，伪距观测值经过平滑去噪之后，周跳浮点值与真实值更为接近。这些结果表明：在对伪距进行平滑降噪之后，周跳浮点值与真值的差值大幅减小，即受到的伪距噪声和多路径的影响越小，周跳确定成功率就越高。





(a) L1 频点



(b) L2 频点

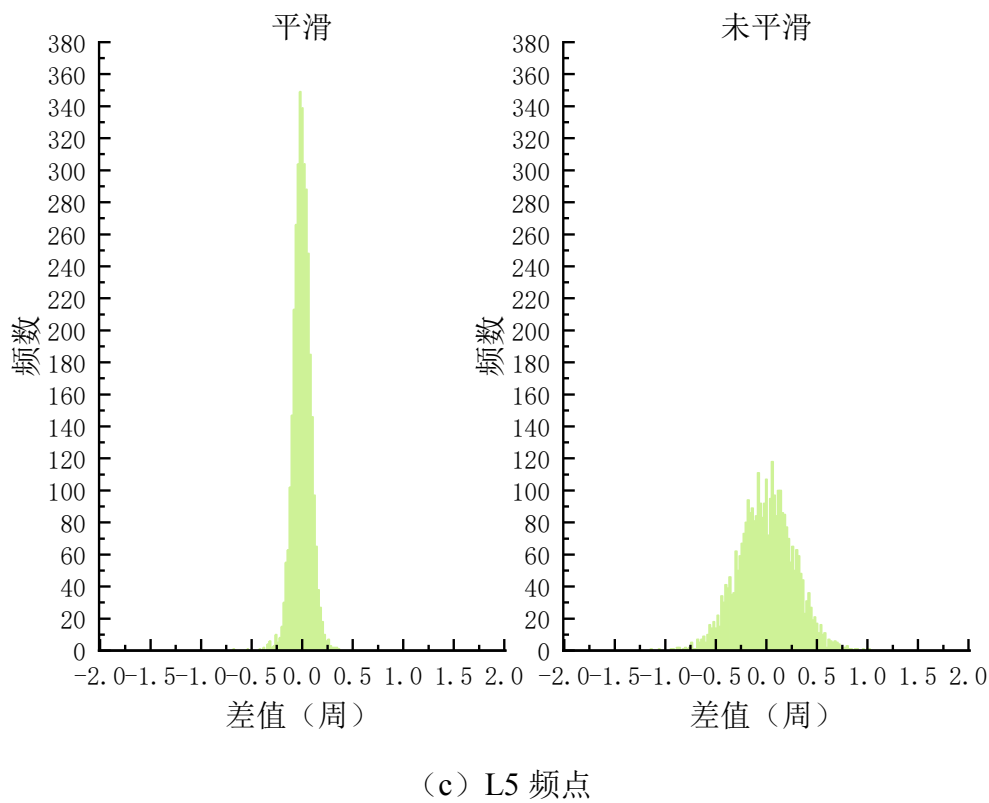
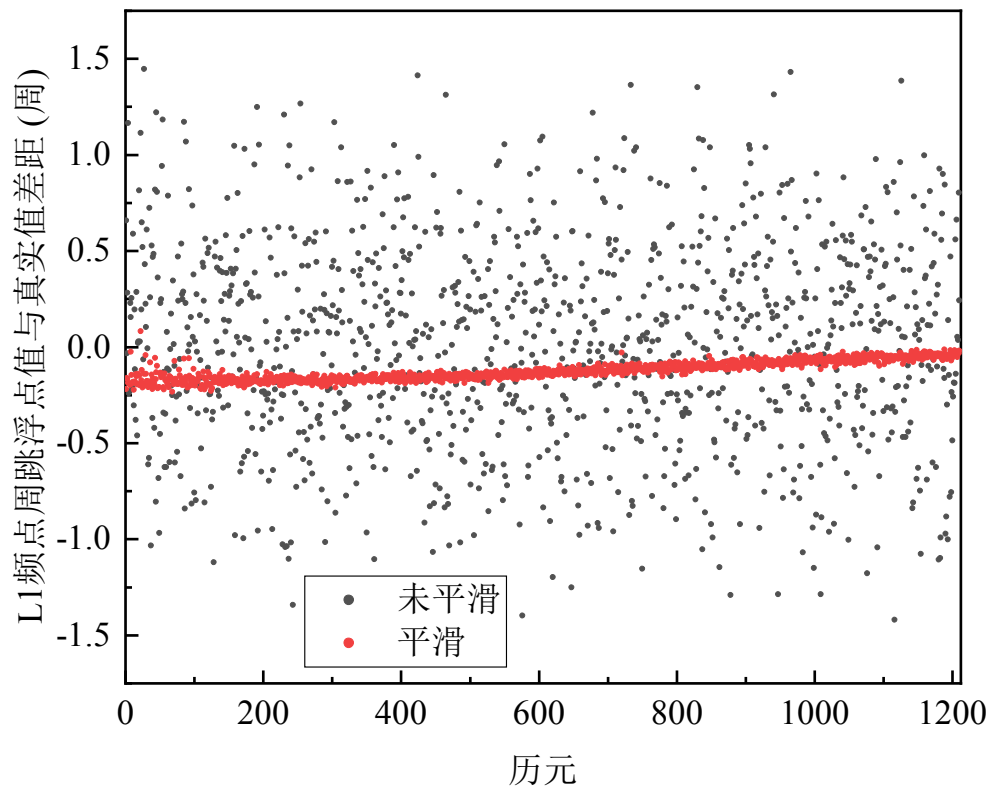


图 6.5 AIRA J01 平滑前后周跳浮点值与真值差距对比



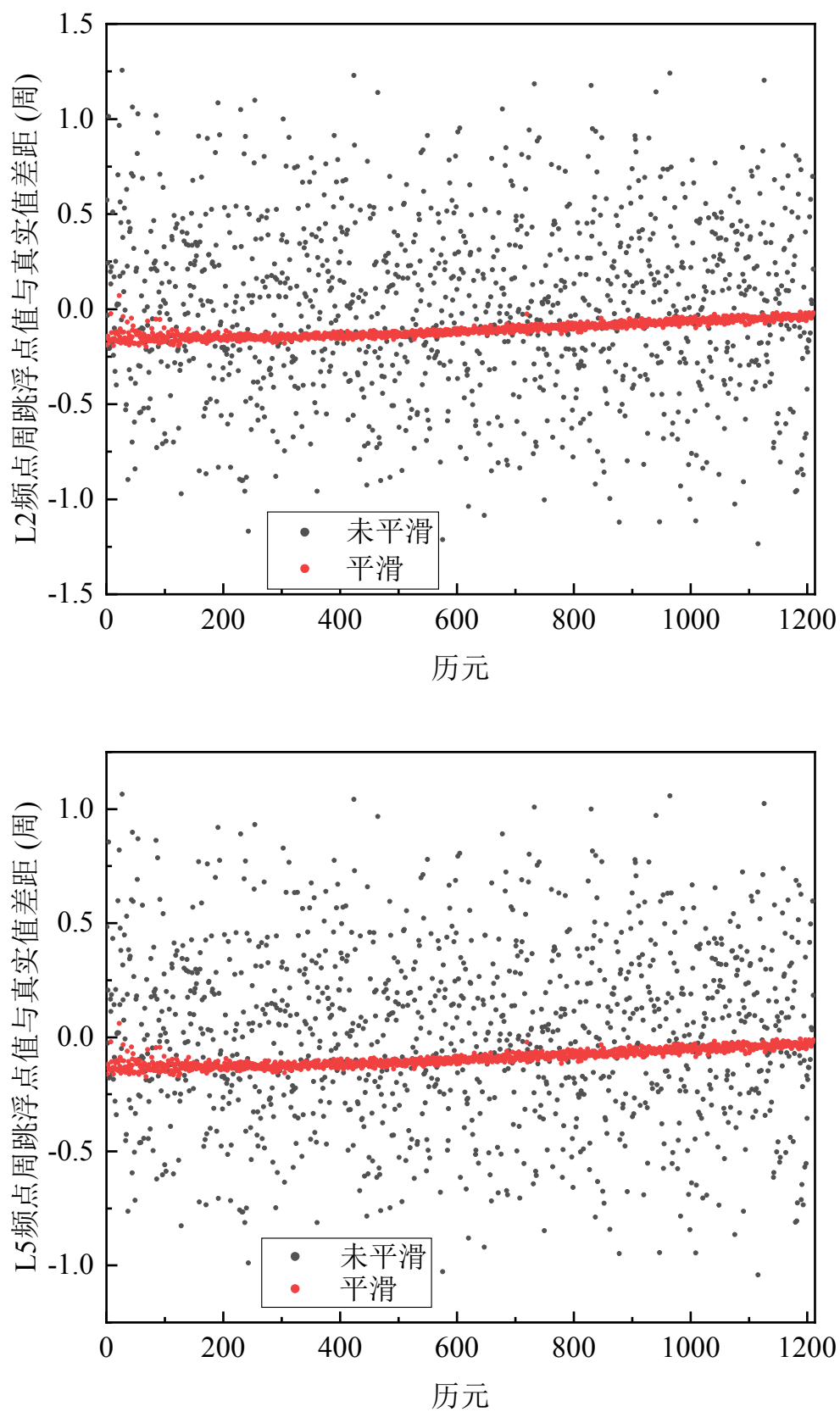


图 6.6 低轨卫星平滑前后周跳浮点值与真值差距时间序列

表 6.8 和表 6.9 为 AIRA 测站对 QZSS J01 卫星部分历元分为平滑和不平滑 2 种方式修复周跳的结果。从中可以看到：经过相位平滑伪距后，可不同程度缩小跳变量浮点值与真值之间的差值，也即缓解了伪距观测噪声和多路径效应对周跳修复的影响。经统计发现，相关文献算法的不敏感周跳组合[5, 4, 4]<sup>[176]</sup>，修复失败的周跳组合[1, 1, 1]<sup>[136]</sup>，在本实验中所有卫星数据中的周跳，均被正确探测修复。

表 6.8 AIRA J01 周跳探测修复结果（未平滑，部分）

历元	周跳浮点值/周跳固定值(L1 L2 L5)			固定值减浮点值(L1 L2 L5)		
35	-0.972164/ <b>0</b>	-0.844912/ <b>0</b>	6.282125/ <b>7</b>	0.972164	0.844912	0.717875
50	0.727314/ <b>0</b>	0.640772/ <b>0</b>	10.534015/ <b>10</b>	-0.727314	-0.640772	-0.534015
7805	6.73635/ <b>6</b>	14.626649/ <b>14</b>	1.538253/ <b>1</b>	-0.736350	-0.626649	-0.538253
780	7.542498/ <b>7</b>	0.459355/ <b>0</b>	1.404499/ <b>1</b>	-0.542498	-0.459355	-0.404499
16580	13.352482/ <b>14</b>	10.461344/ <b>11</b>	0.524476/ <b>1</b>	0.647518	0.538656	0.475524
16765	12.796851/ <b>14</b>	11.971721/ <b>13</b>	7.112624/ <b>8</b>	1.203149	1.028279	0.887376

表 6.9 AIRA J01 周跳探测修复结果（平滑，部分）

历元	周跳浮点值/周跳固定值(L1 L2 L5)			固定值减浮点值(L1 L2 L5)		
35	-0.000298/ <b>0</b>	0.004586/ <b>0</b>	7.009254/ <b>7</b>	0.000298	-0.004586	-0.009254
50	0.015081/ <b>0</b>	0.028035/ <b>0</b>	10.020773/ <b>10</b>	-0.015081	-0.028035	-0.020773
7805	6.10343/ <b>6</b>	14.078762/ <b>14</b>	1.075399/ <b>1</b>	-0.10343	-0.078762	-0.075399
7880	5.950894/ <b>6</b>	12.970823/ <b>13</b>	14.963658/ <b>15</b>	0.049106	0.029177	0.036342
16580	13.882467/ <b>14</b>	10.921867/ <b>11</b>	0.915538/ <b>1</b>	0.117533	0.078133	0.084462
16765	13.890845/ <b>14</b>	12.922437/ <b>13</b>	7.920061/ <b>8</b>	0.109155	0.077563	0.079939

表 6.10 统计了周跳浮点值与真值之间 RMS 误差统计值。从表中可以看到，经过相位平滑伪距之后，J01 和 G08 卫星的差异最显著，对于北斗 C06、C08 和 C12 卫星也有一定程度改善。对于 GPS/QZSS 卫星三个频点 L1、L2、L5 采用相位平滑伪距方法，RMS 误差平均分别降低了 40.389%、40.758%和 40.023%；对于北斗卫星三个频点 B1、B2、B3，RMS 误差平均分别降低了 12.083%、14.290%和 18.781%；对于低轨卫星 RMS 误差平均分别降低了 74.31%、74.11%和 74.11%。

表 6.10 平滑前后各测站对应卫星周跳浮点值与固定值差异对比 (RMS)

测站	卫星	轨道类型	RMS (L1(B1)/L2(B2)/L5(B3)) 单位: 周					
			平滑前			平滑后		
AIRA	J01	IGSO	0.373	0.319	0.275	0.114	0.085	0.088
AIRA	G08	MEO	0.574	0.486	0.409	0.157	0.116	0.120
WTZR	G24	MEO	0.196	0.147	0.156	0.237	0.187	0.185
	C06	GEO	0.329	0.261	0.270	0.280	0.217	0.206
KZN2	C08	IGSO	0.310	0.247	0.256	0.263	0.203	0.194
	C12	MEO	0.226	0.183	0.190	0.212	0.168	0.174
NTUS	L001	低轨	0.521	0.451	0.382	0.134	0.117	0.099

对平滑前与平滑后发生的周跳误修复次数统计如表 6.11 所示。从表中可以看到, 相位平滑伪距大幅缓解了伪距观测噪声和多路径效应的影响, 周跳误修复的次数较未平滑时大幅降低。WTZR 测站 1 Hz 观测数据受到电离层延迟影响严重, 2013 年 3 月 17 日有大规模磁暴发生, TEC 变化活跃, 但使用本文算法仍然可以正确探测修复人为加入的周跳。这说明在电离层活跃期间, 对于中、高轨卫星不低于 1 Hz 的观测数据, 本文算法仍然有效。

表 6.11 周跳误修复次数统计

测站	卫星	轨道类型	误修复次数 单位: 次	
			平滑前	平滑后
AIRA	J01	IGSO	0	0
AIRA	G08	MEO	25	0
WTZR	G24	MEO	0	0
NTUS	L001	低轨	1	0
	C06	GEO	1	0
KZN2	C08	IGSO	3	0
	C12	MEO	1	1

## 6.4 本章总结

采用相位平滑伪距辅助多频周跳探测与修复的算法, 大幅提高了伪距噪声和多路径效应较严重时修复周跳的成功率。经过相位平滑伪距后, 无论是

GPS/QZSS、北斗、还是低轨卫星，解算得到周跳浮点值与真值之间的差异均方根误差都得到了明显降低。利用电离层活跃期间的数据分析表明，本文算法对于采样频率高于 1 Hz 数据也能够正确地进行周跳探测与修复。对于更低频率，在电离层变化剧烈的情况下，在历元间观测值进行差分的误差消除的效果比高频数据消除的效果差，周跳探测与修复效果也将变差。此外，对于超高动态载体，由于其运动速度快，环境变化剧烈，该方法的实用性需要进一步研究。

## 第7章 结论与展望

### 7.1 结论

低轨卫星增强 GNSS 是未来卫星导航产业,极具潜力的发展方向之一。但该项技术目前仍然处于理论论证阶段,许多具体技术问题还需要深入研究。本文对于在实现低轨卫星增强 GNSS 过程中,可能遇到的若干关键技术问题进行了讨论。重点研究了低轨卫星的广播星历设计问题。针对低轨卫星的运行特性,提出了两种可能的解决方案。此外,还提出了扩展的概率模型,以适用于在全球范围内,方便快捷地评估包括高、中、低和椭圆轨道卫星在内的星座设计方案的评估;尝试使用相位平滑伪距方法对观测值进行去噪,并使用高、中、低轨卫星的观测值对该进行验证。具体研究成果及结论如下:

- (1) 对广播星历的参数拟合过程中的关键问题进行分析,提出并验证了一种方便简单的广播星历参数拟合策略。本文提出采用数值导数法计算每个广播星历参数的偏导数,以避免解析法计算偏导数的复杂推导过程。在估计参数时,为了缓解法方程病态造成的影响,采用基于 QR 分解的迭代计算方法估计参数。使用德国地学研究中心发布的事后精密星历,对本文提出的星历拟合策略进行验证,结果表明采用数值导数法计算偏导数并不会造成拟合精度的损失;使用基于 QR 分解的迭代方法拟合参数时,相比于最小二乘方法,可以明显减少迭代次数,提高拟合精度,也即缓解了法方程病态造成的影响;
- (2) 针对使用轨道根数型广播星历存在的奇异问题,本文考虑使用无奇点轨道根数设计适合于低轨卫星的广播星历。分别基于第一类无奇点、第二类无奇点和基于第二类无奇点改进轨道根数,为低轨卫星设计广播星历。利用仿真与真实的精密星历,拟合这几种广播星历。在轨道偏心率,轨道倾角,轨道高度以及拟合时间长度这几个方面,对轨道根数型广播星历进行测试。实验结果发现:基于第一类无奇点设计的广播星历,虽然可以解决小轨道偏心率引起的奇异问题,但是当轨道倾角比较小时,仍然存在奇异问题,造成星历参数拟合失败或者拟合误差过大;与此相反的是,对于基于第二类无奇点设计的广播星历,能够同时解决小偏心率与小轨道倾角引起的奇异问题。然而,当轨道倾角较大时仍然会因为奇异问题,而无法成功拟合参数;针对以上问题,本文采用基于第二类无奇点改进的轨道根数设计广

播星历,解决了上述两类无奇点轨道存在的奇异问题。使用仿真的与真实的低轨卫星精密轨道数据进行测试,本文基于改进的第二类无奇点轨道根数设计的广播星历方案,对于 600 km 至 1400 km 轨道高度的低轨卫星,当拟合时间长度为 20 min 时,均满足了相关设计要求;

- (3) 鉴于轨道根数类型广播星历存在的奇点问题,考虑到矢量积分型广播星历,具有良好的无奇异特性。本文试图从另一个角度设计低轨卫星广播星历。针对低轨卫星运行特点,以标准的 GLONASS 广播星历模型为基础,设计了适用于低轨卫星的广播星历。并从积分方法,积分步长,轨道倾角,轨道偏心率与轨道高度这几个方面,对本文提出的设计方案进行测试。同样经过仿真的与真实低轨卫星精密轨道测试,对于 600 km 至 1400 km 轨道高度的低轨卫星,当拟合时间长度为 20 min 时,均满足了相关设计标准;
- (4) 本文对于轨道根数型与矢量积分型广播星历进行了比较分析。即使采用了基于第二类无奇点改进轨道根数设计广播星历,但这种轨道根数的广播星历的无奇点特性,仍然不如矢量积分型广播星历。笔者采用同样的广播星历拟合策略,虽然矢量积分型广播星历需要拟合更多的广播星历参数,但其所需迭代次数仍然要比轨道根数型广播星历少。通常,轨道根数型广播星历平均需要拟合 7 至 8 次,才能收敛。但矢量积分型广播星历仅需拟合 3 至 4 次,便可收敛。矢量积分型广播星历不适合长时间的轨道运动学描述,而轨道根数型广播星历在长时间卫星轨道描述方面更具优势。此外,轨道根数类型广播星历,容易受到轨道偏心率的影响。当轨道偏心率较大时,轨道根数型广播拟合精度急剧下降,但是矢量积分型广播星历拟合精度依旧相对稳定;
- (5) 考虑到目前的 GNSS 系统,在高纬度地区卫星空间分布状态不佳的问题。提出尝试将处于椭圆轨道的 Molniya 卫星引入 GNSS 系统并与低轨卫星一起组成 GNSS+星座。在实现低轨卫星增强 GNSS 过程中,星座设计方案的评估是非常重要的环节之一。传统的方法,需要真实的或者经过复杂计算的仿真精密星历。本文对传统的概率模型进行优化,提出了扩展的概率模型,使其适用于椭圆轨道卫星。概率模型仅需一些基本的星座设计参数,便可在全球范围内评估某个星座设计方案的可见性、DOP 值分布、大地高与接收机钟差相关程度等性能指标。采用精密星历验证了概率模型可靠性。通过概率模型,本文对北斗三号与 GPS 的星座性能进行了比较分析;对椭圆轨道卫星,在未来的 GNSS 系统中起到的作用,进行了分析;最后,对低轨卫星、椭圆轨道卫星与北斗三号星座组成的 GNSS+星座的实用性能进行了具有前瞻性的分析;



- (6) 多频信号是 GNSS 现代化的重要方向之一。相关研究表明,多频信号有助于加快精密单点定位收敛速度并提高模糊度固定成功率。周跳问题是多频信号预处理的重要问题之一。同时,在实现低轨卫星增强 GNSS 的过程中,低轨卫星的周跳问题尚缺少讨论。本文考虑到目前的周跳探测修复算法,鲜有尝试通过伪距观测值降噪的方式,提升周跳探测修复成功率。因此,本文提出使用相位平滑伪距方法,对伪距观测值去噪,以达到提升周跳探测修复成功率的目的。分析了 Hatch 与 Divergence-Free 这两种相位平滑伪距方式的特点,Divergence-Free 滤波可以实现双频相位平滑单频伪距,适合应用在周跳探测修复算法中。使用真实的 GPS、QZSS 与北斗卫星的观测数据和仿真的低轨卫星对地观测数据,对本方法进行验证。实验结果表明:采用相位平滑伪距方法之后,能缓解伪距噪声及其多路径效应的影响,有效提高周跳探测修复成功率。

## 7.2 进一步工作方向

针对现有的研究状态,在未来的工作中仍然有许多问题需要解决,笔者深刻意识到本文的研究还有诸多方面应该完善,需要进一步研究:

- (1) 考虑到椭圆轨道卫星在未来可能起到的重要作用,应针对其运行特点,设计相适合的广播星历。并尝试将高、中、低与椭圆轨道卫星的广播星历模型实现统一;
- (2) 基于 GEO 卫星的信息域星基增强系统,无法覆盖南北纬  $72^{\circ}$  以上的区域,但高纬度地区对于增强服务的需求也越来越强烈。因此,考虑研究基于椭圆轨道卫星构建信息域的星基增强系统;
- (3) 由于低轨卫星增强 GNSS 尚在理论验证阶段,许多细节问题还缺乏讨论。其中,对于周跳问题还需要进一步研究。由于低轨卫星运行速度快,单位时间内在空中划过的轨迹更长,更容易受到电离层影响,因此传统的周跳探测修复方法可能会失效。而本文提出的方法,也因此而受限于数据采样率的问题。而且,周跳探测阈值应考虑卫星高度角的影响,本文的方法需要改进。为此,在今后的研究工作中,重点研究如何避免电离层延迟对于低轨卫星周跳探测问题的影响;阈值如何自适应卫星高度角。同时,也有学者提出低轨卫星可能会使用 S 或者 C 波段信号提供导航服务,在新的信号体制下应该如何进行周跳探测修复也应进行深入研究。此外,考虑到低轨卫星观测值多普勒效应比较显著,应考虑将多普勒观测值应用于辅助

多频周跳探测修复;

- (4) 为了解决拟合轨道根数型广播时, 奇异问题造成的拟合失败问题, 本文进行了相关讨论。岭估计方法也是解决病态方程的有效策略之一, 在后续研究中, 将会探讨能否在仍然使用经典开普勒轨道根数的前提下, 采用岭估计方法解决奇异问题;
- (5) 由于大椭圆轨道卫星在运行过程中轨道高度变化大, 其星载接收机在一定条件下可以同时接收高、中、低轨卫星的观测数据, 可形成大量的掩星事件。这对于电离层建模、水汽反演等研究可能起到的作用, 值得尝试进行研究。此外, 在考虑将大椭圆轨道卫星加入导航星座时, 应进一步考虑其导航信号设计问题。由于轨道轨道偏心率较大, 卫星处于近地点 500 km 和远地点 40000 km 时信号强度与波束角都存在明显不同, 动力学特征也存在较大差异, 要特别考虑卫星下行信号的落地电平功率的影响;
- (6) 深空探测将会是未来空间信息科学的研究热点之一。月球与地球的航天器往返也会越来越频繁。现存的 GNSS 系统, 也应从仅为地球提供 PNT 服务扩展至向月球-地球系统。现在, 也有学者研究如何使用 Galileo 系统, 为月球上运行的探测器提供导航服务。如何为月球-地球系统设计合适的导航星座也是未来需要仔细研究的。同时, 对于概率模型还需要进一步扩展, 以适合于评估月球-地球卫星导航星座的性能;
- (7) 广播星历的误差源主要来自: 预报星历存在误差、拟合广播星历参数时造成的误差与数据截断误差。本文重点研究了如何设计适合的低轨卫星广播星历模型, 以尽可能减少拟合误差。低轨卫星精密轨道预报应该采取哪些策略, 如何为低轨卫星设计广播星历电文结构也是实现低轨卫星增强 GNSS 过程中需要仔细研究的问题。预报与拟合广播星历过程中, 在不同坐标系是否有差异也应该仔细探讨。考虑到为解决这 2 个问题所涉及的相关理论问题比较复杂, 内容较多, 在今后的研究工作中将会进行系统研究。

## 参考文献

- [1] 董大南, 陈俊平, 王解先. GNSS高精度定位原理[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [2] 宁津生, 姚宜斌, 张小红. 全球导航卫星系统发展综述[J]. 导航定位学报, 2013, 1(1): 3–8. DOI:10.16547/j.cnki.10-1096.2013.01.005.
- [3] Kouba J, Héroux P. Precise Point Positioning Using IGS Orbit and Clock Products[J/OL]. GPS Solutions, 2001, 5(2): 12–28. <http://link.springer.com/10.1007/PL00012883>. DOI:10.1007/PL00012883.
- [4] Xu G, Xu Y. GPS:Theory,Algorithms and Applications[M/OL]. Third Edit edition. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2016. <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-50367-6>. DOI:10.1007/978-3-662-50367-6.
- [5] 张小红, 李星星, 李盼. GNSS精密单点定位技术及应用进展[J]. 测绘学报, 2017, 46(10): 1339–1406. DOI:10.11947/j.AGCS.2017.20170327.
- [6] Nerem R S, Larson K M. Global Positioning System, Theory and Practice, 5th Edition[J/OL]. Eos, Transactions American Geophysical Union, 2001, 82(33): 365–365. <http://doi.wiley.com/10.1029/01EO00224>. DOI:10.1029/01EO00224.
- [7] Zumberge J F, Heflin M B, Jefferson D C, et al. Precise Point Positioning for the Efficient and Robust Analysis of GPS Data from Large Networks[J/OL]. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 1997, 102(B3): 5005–5017. <http://doi.wiley.com/10.1029/96JB03860>. DOI:10.1029/96JB03860.
- [8] 杨元喜. 综合PNT体系及其关键技术[J]. 测绘学报, 2016, 45(5): 505–510. DOI:10.11947/j.AGCS.2016.20160127.
- [9] 杨元喜. 弹性PNT基本框架[J]. 测绘学报, 2018, 47(7): 893–898. DOI:10.11947/j.AGCS.2018.20180149.
- [10] Choy S, Bisnath S, Rizos C. Uncovering Common Misconceptions in GNSS Precise Point Positioning and Its Future Prospect[J/OL]. GPS Solutions, 2017, 21(1): 13–22. <http://link.springer.com/10.1007/s10291-016-0545-x>. DOI:10.1007/s10291-016-0545-x.
- [11] Chen J, Wang J, Zhang Y, et al. Modeling and Assessment of GPS/BDS Combined Precise Point Positioning[J]. Sensors (Switzerland), 2016, 16(7). DOI:10.3390/s16071151.
- [12] Pan L, Zhang X, Li X, et al. Satellite Availability and Point Positioning Accuracy Evaluation on a Global Scale for Integration of GPS, GLONASS, BeiDou and Galileo[J/OL]. Advances in Space Research, 2017(July). <http://dx.doi.org/10.1016/j.asr.2017.07.029>. DOI:10.1016/j.asr.2017.07.029.
- [13] Cai C, Gao Y. Modeling and Assessment of Combined GPS/GLONASS Precise Point Positioning[J/OL]. GPS Solutions, 2013, 17(2): 223–236. <http://link.springer.com/10.1007/s10291-012-0273-9>. DOI:10.1007/s10291-012-0273-9.
- [14] Chen J, Zhang Y, Wang J, et al. A Simplified and Unified Model of Multi-GNSS Precise Point Positioning[J/OL]. Advances in Space Research, 2015, 55(1): 125–134. <http://dx.doi.org/10.1016/j.asr.2014.10.002>. DOI:10.1016/j.asr.2014.10.002.

- [15] Cai C, Gao Y, Pan L, et al. Precise Point Positioning with Quad-Constellations: GPS, BeiDou, GLONASS and Galileo[J/OL]. *Advances in Space Research*, 2015, 56(1): 133–143. <http://dx.doi.org/10.1016/j.asr.2015.04.001>. DOI:10.1016/j.asr.2015.04.001.
- [16] Yang Y, Li J, Xu J, et al. Contribution of the Compass Satellite Navigation System to Global PNT Users[J/OL]. *Chinese Science Bulletin*, 2011, 56(26): 2813–2819. <http://link.springer.com/10.1007/s11434-011-4627-4>. DOI:10.1007/s11434-011-4627-4.
- [17] Li X, Ge M, Dai X, et al. Accuracy and Reliability of Multi-GNSS Real-Time Precise Positioning: GPS, GLONASS, BeiDou, and Galileo[J/OL]. *Journal of Geodesy*, 2015, 89(6): 607–635. <http://link.springer.com/10.1007/s00190-015-0802-8>. DOI:10.1007/s00190-015-0802-8.
- [18] Duong V, Harima K, Choy S, et al. An Optimal Linear Combination Model to Accelerate PPP Convergence Using Multi-Frequency Multi-GNSS Measurements[J/OL]. *GPS Solutions*, 2019, 23(2): 49. [http://link.springer.com/article/10.1007/s10291-019-0842-2?utm\\_source=researcher\\_app&utm\\_medium=referral&utm\\_campaign=MKEF\\_USG\\_Researcher\\_inbound](http://link.springer.com/article/10.1007/s10291-019-0842-2?utm_source=researcher_app&utm_medium=referral&utm_campaign=MKEF_USG_Researcher_inbound). DOI:10.1007/s10291-019-0842-2.
- [19] Li X, Li X, Liu G, et al. BDS Multi-Frequency PPP Ambiguity Resolution with New B2a/B2b/B2a + b Signals and Legacy B1I/B3I Signals[J/OL]. *Journal of Geodesy*, 2020, 94(10): 107. <https://doi.org/10.1007/s00190-020-01439-8>. DOI:10.1007/s00190-020-01439-8.
- [20] Li X, Li X, Liu G, et al. Triple-Frequency PPP Ambiguity Resolution with Multi-Constellation GNSS: BDS and Galileo[J/OL]. *Journal of Geodesy*, 2019, 93(8): 1105–1122. <https://doi.org/10.1007/s00190-019-01229-x>. DOI:10.1007/s00190-019-01229-x.
- [21] Li X, Liu G, Li X, et al. Galileo PPP Rapid Ambiguity Resolution with Five-Frequency Observations[J/OL]. *GPS Solutions*, 2020, 24(1): 24. <https://doi.org/10.1007/s10291-019-0930-3>. DOI:10.1007/s10291-019-0930-3.
- [22] 张小红, 柳根, 郭斐, 等. 北斗三频精密单点定位模型比较及定位性能分析[J]. *武汉大学学报 (信息科学版)*, 2018, 43(12): 2124–2130. DOI:10.13203/j.whugis20180078.
- [23] 周峰, 徐天河. GPS/BDS/Galileo三频精密单点定位模型及性能分析[J]. *测绘学报*, 2021, 50(1): 61–70. DOI:10.11947/j.AGCS.2021.20200146.
- [24] 喻思琪, 张小红, 郭斐, 等. 卫星导航逼近技术进展[J]. *航空学报*, 2019, 40(3): 37–39. DOI:10.7527/S1000-6893.2019.22200.
- [25] Enge P, Walter T, Pullen S, et al. Wide Area Augmentation of the Global Positioning System[J/OL]. *Proceedings of the IEEE*, 1996, 84(8): 1063–1088. <http://ieeexplore.ieee.org/document/533954/>. DOI:10.1109/5.533954.
- [26] Benedicto J, Michel P, Ventura-Traveset J. EGNOS: Project Status Overview[J/OL]. *Air & Space Europe*, 1999, 1(1): 58–64. <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1290095899800410>. DOI:10.1016/S1290-0958(99)80041-0.
- [27] Sergey V. Averin V V D and S N K. Russian System For Differential Correction And Monitoring: A Concept, Present Status, And Prospects For Future[C]//*Proceedings of the 20th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of*

- Navigation (ION GNSS 2007), Fort Worth, TX, September 2007. .
- [28] 楼益栋, 郑福, 龚晓鹏, 等. QZSS系统在中国区域增强服务性能评估与分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2016, 41(3): 298–303. DOI:10.13203/j.whugis20140273.
- [29] 王阿昊, 陈俊平, 张益泽, 等. 基于分区综合改正数的北斗卫星导航系统和GPS组合的动态精密单点定位[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2020, 48(3): 447–455. DOI:10.11908/j.issn. 0253-374x. 19088.
- [30] 陈俊平, 于超, 周建华, 等. 北斗二号/三号融合的分米级星基增强算法与性能分析[J/OL]. 中国科学:物理学 力学 天文学, 2021, 51(1): 9. <http://engine.scichina.com/doi/10.1360/SSPMA-2020-0327>. DOI:10.1360/SSPMA-2020-0327.
- [31] Chen J, Wang A, Zhang Y, et al. BDS Satellite-Based Augmentation Service Correction Parameters and Performance Assessment[J/OL]. Remote Sensing, 2020, 12(5): 766. <https://www.mdpi.com/2072-4292/12/5/766>. DOI:10.3390/rs12050766.
- [32] 陈俊平, 张益泽, 周建华. 分区综合改正:服务于北斗分米级星基增强系统的差分改正模型[J]. 测绘学报, 2018, 47(9): 1161–1170.
- [33] 张益泽, 陈俊平, 杨赛男, 等. 北斗广域差分分区综合改正数定位性能分析[J/OL]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(2): 159–165. <http://library1.nida.ac.th/termpaper6/sd/2554/19755.pdf>. DOI:10.13203/j.whugis20170044.
- [34] Haugg S, Richert W, Leoson R. EGNOS Trial on North Atlantic and Arctic Ocean[C]//Proceedings of the 14th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 2001) September 11 - 14, 2001 Salt Palace Convention Center Salt Lake City, UT. .
- [35] Zhao Q, Pan S, Gao C, et al. BDS/GPS/LEO Triple-Frequency Uncombined Precise Point Positioning and Its Performance in Harsh Environments[J/OL]. Measurement, 2020, 151: 107216. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2019.107216>. DOI:10.1016/j.measurement.2019.107216.
- [36] 王磊, 陈锐志, 李德仁, 等. 珞珈一号低轨卫星导航增强系统信号质量评估[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2018, 43(12): 2191–2196. DOI:10.13203/j.whugis20180413.
- [37] Lei W, Ruizhi C, Deren L, et al. Initial Assessment of the LEO Based Navigation Signal Augmentation System from Luojia-1A Satellite[J/OL]. Sensors, 2018, 18(11): 3919. <http://www.mdpi.com/1424-8220/18/11/3919>. DOI:10.3390/s18113919.
- [38] 张小红, 马福建. 低轨导航增强GNSS发展综述[J]. 测绘学报, 2019, 48(9): 1073–1087. DOI:10.11947/j.AGCS.2019.20190176.
- [39] Reid T G R, Neish A M, Walter T F, et al. Leveraging Commercial Broadband LEO Constellations for Navigation[J]. 29th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, ION GNSS 2016, 2016, 4(October): 2300–2314. DOI:10.33012/2016.14729.
- [40] Maine K, Devieux C, Swan P. Overview of IRIDIUM Satellite Network[C/OL]//Proceedings of WESCON'95. IEEE, 2015: 483. <http://ieeexplore.ieee.org/document/485428/>. DOI:10.1109/WESCON.1995.485428.
- [41] Fossa C E, Raines R A, Gunsch G H, et al. An Overview of the IRIDIUM (R) Low Earth

- Orbit (LEO) Satellite System[C/OL]//Proceedings of the IEEE 1998 National Aerospace and Electronics Conference. NAECON 1998. Celebrating 50 Years (Cat. No.98CH36185). IEEE, 1998: 152–159. <http://ieeexplore.ieee.org/document/710110/>. DOI:10.1109/NAECON.1998.710110.
- [42] Joerger M, Neale J, Pervan B. Iridium/GPS Carrier Phase Positioning and Fault Detection over Wide Areas[C/OL]//22nd International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation 2009, ION GNSS 2009 Volume 3, 2009, Pages 1685-1699. . <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-77952191118&partnerID=tZOtx3y1>.
- [43] Joerger M, Gratton L, Pervan B, et al. Analysis of Iridium-Augmented GPS for Floating Carrier Phase Positioning[J]. Navigation, Journal of the Institute of Navigation, 2010, 57(2): 137–160. DOI:10.1002/j.2161-4296.2010.tb01773.x.
- [44] Li B, Ge H, Ge M, et al. LEO Enhanced Global Navigation Satellite System (LeGNSS) for Real-Time Precise Positioning Services[J/OL]. Advances in Space Research, 2019, 63(1): 73–93. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2018.08.017>. DOI:10.1016/j.asr.2018.08.017.
- [45] Li X, Ma F, Li X, et al. LEO Constellation-Augmented Multi-GNSS for Rapid PPP Convergence[J/OL]. Journal of Geodesy, 2019, 93(5): 749–764. <https://doi.org/10.1007/s00190-018-1195-2>. DOI:10.1007/s00190-018-1195-2.
- [46] Ma F, Zhang X, Li X, et al. Hybrid Constellation Design Using a Genetic Algorithm for a LEO-Based Navigation Augmentation System[J/OL]. GPS Solutions, 2020, 24(2): 62. <https://doi.org/10.1007/s10291-020-00977-0>. DOI:10.1007/s10291-020-00977-0.
- [47] Rabinowitz M, Spilker J J. A New Positioning System Using Television Synchronization Signals[J/OL]. IEEE Transactions on Broadcasting, 2005, 51(1): 51–61. <http://ieeexplore.ieee.org/document/1406152/>. DOI:10.1109/TBC.2004.837876.
- [48] Ge H, Li B, Ge M, et al. Initial Assessment of Precise Point Positioning with LEO Enhanced Global Navigation Satellite Systems (LeGNSS)[J/OL]. Remote Sensing, 2018, 10(7): 984. <http://www.mdpi.com/2072-4292/10/7/984>. DOI:10.3390/rs10070984.
- [49] Enge P, Ferrell B, Bennett J, et al. Orbital Diversity for Satellite Navigation[C]//Proceedings of the 25th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2012), Nashville, TN, September 2012. .
- [50] Shiwei Tian, Weiheng Dai, Renfu Liu, et al. System Using Hybrid LEO-GPS Satellites for Rapid Resolution of Integer Cycle Ambiguities[J/OL]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2014, 50(3): 1774–1785. <http://ieeexplore.ieee.org/document/6965738/>. DOI:10.1109/TAES.2014.120662.
- [51] Li X, Lv H, Ma F, et al. GNSS RTK Positioning Augmented with Large LEO Constellation[J/OL]. Remote Sensing, 2019, 11(3): 16. <http://www.mdpi.com/2072-4292/11/3/228>. DOI:10.3390/rs11030228.
- [52] Li X, Li X, Ma F, et al. Improved PPP Ambiguity Resolution with the Assistance of Multiple LEO Constellations and Signals[J/OL]. Remote Sensing, 2019, 11(4): 408. <http://www.mdpi.com/2072-4292/11/4/408>. DOI:10.3390/rs11040408.
- [53] Rabinowitz M, Parkinson B W, Cohen C E, et al. A System Using LEO

- Telecommunication Satellites for Rapid Acquisition of Integer Cycle Ambiguities[C/OL]/IEEE 1998 Position Location and Navigation Symposium (Cat. No.98CH36153). IEEE, 1998: 137–145. <http://ieeexplore.ieee.org/document/670034/>. DOI:10.1109/PLANS.1998.670034.
- [54] Ke M, Lv J, Chang J, et al. Integrating GPS and LEO to Accelerate Convergence Time of Precise Point Positioning[C/OL]/2015 International Conference on Wireless Communications & Signal Processing (WCSP). IEEE, 2015: 1–5. <http://ieeexplore.ieee.org/document/7341230/>. DOI:10.1109/WCSP.2015.7341230.
- [55] Xie X, Geng T, Zhao Q, et al. Design and Validation of Broadcast Ephemeris for Low Earth Orbit Satellites[J/OL]. GPS Solutions, 2018, 22(2): 1–11. <https://doi.org/10.1007/s10291-018-0719-9>. DOI:10.1007/s10291-018-0719-9.
- [56] De Selding P B. Virgin Qualcomm Invest in One Web Satellite Internet Venture[EB/OL]([no date])[2015–01–15]. <https://spacenews.com/virgin-qualcomm-invest-in-global-satellite-internet-plan/>.
- [57] Nyirady A. SpaceX Receives FCC Approval to Launch 7518 Starlink Satellites[EB/OL]([no date])[2018–11–16]. <https://www.satellitetoday.com/broadband/2018/11/16/spacex-receives-fcc-approval-to-deploy-7518-satellites/>.
- [58] De Selding P B. SpaceX to Build 4000 Broadband Satellites in Seattle[EB/OL]([no date])[2015–01–19]. <https://spacenews.com/spacex-opening-seattle-plant-to-build-4000-broadband-satellites/>.
- [59] De Selding P B. Boeing Proposes Big Satellite Constellations in V- and C-Bands[EB/OL]([no date]). <https://spacenews.com/boeing-proposes-big-satellite-constellations-in-v-and-c-bands/>.
- [60] JOERGER M, GRATTON L, PERVAN B, et al. Analysis of Iridium-Augmented GPS for Floating Carrier Phase Positioning[J/OL]. Navigation, 2010, 57(2): 137–160. <http://doi.wiley.com/10.1002/j.2161-4296.2010.tb01773.x>. DOI:10.1002/j.2161-4296.2010.tb01773.x.
- [61] Gebhardt C. Iridium Boss Reflects as Final NEXT Satellite Constellation Launches[EB/OL]([no date])[2019–01–11]. <https://www.kc4mcq.us/?p=15784>.
- [62] Dietrich F J, Metzen P, Monte P. The Globalstar Cellular Satellite System[J/OL]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1998, 46(6): 935–942. <http://ieeexplore.ieee.org/document/686783/>. DOI:10.1109/8.686783.
- [63] Dvoryaninov I. Yaliny's Protocol for Low Earth Orbit Satellites[C/OL]/2015 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). IEEE, 2015: 1–3. <http://ieeexplore.ieee.org/document/7493173/>. DOI:10.1109/EWDTS.2015.7493173.
- [64] Henry C. Kepler Communications Opens Launch Bids for Gen-1 LEO Constellation[EB/OL]([no date])[2018–08–29]. <https://spacenews.com/kepler-communications-opens-launch-bids-for-gen-1-leo-constellation/>.
- [65] Mangan V. Samsung Exec Envisions LEO Constellation for Satellite Internet Connectivity[EB/OL]([no date])[2015–08–18]. <https://www.satellitetoday.com/telecom/2015/08/18/samsung-exec-envisions-leo->

- constellation-for-satellite-internet-connectivity/.
- [66] 蒙艳松, 边朗, 王瑛, 等. 基于“鸿雁”星座的全球导航增强系统[J]. 国际太空, 2018(10): 20–27.
- [67] Cnaga. CASIC Plans to Launch 156 Small Satelites for the Hongyun Satellite Program[EB/OL]([no date])[2018–03–03]. <http://en.chinabeidou.gov.cn/c/393.html>.
- [68] Jones A. Chinese Rocket Maker OneSpace Secures \$44 m in Funding: Expace Perpare for Commercial Luanch[EB/OL]([no date])[2018–08–14]. <https://spacenews.com/chinese-rocket-maker-onespace-secures-44m-in-funding-expace-prepare-for-commercial-launch/>.
- [69] Steigenberger P, Montenbruck O, Hessels U. Performance Evaluation of the Early CNAV Navigation Message[J/OL]. Navigation, 2015, 62(3): 219–228. <http://doi.wiley.com/10.1002/navi.111>. DOI:10.1002/navi.111.
- [70] Wang A, Chen J, Zhang Y, et al. Performance Evaluation of the CNAV Broadcast Ephemeris[J/OL]. Journal of Navigation, 2019, 72(5): 1331–1344. [https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S037346331900016X/type/journal\\_article](https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S037346331900016X/type/journal_article). DOI:10.1017/S037346331900016X.
- [71] Yin H, Morton Y T, Carroll M, et al. Performance Analysis of L2 and L5 CNAV Broadcast Ephemeris for Orbit Calculation[J/OL]. Navigation, Journal of the Institute of Navigation, 2015, 62(2): 121–130. <http://doi.wiley.com/10.1002/navi.84>. DOI:10.1002/navi.84.
- [72] Wu C, Mohsenian-Rad H, Huang J, et al. Demand Side Management for Wind Power Integration in Microgrid Using Dynamic Potential Game Theory[C/OL]//2011 IEEE GLOBECOM Workshops (GC Wkshps). IEEE, 2011: 1199–1204. <http://ieeexplore.ieee.org/document/6162371/>. DOI:10.1109/GLOCOMW.2011.6162371.
- [73] ICD-GLONASS. Global Navigation Satellite System GLONASS, Interface Control Document, General Description of Code Division Multiple Access Signal System[M]. Edition 1. edition. Russian Institute of Space Device Engineering, 2016.
- [74] Warren D L M, Raquet J F. Broadcast vs. Precise GPS Ephemerides: A Historical Perspective[J/OL]. GPS Solutions, 2003, 7(3): 151–156. <http://link.springer.com/10.1007/s10291-003-0065-3>. DOI:10.1007/s10291-003-0065-3.
- [75] Montenbruck O, Steigenberger P, Hauschild A. Broadcast versus Precise Ephemerides: A Multi-GNSS Perspective[J/OL]. GPS Solutions, 2015, 19(2): 321–333. <http://link.springer.com/10.1007/s10291-014-0390-8>. DOI:10.1007/s10291-014-0390-8.
- [76] Montenbruck O, Steigenberger P, Hauschild A. Multi-GNSS Signal-in-Space Range Error Assessment – Methodology and Results[J]. Advances in Space Research, 2018, 61(12): 3020–3038. DOI:10.1016/j.asr.2018.03.041.
- [77] Wang Z, Shao W, Li R, et al. Characteristics of BDS Signal-in-Space User Ranging Errors and Their Effect on Advanced Receiver Autonomous Integrity Monitoring Performance[J/OL]. Sensors, 2018, 18(12): 4475. <http://www.mdpi.com/1424-8220/18/12/4475>. DOI:10.3390/s18124475.
- [78] Lv Y, Geng T, Zhao Q, et al. Initial Assessment of BDS-3 Preliminary System Signal-in-Space Range Error[J/OL]. GPS Solutions, 2020, 24(1): 16. <https://doi.org/10.1007/s10291-019-0928-x>. DOI:10.1007/s10291-019-0928-x.



- [79] Xue B, Wang H, Yuan Y. Performance of BeiDou-3 Signal-in-Space Ranging Errors: Accuracy and Distribution[J/OL]. GPS Solutions, 2021, 25(1): 23.  
<https://doi.org/10.1007/s10291-020-01057-z>. DOI:10.1007/s10291-020-01057-z.
- [80] Diesposti R, Dilello J, Kelley C, et al. The Proposed State Vector Representation of Broadcast Navigation Message for User Equipment Implementation of GPS Satellite Ephemeris Propagation[C]//Proceedings of the 2004 National Technical Meeting of The Institute of Navigation January 26 - 28, 2004 The Catamaran Resort Hotel San Diego, CA. .
- [81] Reid T G R, Walter T, Enge P K, et al. Orbital Representations for the next Generation of Satellite-Based Augmentation Systems[J/OL]. GPS Solutions, 2016, 20(4): 737–750.  
<http://link.springer.com/10.1007/s10291-015-0485-x>. DOI:10.1007/s10291-015-0485-x.
- [82] 王解先, 王君刚, 陈俊平. 基于卫星位置与速度的北斗卫星广播星历拟合[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2016, 44(1): 155–160.
- [83] 王君刚, 王解先. GPS广播星历拟合及外推精度[J]. 辽宁工程技术大学(自然科学版), 2014, 33(8): 1118–1122. DOI:10.3969/j.issn.1008-0562.2014.08.023.
- [84] 柳青松, 刘峰, 巨涛. 小偏心率低轨卫星的星历参数拟合法[J]. 航天器工程, 2010, 19(4): 17–22.
- [85] 杜兰, 刘泽军, 周佩元, 等. 无旋转倾角的NAV/CNAV型GEO广播星历拟合[J]. 测绘学报, 2017, 46(3): 297–306. DOI:10.11947/j.AGCS.2017.20160393.
- [86] Lan D, Zhongkai Z, Jin Z, et al. An 18-Element GEO Broadcast Ephemeris Based on Non-Singular Elements[J/OL]. GPS Solutions, 2015, 19(1): 49–59.  
<http://link.springer.com/10.1007/s10291-014-0364-x>. DOI:10.1007/s10291-014-0364-x.
- [87] 张中凯, 杜兰, 刘利. GEO广播星历参数设计的无奇点根数法[J]. 测绘学报, 2014, 43(5): 452–457. DOI:10.13485/j.cnki.11-2089.2014.0076.
- [88] Reid T G R. Orbital Diversity for Global Navigation Satellite Systems[D]. Stanford University, 2017.
- [89] Forssell B. Radionavigation Systems[M]. London:Prentice Hall International, 1991.
- [90] PARKINSON B W, STANSELL T, BEARD R, et al. A History of Satellite Navigation[J/OL]. Navigation, 1995, 42(1): 109–164. <http://doi.wiley.com/10.1002/j.2161-4296.1995.tb02333.x>. DOI:10.1002/j.2161-4296.1995.tb02333.x.
- [91] Bonnor N. A Brief History of Global Navigation Satellite Systems[J/OL]. Journal of Navigation, 2012, 65(1): 1–14.  
[https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0373463311000506/type/journal\\_article](https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0373463311000506/type/journal_article). DOI:10.1017/S0373463311000506.
- [92] A T, JR S. The Navy Navigation Satellite System: Description and Status[J/OL]. Navigation, 1968, 15(3): 229–243. <http://doi.wiley.com/10.1002/j.2161-4296.1968.tb01612.x>. DOI:10.1002/j.2161-4296.1968.tb01612.x.
- [93] PISCANE V L, HOLLAND B B, BLACK H D. Recent (1973) Improvements in the Navy Navigation Satellite System[J/OL]. Navigation, 1973, 20(3): 224–229.  
<http://doi.wiley.com/10.1002/j.2161-4296.1973.tb01175.x>. DOI:10.1002/j.2161-4296.1973.tb01175.x.
- [94] Montenbruck O, Gill E. Satellite Orbits: Models, Methods, and

- Applications[M/OL]//Springer-Verlag Berlin Heidelberg. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2000. <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-58351-3>. DOI:10.1007/978-3-642-58351-3.
- [95] Xu G, Xu J. On the Singularity Problem in Orbital Mechanics[J/OL]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2013, 429(2): 1139–1148. <http://academic.oup.com/mnras/article/429/2/1139/1035924/On-the-singularity-problem-in-orbital-mechanics>. DOI:10.1093/mnras/sts403.
- [96] 阮仁桂, 贾小林, 吴显兵, 等. 关于坐标旋转法进行地球静止轨道导航卫星广播星历拟合的探讨[J]. 测绘学报, 2011, 40: 145–150.
- [97] 郭睿, 周建华, 胡小工, 等. 一种地球静止轨道卫星的快速恢复定轨方法[J]. 测绘学报, 2011, 40(增刊): 19–30.
- [98] 崔先强, 杨元喜, 吴显兵. 轨道面旋转角对GEO卫星广播星历参数拟合的影响[J]. 宇航学报, 2012, 33(5): 590–596. DOI:10.3873/j.issn.1000-1328.2012.05.010.
- [99] Fu X, Wu M. Optimal Design of Broadcast Ephemeris Parameters for a Navigation Satellite System[J/OL]. GPS Solutions, 2012, 16(4): 439–448. <http://link.springer.com/10.1007/s10291-011-0243-7>. DOI:10.1007/s10291-011-0243-7.
- [100] Hintz G R. Survey of Orbit Element Sets[J/OL]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2008, 31(3): 785–790. <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.32237>. DOI:10.2514/1.32237.
- [101] 常志巧, 胡小工, 杜兰, 等. 第二类无奇点根数的北斗历书参数设计[J]. 宇航学报, 2016, 37(11): 1298–1303. DOI:10.3873/j.issn.1000-1328.2016.11.003.
- [102] Xie X, Geng T, Zhao Q, et al. Design and Validation of Broadcast Ephemeris for Low Earth Orbit Satellites[J/OL]. GPS Solutions, 2018, 22(2): 54. <https://doi.org/10.1007/s10291-018-0719-9>. DOI:10.1007/s10291-018-0719-9.
- [103] 马福建. 低轨星座增强GNSS精密定位关键技术研究[D]. 武汉大学, 2018.
- [104] 路余, 杜兰, 张中凯, 等. 增强型轨道列表星历及其在北斗混合星座中的应用[J]. 宇航学报, 2015, 36(7): 804–810. DOI:10.3873/j.issn.1000-1328.2015.07.009.
- [105] 方善传, 杜兰, 周佩元, 等. 低轨导航增强卫星的轨道状态型星历参数设计[J]. 测绘学报, 2016, 45(8): 904–910. DOI:10.11947/j.AGCS.2016.20160091.
- [106] Xiao W, Liu W, Sun G. Modernization Milestone: BeiDou M2-S Initial Signal Analysis[J]. GPS Solutions, 2016, 20(1): 125–133. DOI:10.1007/s10291-015-0496-7.
- [107] Zhang Y, Kubo N, Chen J, et al. Initial Positioning Assessment of BDS New Satellites and New Signals[J/OL]. Remote Sensing, 2019, 11(11): 1320. <https://www.mdpi.com/2072-4292/11/11/1320>. DOI:10.3390/rs11111320.
- [108] Wang G, De Jong K, Zhao Q, et al. Multipath Analysis of Code Measurements for BeiDou Geostationary Satellites[J/OL]. GPS Solutions, 2015, 19(1): 129–139. <http://link.springer.com/10.1007/s10291-014-0374-8>. DOI:10.1007/s10291-014-0374-8.
- [109] Wang M, Wang J, Dong D, et al. Comparison of Three Methods for Estimating GPS Multipath Repeat Time[J/OL]. Remote Sensing, 2018, 10(2): 16. <http://www.mdpi.com/2072-4292/10/2/6>. DOI:10.3390/rs10020006.
- [110] Hadas T, Kazmierski K, Sośnica K. Performance of Galileo-Only Dual-Frequency Absolute Positioning Using the Fully Serviceable Galileo Constellation[J/OL]. GPS

- Solutions, 2019, 23(4): 108. <http://link.springer.com/10.1007/s10291-019-0900-9>. DOI:10.1007/s10291-019-0900-9.
- [111] KIHARA M, OKADA T. A Satellite Selection Method and Accuracy for the Global Positioning System[J/OL]. Navigation, 1984, 31(1): 8–20. <http://doi.wiley.com/10.1002/j.2161-4296.1984.tb00856.x>. DOI:10.1002/j.2161-4296.1984.tb00856.x.
- [112] Zhou F, Dong D, Ge M, et al. Simultaneous Estimation of GLONASS Pseudorange Inter-Frequency Biases in Precise Point Positioning Using Undifferenced and Uncombined Observations[J/OL]. GPS Solutions, 2018, 22(1): 19. <http://link.springer.com/10.1007/s10291-017-0685-7>. DOI:10.1007/s10291-017-0685-7.
- [113] 杨元喜, 徐君毅. 北斗在极区导航定位性能分析[J]. 武汉大学学报·信息科学版, 2016, 41(1): 15–20. DOI:10.13203/j.whugis20150494.
- [114] Wang M, Wang J, Dong D, et al. Performance of BDS-3: Satellite Visibility and Dilution of Precision[J/OL]. GPS Solutions, 2019, 23(2): 56. <http://dx.doi.org/10.1007/s10291-019-0847-x>. DOI:10.1007/s10291-019-0847-x.
- [115] Wang J, Iz B, Lu C. Dependency of GPS Positioning Precision on Station Location[J/OL]. GPS Solutions, 2002, 6(1–2): 91–95. <http://link.springer.com/10.1007/s10291-002-0021-7>. DOI:10.1007/s10291-002-0021-7.
- [116] Khon V C, Mokhov I I, Latif M, et al. Perspectives of Northern Sea Route and Northwest Passage in the Twenty-First Century[J/OL]. Climatic Change, 2010, 100(3–4): 757–768. <http://link.springer.com/10.1007/s10584-009-9683-2>. DOI:10.1007/s10584-009-9683-2.
- [117] Overland J E, Wang M. When Will the Summer Arctic Be Nearly Sea Ice Free?[J/OL]. Geophysical Research Letters, 2013, 40(10): 2097–2101. <http://doi.wiley.com/10.1002/grl.50316>. DOI:10.1002/grl.50316.
- [118] Sundlisaeter T, Reid T, Johnson C D, et al. GNSS and SBAS System of Systems: Considerations for Applications in the Arctic[J/OL]. SSRN Electronic Journal, 2012: 1–11. <http://www.ssrn.com/abstract=2228890>. DOI:10.2139/ssrn.2228890.
- [119] Yahya M H, Kamarudin M N. Analysis of Gps Visibility and Satellite-Receiver Geometry over Different Latitudinal Regions[J]. International Symposium on Geoinformatics, 2008(July 1995).
- [120] Chiang K-W, Huang Y-S, Tsai M-L, et al. The Perspective from Asia Concerning the Impact of Compass/Beidou-2 on Future GNSS[J/OL]. Survey Review, 2010, 42(315): 3–19. <http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1179/003962609X451654>. DOI:10.1179/003962609X451654.
- [121] Meng X, Roberts G W, Dodson A H, et al. Impact of GPS Satellite and Pseudolite Geometry on Structural Deformation Monitoring: Analytical and Empirical Studies[J/OL]. Journal of Geodesy, 2004, 77(12): 809–822. <http://link.springer.com/10.1007/s00190-003-0357-y>. DOI:10.1007/s00190-003-0357-y.
- [122] 陈俊平. 低轨卫星精密定轨研究[D]. 同济大学, 2007.
- [123] 苏珂, 金双根. BDS/Galileo四频精密单点定位模型性能分析与比较[J]. 测绘学报, 2020, 49(9): 1189–1201. DOI:10.11947/j.AGCS.2020.20200236.
- [124] Su K, Jin S. Analytical Performance and Validations of the Galileo Five-Frequency Precise

- Point Positioning Models[J/OL]. Measurement, 2021, 172(February): 108890.  
<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263224120313762>.  
DOI:10.1016/j.measurement.2020.108890.
- [125] 李征航, 黄劲松. GPS测量与数据处理[M]. 3 edition. 武汉大学出版社, 2016.
- [126] Y.K. Wang, Kezhao Li L Z. A New Modified Method for Cycle-Slips Detection Based on Polynomial Fitting Method[C]//China Satellite Navigation Conference (CSNC) 2016 Proceedings: Volume I, Lecture Notes in Electrical Engineering. . DOI:10.1007/978-3-662-46638-4.
- [127] Chang G, Xu T, Yao Y, et al. Adaptive Kalman Filter Based on Variance Component Estimation for the Prediction of Ionospheric Delay in Aiding the Cycle Slip Repair of GNSS Triple-Frequency Signals[J/OL]. Journal of Geodesy, 2018(Id): 1–13.  
<https://doi.org/10.1007/s00190-018-1116-4>. DOI:10.1007/s00190-018-1116-4.
- [128] 王成, 王解先. 单频非差相位观测值的周跳探测与修复方法[J]. 同济大学学报 (自然科学版), 2012, 40(9): 1393–1398. DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2012.09020.
- [129] 刘宁, 熊永良, 徐韶光. 利用改进的TurboEdit算法与Chebyshev多项式探测与修复周跳[J]. 武汉大学学报 (信息科学版), 2011, 36(12): 1500–1503.
- [130] Blewitt G. An Automatic Editing Algorithm for GPS Data[J/OL]. Geophysical Research Letters, 1990, 17(3): 199–202. <http://doi.wiley.com/10.1029/GL017i003p00199>.  
DOI:10.1029/GL017i003p00199.
- [131] Feng Y. GNSS Three Carrier Ambiguity Resolution Using Ionosphere-Reduced Virtual Signals[J/OL]. Journal of Geodesy, 2008, 82(12): 847–862.  
<http://link.springer.com/10.1007/s00190-008-0209-x>. DOI:10.1007/s00190-008-0209-x.
- [132] 黄令勇, 翟国君, 欧阳永忠. 削弱电离层影响的三频TurboEdit周跳处理方法[J]. 测绘学报, 2015, 44(8): 840–847. DOI:10.11947/j.AGCS.2015.2014030.
- [133] Zhen Dai, Knedlik S, Loffeld O. Real-Time Cycle-Slip Detection and Determination for Multiple Frequency GNSS[C/OL]//2008 5th Workshop on Positioning, Navigation and Communication. IEEE, 2008: 37–43. <http://ieeexplore.ieee.org/document/4510355/>.  
DOI:10.1109/WPNC.2008.4510355.
- [134] Teunissen P J G. The Least-Squares Ambiguity Decorrelation Adjustment: A Method for Fast GPS Integer Ambiguity Estimation[J/OL]. Journal of Geodesy, 1995, 70(1–2): 65–82.  
<http://link.springer.com/10.1007/BF00863419>. DOI:10.1007/BF00863419.
- [135] 姚一飞, 高井祥, 王坚. 北斗三频载波观测值的周跳实时探测与修复[J]. 中国矿业大学学报, 2014, 43(6): 1140–1148. DOI:10.13247/j.cnki.jcumt.000242.
- [136] Ye Tian L Z and Q X. A Novel Triple-Frequency Cycle Slip Detection and Correction Method for BDS[C/OL]//China Satellite Navigation Conference (CSNC) 2018 Proceedings: Volume II. Springer Singapore, 2018. [http://dx.doi.org/10.1007/978-981-13-0014-1\\_37](http://dx.doi.org/10.1007/978-981-13-0014-1_37). DOI:10.1007/978-981-13-0014-1.
- [137] Zeng T, Sui L, Xu Y, et al. Real-Time Triple-Frequency Cycle Slip Detection and Repair Method under Ionospheric Disturbance Validated with BDS Data[J/OL]. GPS Solutions, 2018, 22(3): 62. <https://doi.org/10.1007/s10291-018-0727-9>. DOI:10.1007/s10291-018-0727-9.
- [138] Liu W, Jin X, Wu M, et al. A New Real-Time Cycle Slip Detection and Repair Method

- under High Ionospheric Activity for a Triple-Frequency GPS/BDS Receiver[J/OL].  
Sensors, 2018, 18(2): 427. <http://www.mdpi.com/1424-8220/18/2/427>.  
DOI:10.3390/s18020427.
- [139] 李金龙, 杨元喜, 徐君毅. 基于伪距相位组合实时探测与修复GNSS三频非差观测数据周跳[J]. 测绘学报, 2011, 40(6): 717–729.
- [140] 黄令勇, 翟国君, 欧阳永忠. 三频GNSS电离层周跳处理[J]. 测绘学报, 2015, 44(7): 717–725. DOI:10.11947/j.AGCS.2015.20140348.
- [141] Zhao Q, Sun B, Dai Z, et al. Real-Time Detection and Repair of Cycle Slips in Triple-Frequency GNSS Measurements[J/OL]. GPS Solutions, 2015, 19(3): 381–391.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s10291-014-0396-2>. DOI:10.1007/s10291-014-0396-2.
- [142] 王兴, 刘文祥, 李柏渝. BDS三频非差观测数据周跳探测与修复方法[J]. 国防科技大学学报, 2016, 38(3): 12–18. DOI:10.1187/j.cn.201603003.
- [143] Xiao G, Mayer M, Heck B, et al. Improved Time-Differenced Cycle Slip Detect and Repair for GNSS Undifferenced Observations[J/OL]. GPS Solutions, 2018, 22(1): 6.  
<http://link.springer.com/10.1007/s10291-017-0677-7>. DOI:10.1007/s10291-017-0677-7.
- [144] Li B, Qin Y, Liu T. Geometry-Based Cycle Slip and Data Gap Repair for Multi-GNSS and Multi-Frequency Observations[J/OL]. Journal of Geodesy, 2018(June): 1–19.  
<https://doi.org/10.1007/s00190-018-1168-5>. DOI:10.1007/s00190-018-1168-5.
- [145] Department Of Defense U S . Global Positioning System Standard Positioning Service[M/OL]/Www.Gps.Gov. . <http://www.gps.gov/technical/ps/2008-SPS-performance-standard.pdf>.
- [146] Stewart M, Tsakiri M. GLONASS Broadcast Orbit Computation[J/OL]. GPS Solutions, 1998, 2(2): 16–27. <http://link.springer.com/10.1007/PL00000032>.  
DOI:10.1007/PL00000032.
- [147] 葛奎, 王解先. GLONASS卫星位置计算与程序实现[J]. 测绘与空间地理信息, 2009, 32(2): 137–140.
- [148] 葛茂荣, 过静琚, 葛胜杰. GLONASS卫星坐标的计算方法[J]. 测绘通报, 1999(2): 2–4.
- [149] GPS Directorate. Navstar GPS Space Segment/Navigation User Interfaces[M]. Interface edition. Global Positioning Systems Directorate, 2013.
- [150] 王解先, 王君刚, 陈俊平. 基于卫星位置与速度的北斗卫星广播星历拟合[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2016, 44(1): 155–160. DOI:10.11908/j.issn.0253-374x.2016.01.023.
- [151] Xu G, Xu J. On the Singularity Problem in Orbital Mechanics[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2013, 429(2): 1139–1148. DOI:10.1093/mnras/sts403.
- [152] 孟令东, 陈俊平, 王解先. 拟合广播星历参数的简便方法[C]//第十二届中国卫星导航年会论文集——S04 卫星轨道与系统误差处理. .  
DOI:10.26914/c.cnkihy.2021.002355.
- [153] 方善传, 杜兰, 高云鹏, 等. LEO卫星轨道根数型星历参数与接口设计[J]. 测绘学报, 2019, 48(2): 198–206. DOI:10.11947/j.AGCS.2019.20170701.
- [154] 张中凯, 杜兰, 旦增曲英, 等. 基于第二类无奇点根数的改进根数[J]. 测绘科学技术学报, 2012, 29(4): 257–261. DOI:10. 3969 / j. issn. 1673-6338. 2012. 04. 006.

- [155] Meng L, Chen J, Wang J, et al. A Broadcast Ephemeris Design of LEO Navigation Augmentation Satellites Based on the Integration-Type Ephemeris Model[J/OL]. Measurement Science and Technology, 2021, 32(8): 085009. <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6501/abfaf5>. DOI:10.1088/1361-6501/abfaf5.
- [156] 王解先. GPS精密定轨定位[M]//同济大学出版社, 1997.
- [157] 王解先, 刘红新. Galileo、GPS和Galileo/GPS组合系统实用性的比较[J]. 大地测量与地球动力学, 2005, 25(1): 113–117.
- [158] Meng L, Wang J, Chen J, et al. Extended Geometry and Probability Model for GNSS+ Constellation Performance Evaluation[J/OL]. Remote Sensing, 2020, 12(16): 2560. <https://www.mdpi.com/2072-4292/12/16/2560>. DOI:10.3390/rs12162560.
- [159] CSNO. BeiDou Navigation Satellite System Signal in Space Inter-Face Control Document—Open Service Signal B1I[M]//China Satellite Navigation Office (CSNO). Version 3. edition. China Satellite Navigation Office (CSNO), 2019.
- [160] CSNO. Report on the Development OfBeiDou Navigation Satellite System[M]//China Satellite Navigation Office. 2.1 edition. China Satellite Navigation Office (CSNO), 2012.
- [161] JAXA. Quasi-Zenith Satellite System Navigation Service Interface Specification for QZSS[M]. IS-QZSS V1 edition. November 28, 2014, Japan Aerospace Exploration Agency, 2014.
- [162] Zaminpardaz S, Wang K, Teunissen P J G. Australia-First High-Precision Positioning Results with New Japanese QZSS Regional Satellite System[J/OL]. GPS Solutions, 2018, 22(4): 101. <http://link.springer.com/10.1007/s10291-018-0763-5>. DOI:10.1007/s10291-018-0763-5.
- [163] Zhang Y, Kubo N, Chen J, et al. Contribution of QZSS with Four Satellites to Multi-GNSS Long Baseline RTK[J/OL]. Journal of Spatial Science, 2020, 65(1): 41–60. <https://doi.org/10.1080/14498596.2019.1646676>. DOI:10.1080/14498596.2019.1646676.
- [164] 孙宏伟, 李玉莉, 袁海波. 日本准天顶卫星系统概要[J]. 武汉大学学报.信息科学版, 2010, 35(8): 1004–1007.
- [165] Cabinet Office N S P S. Quasi-Zenith Satellite System Performance Standard (PS-QZSS-001)[M/OL]. . <https://qzss.go.jp/en/technical/download/pdf/ps-is-qzss-001.pdf?t=1577867270694>.
- [166] Li X, Ma F, Li X, et al. LEO Constellation-Augmented Multi-GNSS for Rapid PPP Convergence[J/OL]. Journal of Geodesy, 2019, 93(5): 749–764. <http://link.springer.com/10.1007/s00190-018-1195-2>. DOI:10.1007/s00190-018-1195-2.
- [167] Meng L, Chen J, Wa J, et al. Real-Time Detection and Repair of Cycle-Slip Based on Pseudo-Range Phase Combinations for Un-Differenced GNSS Triple-Frequency Observations[C/OL]. SUN J, YANG C, GUO S, eds.//J. Sun et Al. (Eds.), China Satellite Navigation Conference (CSNC) 2018 Proceedings, Lecture Notes in Electrical Engineering 498,701-705. Singapore: Springer Singapore, 2018: 701–715. <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-84863151337&partnerID=40&md5=5e005c83e1e68b8cd362931fa8e9a6b6>. DOI:10.1007/978-981-13-0014-1.

- [168] 黄令勇, 宋力杰, 王琰. 北斗三频无几何相位组合周跳探测与修复[J]. 测绘学报, 2012, 41(5): 763–76.
- [169] 孟令东, 陈俊平, 王解先, 等. 相位平滑伪距辅助GNSS三频非差数据实时周跳探测与修复[J]. 东南大学学报(自然科学版), 2019, 49(3): 573–581. DOI:10.3969/j.issn.1001-0505.2019.03.024.
- [170] 杨元喜, 李金龙, 王爱兵, 等. 北斗区域卫星导航系统基本导航定位性能初步评估[J]. 中国科学:地球科学, 2014, 57(1): 144–152. DOI:10.1007/s11430-013-4769-0.
- [171] Teunissen P J G. Success Probability of Integer GPS Ambiguity Rounding and Bootstrapping[J/OL]. Journal of Geodesy, 1998, 72(10): 606–612.  
<http://link.springer.com/10.1007/s001900050199>. DOI:10.1007/s001900050199.
- [172] 常志巧, 胡小工, 郭睿, 等. CNMC与Hatch滤波方法比较及其在北斗相对定位中的精度分析[J]. 中国科学:物理学 力学 天文学, 2015, 45(7): 53–61.  
DOI:10.1360/SSPMA2015-00144.
- [173] 张益泽. 北斗实时高精度定位服务系统研究[D]//上海: 同济大学, 2017.
- [174] Subirana J S, Zornoza J M J, Hernandez-Pajares M. Gnss Data Processing Volume I: Fundamentals and Algorithms[M]. FLETCHER K, ed.. Netherlands: ESA Communications, 2013.
- [175] Hatch R. The Synergism of GPS Code and Carrier Measurements[C]//Proc 3rd International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning.Las Cruces,New Mexico,USA,1982,1213-1232. .
- [176] 刘柳, 吕志伟, 于晓东. GNSS三频周跳探测与修复算法[J]. 测绘学报, 2017, 46(4): 453–459. DOI:10.11947/j.AGCS.2017.20160532.