



沈阳航空航天大学

硕士学位论文

论文题目 北斗卫星导航长基线 RTK 定位算法研究

研究生 宋伟

专业 信息与通信工程

研究方向 卫星导航定位技术

指导教师 王尔申 教授

二零二三年六月

北斗卫星导航长基线RTK定位算法研究

沈阳航空航天大学

分类号_____

密级_____公开_____

UDC _____

学 位 论 文

北斗卫星导航长基线 RTK 定位算法研究

研 究 生 姓 名 ： 宋伟

学科专业名称 ： 信息与通信工程

研 究 方 向 ： 卫星导航定位技术

论 文 类 型 ： 基础研究

申 请 学 位 ： 工学硕士

指导教师姓名 ： 王尔申

指导教师职称 ： 教授

指导教师单位 ： 沈阳航空航天大学

论文提交日期 ： 2023 年 6 月 8 日

论文答辩日期 ： 2023 年 6 月 11 日

沈 阳 航 空 航 天 大 学

2023 年 6 月

SHENYANG AEROSPACE UNIVERSITY

THESIS FOR MASTER'S DEGREE

**RESEARCH ON BEIDOU LONG BASELINE
RTK POSITIONING ALGORITHM**

Candidate: Wei Song

Supervisor: Ershen Wang

Specialty: Information and Communication
Engineering

Date: June, 2023

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立完成的。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果，也不包含本人为获得其他学位而使用过的成果。对本文研究做出重要贡献的个人或集体均已在论文中进行了说明并表示谢意。本声明的法律后果由本人承担。

论文作者签名：

2023 年 6 月 8 日

摘 要

北斗三号全球卫星导航系统(BDS-3)已开始全面投入运行,为全球用户提供定位、导航和授时服务。当前,针对 GPS 和北斗二号(BDS-2)的实时动态相对定位(Real Time Kinematic, RTK)的算法研究和软件开发等方面已有大量成果,而对于 BDS-3 全球范围内 RTK 定位算法的研究不够深入并且定位性能评估较少,尤其是长基线 RTK 定位模式。针对上述问题,本文在 GNSS 定位理论的基础上,分别对 BDS 单频、双频、三频的 RTK 在不同基线条件下的定位效果进行了全面评估。此外,当前卫星数目大量增加,导航信号的频率也随之增多,可供用户定位使用的观测信息量越来越大,与此同时也大大增加了待固定模糊度参数的数量,增大了模糊度错误固定的风险。

本文主要研究成果如下:

(1) 详细介绍了卫星导航定位的函数观测模型、观测值的线性组合以及常用的误差改正模型。针对在中长基线条件下 RTK 难以消除大气延迟误差的问题,研究电离层延迟和对流层延迟当作未知状态参数进行参数估计,建立了中长基线的 RTK 误差观测模型,并推导了在短基线和长基线两种模式下卡尔曼滤波的详细过程。

(2) 针对 BDS-3 新信号 B1C 和 B2a 在全球范围内综合性能评估不足的问题,本文对 BDS-3 在不同基线长度下的定位表现进行了深入的研究。分析了当前 BDS-3、BDS-2+BDS-3、GPS 系统可视卫星的数目和 PDOP 值。在短基线和长基线两种定位模式下,分别对单频 B1C、B1I、B2a、B3I 和 L1,双频 BDS-3(B1C/B2a)、BDS-3(B1I/B3I)、BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)、GPS(L1L2)、三频非组合 BDS-3(B1C/B2a/B3I)进行对比分析。实验证明基于 B1C 和 B2a 的定位效果较优。

(3) 研究了三种常见的整周模糊度解算方法,并对应计算了不同方法的成功率大小。在求得模糊度固定解后,对固定解的可靠性检验也尤为重要,本文研究推导了基于 FFRT 的检验阈值的确定方法,该策略可有效减少“弃真”或“纳伪”现象的发生。

(4) 针对如何选取高精度的模糊度子集这一问题,提出了模型和数据相结合的部分模糊度固定策略。在模型驱动部分,采用成功率指标法对模糊度参数进行检验;在数据驱动部分,首先通过 Ratio 检验方法对模糊度参数进行检验,并结合前后历元间 Ratio 值的大小及模糊度固定状态对当前历元用于模糊度固定的卫星做适当调整。实验证明部分模糊度固定策略更适用于复杂环境下的高精度定位。

关键词: 北斗三号全球卫星导航系统; 长基线 RTK; 整周模糊度固定; 数据驱动; 部分模糊度固定

Abstract

The BDS-3, a global satellite navigation system, is now fully operational and provides positioning, navigation, and timing services to users worldwide. There have been significant accomplishments in algorithm research and software development for real-time kinematic (RTK) positioning for both GPS and BDS-2. However, the research on RTK positioning algorithms for BDS-3 is not in-depth and there are few positioning performance evaluations, especially the long baseline positioning mode. Aiming at solving the above problems, on the basis of GNSS positioning theory, this thesis makes a comprehensive evaluation of the positioning effects of BDS single-frequency, dual-frequency, and triple-frequency RTK under different baseline conditions. In addition, with the gradual increase in the number of satellites in orbit, the frequency of navigation signals has also increased to triple frequency or even more. While providing users with more observation information, it also inevitably increases the dimension of fixed ambiguity and increases the risk of incorrect fixing. Therefore, how to select the most reliable ambiguity subset among high-dimensional ambiguity parameters is very important.

This thesis mainly involves the research content and results of the following aspects:

(1) The functional observation model of satellite navigation and positioning, the linear combination of observation values and the commonly used error correction model are introduced in detail. Aiming at the problem that RTK is difficult to eliminate the atmospheric delay error under medium and long baseline conditions, ionospheric delay and tropospheric delay are regarded as unknown parameters for parameter estimation, so as to establish an error observation model for medium and long baselines. It also introduces the detailed process of filtering in two modes of short baseline and long baseline.

(2) In view of the lack of comprehensive performance evaluation of the new BDS-3 signals B1C and B2a, seven-day observation data of 8 groups of IGS/MEGX stations with different baseline lengths were selected to analyze the current BDS-3, BDS-2+BDS-3, GPS visibility and PDOP values. In the short baseline and long baseline positioning modes, single-frequency B1C, B1I, B2a, B3I and L1, dual-frequency BDS-3 (B1C/B2a), BDS-3 (B1I/B3I), BDS-2+BDS-3 (B1I/B3I), GPS (L1L2), triple-frequency un-combined BDS-3 (B1C/B2a/B3I) performance by analyzing positioning accuracy, ambiguity fixing rate, the time to first fix and ratio. Experiments show that the positioning effect based on B1C and B2a is better.

(3) Several commonly used integer ambiguity resolution methods and the calculation methods of the success rate are introduced. After the ambiguity fixed solution is obtained, it is also very important to test the reliability of the solution. This thesis introduces the related process of Ratio test and the method of determining the test threshold in detail.

(4) Based on the theory of partial ambiguity resolution (PAR) and further considering the correlation of ratio between epochs, this research proposes a new model- and data-driven PAR (MD-PAR) partial ambiguity resolution strategy. In the model-driven part, the success rate index method is used to test the ambiguity parameters; In the data-driven part, the ambiguity parameters are first tested by the Ratio test method, and the satellites used for ambiguity fixation in the current epoch are properly adjusted in combination with the Ratio value between the previous and subsequent epochs and the ambiguity fixing state.

Keywords: BDS; long baseline RTK; integer ambiguity resolution; data-driven; partial ambiguity resolution

目 录

摘 要.....	I
ABSTRACT	II
第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景与意义.....	1
1.2 国内外相关研究进展.....	3
1.2.1 长基线 RTK 定位算法研究进展	3
1.2.2 部分模糊度固定研究进展	4
1.3 本文主要研究思路.....	5
第 2 章 BDS RTK 定位模型的建立与解算.....	7
2.1 BDS 定位函数观测模型及观测值线性组合	7
2.2 误差改正模型.....	9
2.2.1 对流层延迟及其改正	9
2.2.2 电离层延迟及误差改正	9
2.2.3 地球形变改正	10
2.2.4 多路径效应	11
2.2.5 地球自转效应	12
2.3 数据预处理.....	12
2.3.1 周跳探测	12
2.3.2 伪距粗差剔除	14
2.4 随机模型.....	15
2.4.1 信噪比随机模型	15
2.4.2 高度角随机模型	15
2.5 参数估计理论.....	15
2.5.1 加权最小二乘算法	15
2.5.2 卡尔曼滤波算法	16
2.6 RTK 定位方程的建立与解算	17
2.6.1 短基线 RTK 定位方程的建立与解算	17
2.6.2 长基线 RTK 定位方程的建立与解算	19
2.7 本章小结.....	22
第 3 章 全球范围内 BDS 多频多基线 RTK 定位性能评估	23

3.1 概述.....	23
3.2 数据来源和配置分析.....	24
3.3 实验分析与结果.....	25
3.3.1 可见卫星数目和位置精度衰减因子 PDOP	25
3.3.2 定位精度	27
3.3.3 Ratio 值评估	32
3.3.4 模糊度首次正确固定时间	33
3.4 本章小结.....	34
第 4 章 基于 FFRT 的整周模糊度解算方法及验证	36
4.1 概述.....	36
4.2 常用的整周模糊度固定方法.....	36
4.2.1 取整法	37
4.2.2 Bootstrapping 方法	38
4.2.3 整数最小二乘法	39
4.2.4 整数最小二乘降相关搜索法	40
4.3 整周模糊度固定成功率.....	41
4.3.1 整周模糊度固定成功率的定义	41
4.3.2 直接取整法成功率及边界	41
4.3.3 Bootstrapping 方法成功率	42
4.3.4 整数最小二乘降相关搜索法	42
4.4 整周模糊度检验.....	42
4.4.1 孔估计方法验证整周模糊度	43
4.4.2 孔估计方法阈值设置	44
4.5 本章小结.....	45
第 5 章 基于模型与数据相结合的部分模糊度固定策略	46
5.1 概述.....	46
5.2 模型驱动和数据驱动的对比分析.....	47
5.2.1 模型驱动	47
5.2.2 数据驱动	48
5.3 改进的部分模糊度固定策略.....	49
5.4 改进的部分模糊度固定策略定位性能分析.....	50
5.4.1 实测动态数据	50
5.4.2 长基线数据	55

5.5 本章小结.....	57
结 论.....	59
参 考 文 献.....	61
致 谢.....	64
攻读硕士期间发表(含录用)的学术论文.....	65

第1章 绪 论

1.1 研究背景与意义

目前,第三次信息革命仍处于兴起阶段,正在全球范围内蓬勃发展和传播,处于当前历史节点的我们感受到了信息大爆炸带来的各项便利。在各类信息中时空信息最为重要,它与人们日常的生产、生活密切相关。全球卫星导航系统(Global Navigation Satellite System, GNSS)的出现改变了人们通过天文星象和指南针等传统的导航方式,提高了人们获取时空信息的精度和实效性。由于其高效率、高可靠性、全天候等特点已被广泛应用于大地测量、地震海啸预警、授时、地球物理等领域^[1-5]。GNSS 自身导航服务精度可以达到米级,该定位精度可以满足日常车辆、船舶等的定位需求,但仍无法满足实时高精度行业的应用需求。尤其是互联网+和智能化时代的到来,人们对时空信息的准确性、可靠性和时效性提出更高的要求^[6,7]。基于此种现状,越来越多的专家学者投身于卫星导航定位技术的研究,卫星导航定位技术发展迅速,各种导航定位模式不断涌现。卫星导航定位技术的发展历程可以划分为四个不同的阶段,每个阶段都有着其独特的特点和技术手段。第一阶段是伪距单点定位技术,该技术通过计算接收机与卫星间的距离差来确定接收机的位置,只能实现米级的定位精度。在第二阶段中,采用差分定位技术,其中代表性技术是实时动态相对定位技术(Real Time Kinematic, RTK),通过观测值误差在空间和时间上的相关性进行误差消除,极大提高了卫星导航系统的定位精度。然而,传统的 RTK 精度会随着基线长度的增加而降低,为了克服这种现状,第三阶段出现了以精密单点定位(Precise Point Positioning, PPP)和网络 RTK 为代表的新的精度定位技术,极大地增大了定位的服务范围。PPP-RTK 技术是当前最先进且最具潜力的技术,它充分借鉴了传统 RTK 误差处理的思路和方法,进一步缩短了 PPP 的收敛时间,真正实现了 PPP 模糊度的固定。然而,该技术并未成熟,需要进一步的完善和优化^[8]。

中国自主研发的北斗卫星导航系统(BDS),由地面段、空间段和用户段三个部分构成。这个系统由一个主控站、两个注入站和三十一一个监测站,构成了地面部分。主控站是整个系统的指挥中心,负责协调和控制系统的运行。监测站则主要用来对各个观测站进行监控与管理。北斗系统的空间部分由三种独特的卫星构成,分别为地球同步轨道卫星(GEO)、倾斜地球同步轨道卫星(IGSO)和中圆地球轨道卫星(MEO),这些卫星相互融合,形成了一个高度复杂的导航星座。北斗卫星导航系统的发展经历了以下三个阶段,从中国周边区域的 BDS-1 到覆盖亚太区域的 BDS-2,到现在可为全球用户提供定位服务的 BDS-3。此外,BDS 是第一个提供三频服务的系统,其频点为 B1、B2、B3。BDS-3 于 2020 年 7 月 31 日正式运行,并开始提供定位、导航和授时服务。相比 BDS-2, BDS-3

的精度有了明显提高, 卫星轨道在 R、N、T 三个方向的精度分别可达到 0.07m、0.30m、0.26m, 处于世界领先水平。BDS-3 的卫星钟差精度可以达到 1.83ns, 明显优于 GLONASS, 略低于 Galileo^[9]。北斗卫星的运行轨迹如图 1.1 所示。

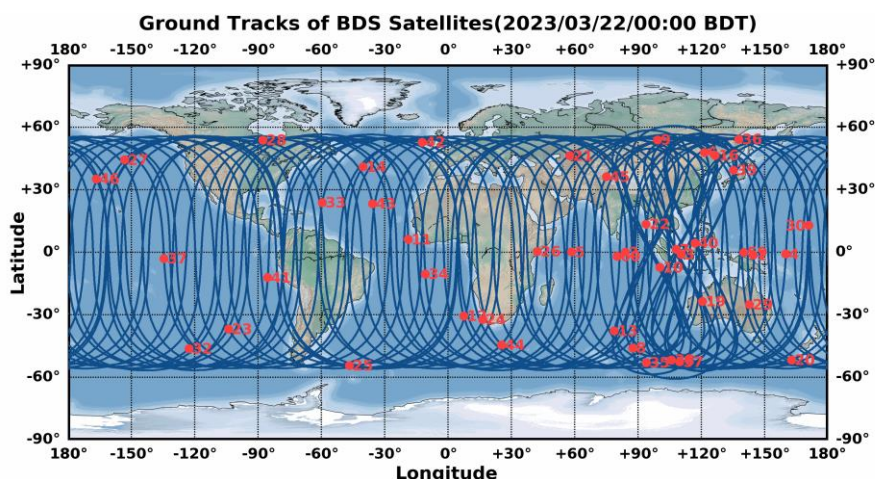


图 1.1 北斗卫星的运行轨迹图(2023/03/22)(<http://www.csno-tarc.cn/performance/track>)

BDS-3 在兼容 B1I 和 B3I 信号的基础上, 还增加了新的信号, 即 B1C、B2a、B2b 和 B2a+b。此外, BDS-3 新信号在设计方面也充分体现了兼容性, B1C 与 GPS L1C、Galileo E1 信号, B2a 与 GPS L5C 信号、Galileo E5a 具备兼容互操作能力。此外, BDS-3 为了兼容和过渡 BDS-2 还设计新的了 B2b 信号, 在提升本系统定位性能的基础上提高了与其它 GNSS 信号的兼容性^[10,11]。表 1.1 中为北斗卫星导航系统播发信号的具体情况。BDS-2 星座由 14 颗卫星组成, 其中 5 颗倾斜地球同步卫星轨道卫星, 5 颗地球同步轨道卫星, 4 颗中地轨道卫星。BDS-3 星座则由 30 颗卫星组成, 其中 3 颗地球同步轨道卫星, 3 倾斜地球同步卫星轨道卫星, 24 颗中地轨道卫星^[12]。

表 1.1 BDS 信号概况

系统	信号	频率(MHz)	带宽(MHz)	卫星数	播发卫星
BDS-2	B1I	1561.098	4.092	15	C01~C14、C16
	B2I	1207.14	20.46	15	C01~C14、C16
	B3I	1268.52	20.46	15	C01~C14、C16
BDS-3	B1I	1561.098	4.092	30	C19~C30、C32~C46、C59~C61
	B1C	1575.42	32.736	27	C19~C30、C32~C46
	B2a	1176.45	20.46	27	C19~C30、C32~C46
	B2b	1207.14	20.46	27	C19~C30、C32~C46
	B3I	1268.52	20.46	30	C19~C30、C32~C46、C59~C61

差分定位技术最早是由 Remondis 提出, 该技术极大地改善了 GPS 的定位精度^[13]。Edward 等人首次实现了厘米级的载波相位差分定位^[14], RTK 也因此走进大众的视野, 成为众多专家学者的研究热点。目前 RTK 技术已十分成熟, 可在局域范围内实现厘米级的实时定位服务。近年来, 以 GPS 和 GLONASS 为主的 RTK 定位技术已经得到广泛研究和应用, 并取得了显著的进展。然而, 由于我国的北斗卫星导航系统发展较晚, 并且其星座分布、运行轨道和观测精度与其它 GNSS 系统存在差异, 因此目前北斗 RTK 定位技术的发展仍处于初级阶段, 尤其是长基线 RTK 定位技术需要进一步的研究和开发。本文研究北斗 RTK 定位技术, 探讨其相关算法以及在不同基线条件下使用不同频点组合的定位效果。同时与 GPS 系统进行比较评估, 旨在更好地了解北斗 RTK 的性能表现, 为 BDS 系统的工程应用提供参考。此外, 随着卫星数量和导航信号的频率的不断增加, 用于实际定位的观测信息量也越来越丰富, 但与此同时也增加了待求模糊度参数的数量, 增大了模糊度错误固定的风险。针对上述问题, 本文提出一种结合模型和数据的部分模糊度固定策略, 通过采用高可靠性的模糊度子集进行固定, 以降低错误固定模糊度的概率。

1.2 国内外相关研究进展

1.2.1 长基线 RTK 定位算法研究进展

基于单基站的长基线相对定位技术由于成本相对低廉、模型简单、测量精度高等优点在长距离时间同步、地壳形变监测、地震位移信息的获取等领域发挥着重要作用。在长基线 RTK 定位模式下, 误差主要来自对流层和电离层, 能否精确地消除两类误差项是实现长基线 RTK 定位的关键^[15]。Kubo 等^[16]提出将双差对流层和双差电离层作为卡尔曼滤波状态量进行估计, 同时估计电离层和对流层时延及其梯度的长基线相对定位算法。张钰玺^[17]等使用滑动窗口的方法对电离层进行建模, 并总结其在动态长基线下的时变特性, 讨论了建模方法在航空作业中的实施条件以及实际的定位效果。Shu 等^[18]在长基线 RTK 定位模式下引入相对天顶对流层模型作为约束, 改进了模糊度的收敛时间。Hou^[19]等针对 GLONASS 系统, 提出了一种基于卡尔曼滤波的数据处理策略来分析电离层固定、电离层加权和无电离层组合的整数可估计频分多址模型。Choi 等^[20]将两个测站的天顶对流层延迟双差值作为参数估计, 获得了厘米级定位精度, 但该模型中对两个测站的对流层延迟双差值做了近似处理, 函数模型在理论上不够严密。Takasu 等^[21]开发了一种适用于 1000 公里的长基线 RTK 新策略, 该策略还包括具有部分模糊度固定特性的整周模糊度解算方法, 并对一次固定的整周模糊度进行严格的约束。Liu 等^[22]提出了一种基于 BDS-3/Galileo 组合系统的超宽巷长基线 RTK 定位算法, 给出了四频配置和三种不同的三频配置的非几何函数模型, 并将双差电离层延迟作为未知参数进行估计, 可以实现长基线瞬时分米级定位, 同时降低矩阵维数, 提高计算效率。Xu 等^[23]开发了一

种受 NWP 模型约束的中长基线 RTK 定位算法, 采用 BDS 和 GPS 组合系统的定位精度在水平方向可达到于 3cm, 垂直方向可达到于 5cm。

经过多年的技术沉淀, 长基线 RTK 定位算法日趋成熟, 但仍无法完全消除对流层和电离层的影响, 同时长基线 RTK 定位容易受网络延迟和数据中断的影响, 大大增加了模糊度首次正确固定的时间, 降低了模糊度固定率, 仍需进一步研究完善。

1.2.2 部分模糊度固定研究进展

随着高精度定位技术的发展, 观测方程的数量增加, 观测模型的强度也进一步提升, 模糊度参数全部固定较为困难, 且高维的模糊度解算极易造成模糊度错误固定从而导致较大的定位偏差。为了进一步提高模糊度固定的可靠性, 缩短收敛时间, 国内外众多学者展开对于部分模糊度固定算法(Partial Ambiguity Resolution, PAR)的深入研究, 即从全部的模糊度参数中选择精度较高的部分模糊度参数进行固定。目前常用的 PAR 策略主要涉及卫星、频率、模糊度三个层面, 模型驱动(Model Driven PAR, M-PAR)和数据驱动(Data Driven PAR, D-PAR)两个类别。

在卫星层面, Takasu 等^[21]根据卫星高度角进行排序, 剔除低高度角的卫星, 仅对高度角正常卫星的模糊度进行固定。与卫星高度角排序类似, Parkins 等^[24]根据卫星的信噪比进行排序, 剔除信噪比较低的卫星, 仅对信噪比正常的卫星模糊度进行固定。以上两种方式在本质上是相同的, 因为低高度角的卫星往往信噪比也很低。在随机模型中应用高度角或者信噪比定权, 其权重已经很低, 按照此种方式排除的卫星不会对模糊度固定有太大影响。

在频率层面, Dair 和 Feng 等^[25,26]通过构建宽巷和超宽巷的组合值以是实现模糊度固定的目的。与原始观测值相比, 组合观测值具有更长波长, 更低噪声的优点, 更利于模糊度的固定。然而仅固定宽巷、超宽巷模糊度而无法固定窄巷模糊度时很难获得厘米级的高精度定位结果。

在模糊度层面, 为方便模糊度的筛选和剔除, Teunissen 等^[27]将模糊度参数按照其条件方差的大小进行排序; Parkins 等^[24]通过将模糊度精度因子 ADOP 值对模糊度参数进行排序, 但是随着模糊度参数个数的增加, ADOP 的计算量逐渐增大, 无法满足实时应用的需求。Brack 等^[28]在确定模糊度参数的顺序后, 还需要确定模糊度参数的维数, 通过设定指标对模糊度参数进行剔除, 只有在当前条件满足设定指标时才接受该部分固定解, 否则将继续按照排列顺序剔除模糊度参数。不同的指标设定方式对应着不同的模糊度固定策略, 一般可以将其分为 M-PAR 和 D-PAR 两类。M-PAR 部分, Teunissen 等^[29]设定模糊度固定成功率(Success Rate Criterion, SRC)指标, 通过模糊度参数的条件方差计算模糊度固定成功率, 达到剔除模糊度参数的目的。Takasu 等^[21]通过高度角剔除模糊度参数也属于模型驱动的范畴。M-PAR 部分, Dai 和 Vollath 等^[30-31]提出使用模糊度参数

的双频一致性作为检验指标。Teunissen 等^[32]提出固定故障比率测试(Fixed Failure Rate Ratio Test, FFRT)的方法,将固定解的次优解和最优解的残差二次型之比作为检验统计量。Ratio 值越大,得到的固定解的精度越高。M-PAR 仅考虑到观测值的理论精度,缺少对于真实数据的考虑,D-PAR 对最优解和次优解做了可区分性检验,但其无法对观测模型的强度进行整体评估,两种指标选择各有优劣。针对这一现状,Yanqing 等^[33]提出一种模型和数据融合的双重驱动的模糊度固定策略,结合 SRC 和 FFRT 两个指标进行模糊度检验,相较于单 M-PAR,不论是模糊度固定率还是基线解的精度,均有较大改善。Lu 等^[34]使用固定成功率、有界 FFRT 和新定义的基线精度增益来选择模糊子集。

当前,随着 GNSS 卫星导航系统的不断建设与更新,用为卫星定位的可视卫星数目不断增加,观测模型强度增强。与此同时,卫星数的增多也增加了模糊度错误固定的风险,影响高精度定位的效果。部分模糊度固定策略作为有效选取模糊度子集提高模糊度固定成功率的一种有效方法,仍需进一步发展和完善。

1.3 本文主要研究思路

从论文研究目的出发,本论文主要研究内容分为五个章节,各章主要研究内容如下:

第一章,绪论。阐述了本文的研究背景和意义,以及国内外的研究进展情况,主要包括长基线 RTK,部分模糊度固定的进展情况等。对几种方法之间的关联进行分析,并对现有方法的优势与局限进行了梳理。最后,明确本文的研究目的并总结本文的主要内容。

第二章,BDS RTK 定位模型的建立与解算。详细介绍了 BDS RTK 的相关理论,包括 RTK 定位的基本伪距和相位的观测模型、相关观测值的线性组合、观测模型误差改正方法和模型、随机模型、BDS RTK 数据预处理、参数估计理论和长基线 RTK 定位方程的建立解算方法。重点介绍了在长基线定位模式下,对于大气残余误差的处理方法及其详细的滤波过程。

第三章,全球范围内 BDS 多频多基线 RTK 定位性能评估。为全面评估 BDS-3 全球定位性能,本节选取 5 组不同基线长度的 IGS/MEGX 测站,分析了当前 BDS-3、BDS-2+BDS-3、GPS 系统卫星的可见性。在短基线和长基线两种定位模式下,分别对单频 B1C、B1I、B2a、B3I 和 L1,双频 BDS-3(B1C/B2a)、BDS-3(B1I/B3I)、BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)、GPS(L1L2),三频非组合 BDS-3(B1C/B2a/B3I)在定位精度、模糊度固定率、模糊度首次正确固定时间以及 Ratio 值四个方面进行具体分析。

第四章,整周模糊度解算方法及验证。比较分析了常见模糊度解算方法:取整法,Bootstrapping 方法以及整数最小二乘法。阐述了不同方法在归整域上的优劣及其成功率的大小,并对模糊度固定解的检验方法 Ratio 检验进行具体分析,包括检验阈值的确定方法。

第五章，基于模型+数据相结合的部分模糊度固定策略。基于部分模糊度固定理论，提出了一种模型与数据相结合的部分模糊度固定策略。在模型驱动部分采用成功率指标法；在数据驱动部分，结合历元间 **Ratio** 值的大小及模糊度固定状态对下一历元用于模糊度固定的卫星做适当调整。双重驱动改善了模型驱动缺乏对于真实观测数据的考虑(仅用到方差协方差，并未考虑到真实的模糊度浮点解)以及数据驱动无法对内部观测模型强度进行评估的缺点，更好地保证了模糊度固定解的精度和可靠性。使用实测动态数据和静态长基线数据验证该策略的有效性和稳定性，并与单数据驱动和单模型驱动进行对比分析，讨论了参与模糊度固定的最少卫星数目对于动态 **RTK** 定位的实际影响。

第2章 BDS RTK 定位模型的建立与解算

在 RTK 定位中, 如何选择合适的频点建立线性观测模型, 如何对各项误差进行精确的消除是获得高精度定位结果的前提。本章从原始的伪距和相位观测方程入手, 详细分析了几种常用的观测值组合方式以及各方式的优劣, 并在此基础上深入分析了误差改正模型、数据预处理和基于高度角和信噪比定权的随机模型。并着重介绍了短基线 RTK 和长基线 RTK 两种模式的不同之处及其滤波的详细过程。

2.1 BDS 定位函数观测模型及观测值线性组合

BDS 非差观测方程通过卫星和接收机之间的距离构建观测方程, 然后对各项误差进行精确消除, 是最直观描述观测量与位置参数和模糊度参数之间关系的函数模型。

BDS 伪距和载波相位基本观测方程为^[35]:

$$\begin{cases} P_{r,i}^s = \rho_r^s + c \cdot dt_r - c \cdot dt^s + I_{r,i}^s + T_r^s + \varepsilon \\ L_{r,i}^s = \lambda_i \cdot \Phi_{r,i}^s = \rho_r^s + c \cdot dt_r - c \cdot dt^s - I_{r,i}^s + T_r^s + \lambda_i a_{r,i} + \xi \end{cases} \quad (2.1)$$

其中, $P_{r,i}^s$ 是接收机 r 相对于卫星 s 在频率 i 上的伪距观测量, $\Phi_{r,i}^s$ 为接收机 r 对于卫星 s 在频率 i 上的载波相位观测量; ρ_r^s 为卫星和接收机间的几何距离; c 为光速; dt_r 和 dt^s 分别为接收机和卫星的钟差; $I_{r,i}^s$ 为卫星和接收机间的电离层延迟, 大小与频率 i 有关; T_r^s 为卫星和接收机间的对流层延迟; λ_i 为卫星的波长; $a_{r,i}$ 为接收机 r 在频率 i 上的载波相位整周模糊度; ε 和 ξ 分别为伪距和载波相位测量误差。

卫星至接收机距离可写为:

$$\rho = \sqrt{(x_r - x^s)^2 + (y_r - y^s)^2 + (z_r - z^s)^2} \quad (2.2)$$

其中, $[x_r, y_r, z_r]$ 是接收机的位置坐标; $[x^s, y^s, z^s]$ 表示卫星的位置坐标, 在 $[x_0, y_0, z_0]$ 点将上式进行线性化, 除去高阶项后得到:

$$\rho = \rho_0 + \frac{x_0 - x^s}{\rho_0} dx + \frac{y_0 - y^s}{\rho_0} dy + \frac{z_0 - z^s}{\rho_0} dz \quad (2.3)$$

在 BDS RTK 定位中, 如果只是使用单一的伪距或单一的相位进行数据处理往往达到不到较好的定位效果, 通常会将观测值进行线性组合以改善定位效果。以 f_1 和 f_2 频点为例, 分别将双频伪距和相位用 P_1 、 P_2 、 L_1 、 L_2 表示。

(1) 宽巷组合(Wide-Lane combination, WL)观测值

$$\begin{aligned} P_{WL} &= \frac{f_1 P_1 - f_2 P_2}{f_1 - f_2} \\ L_{WL} &= \frac{f_1 L_1 - f_2 L_2}{f_1 - f_2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中， P_{WL} 是伪距宽巷组合观测值； L_{WL} 是载波相位宽巷组合观测值。经过 WL 组合后的观测值波长变长，观测噪声减小，基于这种特性，该组合常用于宽巷模糊度固定以及周跳的探测和修复^[36]。

(2) 窄巷组合(Narrow-Lane combination, NL)观测值^[37]

$$\begin{aligned} P_{NL} &= \frac{f_1 P_1 + f_2 P_2}{f_1 + f_2} \\ L_{NL} &= \frac{f_1 L_1 + f_2 L_2}{f_1 + f_2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

经过 NL 组合后的观测值波长变短。

(3) 无几何距离组合(Geometry-Free combination, GF)观测值

$$\begin{aligned} P_{GF} &= P_1 - P_2 \\ L_{GF} &= L_1 - L_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

无几何距离组合的基本思想是：对于双频观测值，通过作差的方式消除频点上与频率无关的误差，仅剩下硬件延迟、多路径、天线相位中心误差、电离层残余和观测噪声。而剩余的误差项具有较为稳定的特点，其在历元间的变化不大，因此该方法通常用于周跳探测^[38]。

(4) 无电离层组合(Ionosphere-Free combination, IF)观测值

$$\begin{aligned} P_{IF} &= \frac{f_1^2 P_1 - f_2^2 P_2}{f_1^2 - f_2^2} \\ L_{IF} &= \frac{f_2^2 \alpha L_1 - \beta L_2}{f_1^2 - f_2^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

无电离层组合的基本思想是：电离层误差项与对应频点上的频率的平方成反比，运用无电离层组合可消除电离层一阶项误差，剩余的高阶项对于定位影响较小^[39]。

(5) MW 组合(Melbourne-Wubben combination, MW)观测值

$$MW = L_{WL} - P_{NL} \quad (2.8)$$

将相位 WL 组合与伪距 NL 组合作差就是 MW 组合，该组合可消除大部分的误差且波长较长^[40]。该组合既能够用于载波相位整周模糊度固定有能够用于周跳探测和修复。

经过线性组合的观测值不会失去一般性，将观测值的线性组合设为：

$$C = a \cdot L_1 + b \cdot L_2 + c \cdot P_1 + d \cdot P_2 \quad (2.9)$$

则组合后观测值 L_1 上的电离层误差可表示为：

$$k = f_1^2 \left(\frac{a}{f_1^2} + \frac{b}{f_2^2} - \frac{c}{f_1^2} - \frac{d}{f_2^2} \right) \quad (2.10)$$

进行组合后的噪声可表示为：

$$\sigma_c = \sqrt{(a^2 + b^2)\sigma_L^2 + (c^2 + d^2)\sigma_p^2} \quad (2.11)$$

其中， σ_L 和 σ_p 分别表示相位和伪距的观测噪声。

2.2 误差改正模型

在短基线 RTK 定位模式下，利用双差观测模型可有效削弱卫星星历误差、大气层延迟误差、硬件延迟和接收机钟差，双差后模糊度并未失去整周特性，仍可通过相关方法求解模糊度固定解。随着基线长度的不断增加，大气延迟的相关性逐渐减弱，因此要对对流层和电离层及其相关误差进行误差改正，以保证 RTK 定位的精度和时效性。

2.2.1 对流层延迟及其改正

对流层延迟可分为干延迟和湿延迟两部分，干延迟是由于干空气引起的，占总延迟的 90%，通过建立模型进行计算，可以达到毫米级的高精度。总延迟中有 10% 是由于湿度引起的延迟，由于大气中水汽变化很大，湿延迟很难通过精确的改正模型进行计算^[40]。因此，在长基线 RTK 定位模式下，通过 Saastamoinen 模型计算对流层天顶干延迟，通过 Neill 模型(Neill Mapping Function, NMF)计算对流层映射函数，实现对流层干延迟误差的改正，对于剩余的对流层湿分量，可以将其作为未知参数通过卡尔曼滤波进行参数估计。

$$\begin{aligned} T_r^s &= m_D(\alpha_r^s)Z_{D,r} + m_W(\alpha_r^s)Z_{W,r} \\ &= m_D(\alpha_r^s)Z_{D,r} + m_W(\alpha_r^s)(Z_{T,r} - Z_{D,r}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中， $Z_{D,r}$ 和 $Z_{W,r}$ 为天顶方向的干分量和湿分量； $Z_{T,r}$ 为天顶方向得对流层总延迟误差； m_D 和 m_W 分别为对应干湿分量的映射函数。通过 Saastamoinen 模型计算 $Z_{D,r}$ 如下式：

$$Z_{D,r} = 0.002277(1 + 0.0026 \cos 2\phi + 0.00028H)P_0 \quad (2.13)$$

其中， ϕ 为测站天线位置的经度； H 为天线的高度； P_0 为总压强。

2.2.2 电离层延迟及误差改正

电离层中的电子密度和信号频率是影响电磁波信号传播速度变化程度的主要因素。电离层延迟可以用下式表示：

$$I_f = \frac{40.3 \times 10^{16}}{f^2} STEC \quad (2.14)$$

其中， $STEC$ (Slant Total Electron Content, STEC)表示传播路径上的电子含量。电离层延

迟在伪距和相位两种模式下其大小相等方向相反。卫星的高度角越高，信号传播路径越短，电子含量越少；卫星的高度角越低，传播路径越长，电子含量越多。因此在实际定位时通常选用高度角较高的卫星以减少电离层对于定位的干扰。

IGS 每天为用户提供全球电离层电子含量图(Global Ionospheric Maps, GIM)^[41]，为全球卫星导航系统的精度提供了重要支持。电离层格网模型采用了单层薄壳模型，这种模型假设电离层是一个厚度很小的薄壳。电离层格网模型和 GIM 模型都将电离层划分为一系列小的空间单元，每个单元的电子密度可以用一个数值来表示。需要留意的是，计算时要把垂直方向的电子含量转化为 STEC。其公式为：

$$\begin{cases} STEC = VTEC / \cos(Z') \\ \sin(Z') = \frac{R}{R_0 + H} \sin(Z) \end{cases} \quad (2.15)$$

其中， R 是地心到接收机的距离； Z 是卫星天顶角； H 是单层薄壳的高度； R_0 是地球半径。

针对电离层延迟改正的研究一直是众多学者的研究热点。对于消除电离层误差想的方法大致可分为以下几类：使用电离层广播模型进行补偿；使用精密电离层改正产品进行补偿；电离层加权模型；在短基线定位模式下，电离层可通过差分的方式进行有效消除，但随着基线长度的增加，电离层延迟的空间相关性严重削弱，差分后的电离层残余仍然很大，严重影响模糊度固定率和 RTK 定位精度。因此在长基线 RTK 定位模式下，通常会把电离层延迟项当作未知状态参数，通过卡尔曼滤波进行状态参数估计。

2.2.3 地球形变改正

地球形变是指地球在不同时间和空间尺度上的形态变化，包括地球自转、地球潮汐、地球板块运动等因素。这种形变可以达到数百毫米的程度。因此需要对固体潮、海潮、极潮进行校正，改正公式为：

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{M_0} + \Delta\mathbf{r}_{sol} + \Delta\mathbf{r}_{ocean} + \Delta\mathbf{r}_{pole} \quad (2.16)$$

其中， \mathbf{r}_M 为接收机随时间变化的实际坐标， \mathbf{r}_{M_0} 为接收机参考点坐标， $\Delta\mathbf{r}_{sol}$ 、 $\Delta\mathbf{r}_{ocean}$ 和 $\Delta\mathbf{r}_{pole}$ 分别为固体潮、海潮和极潮改正。

(1) 固体潮影响

固体潮是指地球固体物质(如大陆、海洋、冰川等)在地球引力和潮汐力作用下发生微小的形变，从而影响全球导航卫星系统信号的传播和接收。这种形变会导致卫星信号的传播速度和路径发生微小的变化，进而影响卫星导航系统的定位精度和可靠性。常用 Love 数和 Shida 数的球谐函数计算固体潮改正。表达方式如下：

$$\Delta \mathbf{r}_{\text{sol}} = \sum_{j=2}^3 \frac{G \cdot M_j \cdot \mathbf{r}}{G \cdot M \cdot \mathbf{R}_j^3} \left\{ \left[3l_2 (\hat{\mathbf{R}}_j \cdot \hat{\mathbf{r}}) \right] \hat{\mathbf{R}}_j + \left[3 \left(\frac{h_2}{2} - l_2 \right) (\hat{\mathbf{R}}_j \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 - \frac{h_2}{2} \right] \hat{\mathbf{r}} \right\} + \left[-0.025 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \sin(\theta_g + \lambda) \right] \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (2.17)$$

其中, $h_2 = 0.085$, $l_2 = 0.609$ 。 M_j 表示月亮或太阳的质量, $j=2$ 表示月球, $j=3$ 表示太阳; \mathbf{r} 表示用户接收机的坐标向量; $\hat{\mathbf{r}}$ 表示单位向量; φ , λ 表示被测目标所处的经纬度; θ_g 表示格林尼治平恒星时; \mathbf{R}_j 表示摄动天体在地心坐标系中的坐标向量;

(2) 海潮改正

地球的潮汐变化是导致海潮发生的主要原因, 因为这种变化会导致地球形态的变化。海潮所引起的地球形变与经纬度和海拔高度密切相关。在进行静态定位时, 当需要达到 5cm 以下的高精度要求, 或者进行 24 小时周期的观测, 或者选择离海洋远的观测站(通常在 1000km 以上), 以避免受到海潮影响。

(3) 极潮改正

极潮是由地球自转轴瞬时位置变化引起的, 极潮的改正公式如下所示:

$$\begin{cases} \Delta N = -9 \cos 2\varphi \left[(X_p - \bar{X}_p) \cos \lambda - (Y_p - \bar{Y}_p) \sin \lambda \right] \\ \Delta E = 9 \sin \varphi \left[(X_p - \bar{X}_p) \sin \lambda + (Y_p - \bar{Y}_p) \cos \lambda \right] \\ \Delta U = -33 \sin 2\varphi \left[(X_p - \bar{X}_p) \cos \lambda - (Y_p - \bar{Y}_p) \sin \lambda \right] \end{cases} \quad (2.18)$$

式中, X_p 和 Y_p 为地球极移, \bar{X}_p 和 \bar{Y}_p 为地球平均极移, 其单位为弧度秒, φ 和 λ 为测站纬度和经度, $[\Delta N \quad \Delta E \quad \Delta U]$ 为测站在站心地平坐标系下的偏差, 单位是 mm。

极潮的变化呈现出季节性和钱德勒周期性的特点, 且变化十分微小。在 24 小时以内或更短时间, 极潮的变化不会很大, 其可以被接收机钟差吸收, 可忽略不计。但如果计算周期比较长, 则必须考虑极潮的影响^[42]。

2.2.4 多路径效应

多路径效应是指卫星信号在传输过程中被地面、建筑物、树木等物体反射、折射、散射等现象所影响, 导致接收机接收到多个信号, 其中包括直射信号和反射信号, 从而影响了信号的传输质量和精度。多路径效应会导致信号的延迟、失真和干扰, 从而影响定位精度和可靠性。在卫星接收机中, 多路径效应是一个常见的误差源, 需要通过多种技术手段来减小其影响, 如天线设计、信号处理算法、地面环境优化等。为了减小多路径效应的影响, GNSS 系统采用了多普勒效应、码跟踪等技术来对信号进行处理, 同时也需要在信号接收的环境中进行优化, 如选择开阔的场地、避免高楼、树木等遮挡物, 以及采用高精度天线等措施。目前, 为了解决多路径问题, 人们从接收器的放置环境、

硬件设备的改进以及算法的优化三个方面入手，采取了一系列措施。

(1) 放置接收机时，要避开有强反射面的地方，尽量远离高达建筑物或者装有玻璃表面的物体。

(2) 使用多径抑制技术的天线和接收机会带来额外的负担，包括增加设备重量和成本。

(3) 采用数据处理算法，主要涉及小波分析、Vondrak 滤波、恒星滤波、多径半球图模型等。但是，大部分情况下，通过上述方式很难得到实时高精度的动态定位结果^[71]。

2.2.5 地球自转效应

地球自转效应是指地球自转对卫星信号的影响。由于地球自转的存在，卫星在地球上的运动轨迹是一个旋转的球面，而不是一个平面。这意味着接收机接收到的信号频率会受到地球自转的影响而发生变化。具体来说，当 GNSS 卫星向东运动时，它的运动速度会增加，导致信号频率变高。相反，当卫星向西运动时，它的运动速度会减慢，导致信号频率变低。这种频率变化称为多普勒效应。GNSS 接收机需要考虑地球自转效应来计算卫星的真实位置和速度。如果不考虑地球自转效应，计算出的卫星位置和速度将会有误差，从而影响导航精度。

假设接收机的位置坐标为 $(X_R \ Y_R \ Z_R)$ ，卫星的坐标为 $(X^S \ Y^S \ Z^S)$ ，由地球自转效应改正为：

$$\Delta D_{\tilde{\omega}} = \frac{\tilde{\omega}}{c} \left[Y^S (X_R - X^S) - X^S (Y_R - Y^S) \right] \quad (2.19)$$

其中， $\tilde{\omega}$ 为地球自转角速度。

2.3 数据预处理

在 RTK 定位中，数据质量控制是实现高精度定位的重要一环，特别是在实时定位模式下的数据预处理。当前城市复杂环境下的高精度定位需求越来越大，面对高遮挡高噪声的定位环境，合理有效的数据预处理策略会有效减少较大定位误差现象的出现。本节将对数据预处理质量控制中的实时周跳探测和伪距粗差剔除进行分析。周跳主要是由于信号失锁和中断所引起的，对涉及相位观测值的数据影响较大。伪距粗差主要受空间环境、卫星姿态和接收机噪声等的影响。

2.3.1 周跳探测

(1) 基于 GF 组合的周跳探测

使用双频伪距 GF 组合所得结果，包含了电离层延迟差异和硬件延迟差异的余项，这两者的影响都被考虑在内。将双频相位 GF 结合后，只剩下两个频点的模糊度差异、

电离层延迟差异和硬件延迟差异，其中硬件延迟可以通过模糊度的吸收得以消除。在历元间未发生周跳的条件下，通过历元间 GF 组合作差得到的结果就是双频电离层延迟的差异。在使用 GF 组合时，伪距并不涉及整周模糊度求解，因此相位信息可以充分利用伪距中的电离层延迟信息，达到消除电离层的目的。但伪距观测值的引入，大大增加了 GF 组合的噪声，一般情况下组合后的伪距观测噪声远远大于相位噪声，因此要对组合后的伪距噪声进行处理，通常使用 N 阶多项式拟合的方法生成 Q，故 GF 组合探测周跳模型为^[43]：

$$\Delta L_{GF} = L_{GF} - Q = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \quad (2.20)$$

GF 组合周跳判断条件为：

$$|\Delta L_{GF}(i) - \Delta L_{GF}(i-1)| > 6 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \quad (2.21)$$

$$|\Delta L_{GF}(i+1) - \Delta L_{GF}(i)| > 1 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \quad (2.22)$$

当上述两个式子被同时满足时，即可判定当前历元发生周跳；若只满足(2.21)，则认为粗差。

虽然伪距观测值的噪声可以通过多项式的拟合进行消除，但在实际应用时仍然存在很多缺点，如拟合过程需要大量的历元，对于定位初始阶段无法判断当前历元是否发生周跳。此外当卫星高度角较低时，观测数据受多路径和噪声影响较大，采用多项式拟合无法完全消除。

(2) 基于 MW 组合的周跳探测

MW 组合的公式见式(2.8)，MW 组合周跳探测模型为：

$$N_{MW} = N_1 - N_2 = \Phi_1 - \Phi_2 - \frac{f_1 - f_2}{c \cdot (f_1 - f_2)} \cdot (f_1 P_1 - f_2 P_2) \quad (2.23)$$

其中， N_{MW} 是宽巷模糊度，由于 MW 组合同样引入了伪距观测值，放大了组合后的噪声，通常采用历元间求平均的方法，即 \bar{N}_{MW} 来消除伪距噪声的影响，则 MW 组合周跳判断条件为：

$$|\bar{N}_{MW}(i-1) - N_{MW}(i)| > 4\sigma(i-1) \quad (2.24)$$

$$|\bar{N}_{MW}(i+1) - N_{MW}(i)| < 1 \quad (2.25)$$

其中， σ 为前 $i-1$ 个历元的 MW 组合的标准差。若同时满足(2.24)和(2.25)，则认为发生周跳；若只满足(2.24)，则认为粗差^[44]。

由于 MW 组合引入了伪距观测值，但由于伪距噪声的存在，很容易将周跳错误地识别为噪声。

(3) 单频周跳探测

单频数据无法组成 GF、MW 等组合，当前常用的探测周跳方法是采用多项式拟合

法,通过分析相位数据来进行多项式拟合。这种方法只能在匀速运动或静态定位模式下使用,因为无法确定相位变化是由接收机运动引起的还是周跳引起的。利用星间单差观测值的残差进行周跳探测,这一方法需要测站的坐标信息,并且只适用于静态定位模式。

为了消除几何运动状态的影响,通常采用单频伪距相位组合值进行周跳探测,表达式如下所示:

$$\Phi - P = 2 \frac{I}{f^2} + \lambda N - K + \varepsilon \quad (2.26)$$

其中, K 为伪距相位硬件延迟差异,一般变化很小。

从上述公式中可以推断出,伪距相位的计算不仅仅涉及模糊度,还涉及电离层的差异。电离层的变化在一段时间内相对稳定,因此可以使用滑动多项式逼近来预测电离层误差。这种方法容易受到伪距噪声的干扰,特别是对于实时数据而言影响更为明显。因此,在处理规律运动或静态数据时,常常需要使用相位观测值多项式拟合综合方法来进行周跳探测。

2.3.2 伪距粗差剔除

伪距粗差指的是异常的伪距测量,与其他测量值差异显著,可能会严重影响定位结果的误差。伪距粗差可能由多种因素引起,例如:多路径效应、钟差和大气延迟等。粗差探测则通过对比每个卫星的伪距测量值和其他卫星的伪距测量值的差异,来检测和排除异常值。在高精度定位中,粗差的影响比其他误差更加显著,因此在进行高精度定位时,必须重视通过伪距进行粗差探测的作用。

伪距观测值用 $C1$ 、 $P1$ 、 $P2$ 表示,则有如下表达式:

$$DCB_{C_1P_1} = C_1 - P_1 = DCB_{s-C_1P_1} + DCB_{r-C_1P_2} + \Delta_{C_1P_1} + \zeta \quad (2.27)$$

$$DCB_{C_1P_1} = P_1 - P_2 = DCB_{s-P_1P_2} + DCB_{r-P_1P_2} + \Delta_{P_1P_2} + I + \vartheta \quad (2.28)$$

其中, $DCB_{s-C_1P_1}$ 和 $DCB_{r-C_1P_2}$ 以及 $DCB_{s-P_1P_2}$ 和 $DCB_{r-P_1P_2}$ 分别为卫星端和接收机端的码偏差; Δ 为码偏差变化量; I 为电离层延迟误差; ζ 、 ϑ 分别为多路径误差和观测值噪声。

伪距粗差的探测的条件:

(1) 当伪距观测值中不存在较大粗差:

$$|DCB_{C_1P_1}| \leq \eta_1 \text{ 且 } |DCB_{P_1P_2}| \leq \eta_2$$

(2) 当伪距观测值中存在大粗差:

$$|DCB_{C_1P_1}| > \eta_1 \text{ 或 } |DCB_{P_1P_2}| > \eta_2$$

$\eta_2 > \eta_1$, η_2 、 η_1 为阈值,取值 $\eta_1=30\text{m}$, $\eta_2=60\text{m}$ ^[45]。在进行数据预处理时,当粗差较大,可以通过粗差探测进行标记和修复;当粗差较小时,可以在后续进行数据处理时通过卡尔曼滤波进行校正处理,以削弱小粗差对于定位的影响。

2.4 随机模型

2.4.1 信噪比随机模型

信号质量的好坏受到多种因素的影响,包括信号的强度、传播过程中的误差、多路径效应以及接收机天线的性能等。信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)是用来评估信号观测质量的一种重要指标,它可以帮助我们判断信号的强弱和噪声的影响程度,SNR 随机模型可写为^[46,47]:

$$\sigma^2 = B_i \left(1 + \frac{1}{2 \times T \times 10^{\frac{C/N_0}{10}}} \right) \cdot 10^{\frac{C/N_0}{10}} \quad (2.29)$$

其中, C/N_0 为信噪比,单位为 dB, B_i 为相位跟踪环带宽(Hz), T 为一体化载波的时长。

由于观测噪声方差在上式中可以忽略不计,因此上式可改写为:

$$\sigma^2 = B_i \times 10^{\frac{C/N_0}{10}} \quad (2.30)$$

2.4.2 高度角随机模型

大气延迟和多径误差会随着卫星高度角变低而增大。因此,可以用卫星高度角来建立随机模型^[48,49]。将观测噪声模型化为随卫星高度角变化的函数模型:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= a^2 + b^2 \cos^2(E) \\ \sigma^2 &= a^2 + b^2 / \sin^2(E) \end{aligned} \quad (2.31)$$

其中, E 为卫星高度角, a 、 b 为经验值,一般根据经验或通过拟合方法给出。

2.5 参数估计理论

本节对加权最小二乘算法和卡尔曼滤波算法进行详细介绍,介绍了其在定位解算中的具体表达形式、状态参数和观测方程之间的关系以及不同定位模式下的参数设置。

2.5.1 加权最小二乘算法

最小二乘法是一种用于精确测量的平差理论,GNSS 观测值的数学模型可写为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{R} \quad (2.32)$$

式中, \mathbf{y} 为观测值误差修正后的残差向量; \mathbf{G} 为根据卫星、接收近似坐标、对流层湿延迟映射函数形成的设计矩阵; \mathbf{x} 为待估参数; $\mathbf{R} = E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T)$; $\boldsymbol{\varepsilon}$ 符合正态分布,方差为 0。

构造目标函数:

$$\mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{y} = \min \quad (2.33)$$

对式(2.34)求 \mathbf{x} 的偏导,联立式(2.32):

$$\frac{\partial(\mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y}^T \frac{\partial(\mathbf{R} \mathbf{y})}{\partial \mathbf{x}} + (\mathbf{R} \mathbf{y})^T \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{y}^T \mathbf{R} \mathbf{G} = 0 \quad (2.34)$$

转置后可得：

$$\mathbf{G}^T \mathbf{R} \mathbf{y}^T = 0 \quad (2.35)$$

将(2.33)代入(2.35)，整理得到最小二乘估计结果为：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \\ \mathbf{P} &= (\mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \end{aligned} \quad (2.36)$$

其中， \mathbf{P} 为状态参数向量的协方差阵。在进行数据处理时，待估参数过多会导致出现高阶矩阵求逆的问题，通常会采用一定的方法去除掉部分状态参数，避免该问题的发生^[50]。此外，通过序贯平差法，可以在法方程中消除后续不再关心的参数。

2.5.2 卡尔曼滤波算法

在 GNSS 定位中，卡尔曼滤波可以用于对接收机的位置、速度等状态量进行估计和预测，以提高定位精度和稳定性。卡尔曼滤波包含了预测模型和状态更新两个部分，前者用于预测当前状态，后者用于根据观测值对当前状态进行更新^[51]。

其预测模型为：

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}^-(k) = \Phi(k-1) \hat{\mathbf{x}}^-(k-1) \\ \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}(k)}^- = \Phi(k-1) \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}(k-1)}^- \Phi^T(k-1) + \mathbf{Q}(k-1) \end{cases} \quad (2.37)$$

其中， k 表示历元； \mathbf{x} 为接收机坐标、钟差改正等参数在内的待估参数； Φ 为状态转移矩阵； \mathbf{Q} 为过程噪声矩阵； \mathbf{P} 为参数的协方差矩阵。 $\hat{*}$ 为估计值； $*^-$ 表示先验值。

预测模型和历元的观测模型可以组成形如式(2.37)的观测模型：

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^-(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{G}(k) \end{bmatrix} \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{P}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}(k)}^- & 0 \\ 0 & \mathbf{R}(k) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

在 Kalman 滤波中，动态和静态定位的差异主要体现在状态转移矩阵 Φ 和过程噪声矩阵 \mathbf{Q} 的设定上，这两个矩阵在动态和静态定位时需要进行不同的调整。

在进行静态定位时，时钟误差参数和对流层误差参数分别呈现为随机噪声模型和随机游走模型且接收机的坐标参数保持不变。整周模糊度参数也在不发生周跳的情况下保持不变，因此状态转移矩阵 Φ 和过程噪声矩阵 \mathbf{Q} 可以写成：

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \sigma_{\delta t}^2 & & \\ & & & & \sigma_{trop}^2 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

其中, $\sigma_{\delta t} = 1 \text{ ms}$, $\sigma_{trop} = 2 \text{ cm/h}$; 当发生周跳时, 状态转移矩阵中的系数为 0。

进行动态定位时, 接收机的速度未知, 此时, 接收机的坐标参数可以模拟为随机噪声模型时, 其状态转移矩阵 Φ 和过程噪声矩阵 \mathbf{Q} 可定义为:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_{dx}^2 & & & & & \\ & \sigma_{dy}^2 & & & & \\ & & \sigma_{dz}^2 & & & \\ & & & \sigma_{\delta t}^2 & & \\ & & & & \sigma_{trop}^2 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

其中, $[\sigma_{dx}, \sigma_{dy}, \sigma_{dz}]$ 是坐标噪声, 动态定位时将其设置为 100m。

参数更新公式可写成:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}(k)} = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k)]\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}(k)}^- \\ \hat{\mathbf{x}}(k) = \hat{\mathbf{x}}^-(k) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{H}(k)\hat{\mathbf{x}}^-(k)] \end{cases} \quad (2.41)$$

其中, \mathbf{H} 为根据卫星、接收机近似坐标和对流层延迟映射函数形成的矩阵; $\mathbf{K}(k)$ 为 Kalman 滤波的增益矩阵, 可写为:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}(k)}^- \mathbf{H}^T(k) [\mathbf{H}(k)\mathbf{P}_{\hat{\mathbf{x}}(k)}^- \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1} \quad (2.42)$$

2.6 RTK 定位方程的建立与解算

2.6.1 短基线 RTK 定位方程的建立与解算

假设测站 r 和测站 b 同时观测同一颗卫星 j , 然后将两个测站对卫星的观测量做站间单差, 站间单差的观测方程为^[52]:

$$\begin{cases} \nabla P_{rb,i}^j = \nabla \rho_{rb,i}^j - c \cdot \nabla t_{rb} + \nabla I_{rb,i}^j + \nabla T_{rb}^j + \varepsilon \\ \lambda_i \cdot \nabla \Phi_{rb,i}^j = \nabla \rho_{rb,i}^j - c \cdot \nabla t_{rb} - \nabla I_{rb,i}^j + \nabla T_{rb}^j + \lambda_i \cdot \nabla \alpha_{rb,i}^j + \xi \end{cases} \quad (2.43)$$

其中, ∇ 为单差算子, 单差后的伪距和载波相位观测噪声仍以 ε 和 ξ 表示, 单差后的观测噪声相较于非差被放大。从式(2.43)可以看出, 站间单差可以消除掉卫星端的误差项。

在站间单差的基础上, 测站 r 和测站 b 同时观测卫星 j 和 k , 在两颗卫星之间作星间

单差，星间单差的观测方程为：

$$\begin{cases} \nabla \Delta P_{rb,i}^{jk} = \nabla \Delta \rho_{rb,i}^{jk} + \nabla \Delta I_{rb,i}^{jk} + \nabla \Delta T_{rb}^{jk} + \varepsilon \\ \lambda_i \cdot \nabla \Delta \Phi_{rb,i}^{jk} = \nabla \Delta \rho_{rb,i}^{jk} - \nabla \Delta I_{rb,i}^{jk} + \nabla \Delta T_{rb}^{jk} + \lambda \cdot \nabla \Delta \alpha_{rb,i}^{jk} + \xi \end{cases} \quad (2.44)$$

其中， $\nabla \Delta$ 为双差算子，上式可以看出星间单差可以消除掉接收机端的误差。当测站 r 和测站 b 距离较近时，双差对流层和双差电离层也可忽略不计，故上式可改写为：

$$\begin{cases} \nabla \Delta P_{rb,i}^{jk} = \nabla \Delta \rho_{rb,i}^{jk} + \varepsilon \\ \lambda_i \cdot \nabla \Delta \Phi_{rb,i}^{jk} = \nabla \Delta \rho_{rb,i}^{jk} + \lambda \cdot \nabla \Delta \alpha_{rb,i}^{jk} + \xi \end{cases} \quad (2.45)$$

由于短基线 RTK 可以消除卫星端和接收机端的绝大部分误差，因此在短基线 RTK 定位模式下，只需估计接收机的位置参数和整周模糊度参数，以双频为例：

$$\mathbf{x} = (\mathbf{r}_r^T, \mathbf{v}_r^T, a_{rb,1}^T, a_{rb,2}^T)^T \quad (2.46)$$

其中， $a_{rb,1}$ 和 $a_{rb,2}$ 分别为 L1 和 L2 频段单差载波相位整周模糊度，此时卡尔曼滤波的设计矩阵 H 、设计矩阵的偏导数 h 以及测量方差协方差矩阵 R 为^[21]：

$$\mathbf{h} = (h_{\Phi,1}^T, h_{\Phi,2}^T, h_{P,1}^T, h_{P,2}^T)^T \quad (2.47)$$

$$H = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \bigg|_{x=\hat{x}} = \begin{pmatrix} -DE & 0 & \lambda_1 D & 0 \\ -DE & 0 & 0 & \lambda_2 D \\ -DE & 0 & 0 & 0 \\ -DE & 0 & 0 & 0 \\ -DE & 0 & 0 & 0 \\ -DE & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$R = \begin{pmatrix} DR_{\Phi,1} D^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & DR_{\Phi,1} D^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & DR_{\Phi,1} D^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & DR_{\Phi,1} D^T \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

上式中

$$h_{\Phi,i} = \begin{pmatrix} \rho_{rb}^{12} + \lambda_i(N_{rb}^1 - N_{rb}^2) \\ \rho_{rb}^{13} + \lambda_i(N_{rb}^1 - N_{rb}^3) \\ \vdots \\ \rho_{rb}^{1m} + \lambda_i(N_{rb}^1 - N_{rb}^m) \end{pmatrix} \quad h_{P,i} = \begin{pmatrix} \rho_{rb}^{12} \\ \rho_{rb}^{13} \\ \vdots \\ \rho_{rb}^{1m} \end{pmatrix}$$

$$R_{\Phi,i} = \begin{pmatrix} 2(\sigma_{\Phi,i}^1)^2 & & & \\ & 2(\sigma_{\Phi,i}^2)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2(\sigma_{\Phi,i}^m)^2 \end{pmatrix} \quad R_{P,i} = \begin{pmatrix} 2(\sigma_{P,i}^1)^2 & & & \\ & 2(\sigma_{P,i}^2)^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2(\sigma_{P,i}^m)^2 \end{pmatrix}$$

m 为共视卫星的个数, 通常选取高度角最高的一颗卫星作为参考星与其他共视卫星作星间差; $\sigma_{\Phi,i}^s$ 和 $\sigma_{P,i}^s$ 分别为 L_i 频率上卫星 s 的伪距和载波的测量噪声标准差; D 为星间单差转换矩阵, 通常定义为:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

在完成上述参数矩阵设置后, 经过卡尔曼滤波的预测和校正即可得到 RTK 定位的浮点解, 但此时的解并不是真正意义上的高精度解, 还需要进行载波相位整周模糊度固定, 整周模糊度固定将在后续章节中进行详细介绍。

2.6.2 长基线 RTK 定位方程的建立与解算

(1) 双差对流层模型

在长基线 RTK 定位模式下, 通过 Saastamoinen 模型计算对流层天顶干延迟, 通过 Neill(Neill Mapping Function, NMF)模型计算对流层映射函数, 从而对对流层干延迟误差进行改正; 对于剩余的对流层湿分量, 可以将其作为未知数通过卡尔曼滤波进行参数估计, 双差对流层湿延迟定义^[53]为:

$$T_{rb}^{jk} = [m(El_r^j)T_{z,r}^j - m(El_b^j)T_{z,b}^j] - [m(El_r^k)T_{z,r}^k - m(El_b^k)T_{z,b}^k] \quad (2.50)$$

其中, m 为对流层映射函数; El 为卫星的高度角; T_z 为天顶方向电离层延迟。由于卫星的单差对流层湿延迟相关性较强, 通常可采用一组单差对流层湿延迟估计所有可视卫星的单差组合, 则上式可改写为:

$$T_{rb}^{jk} = [m(\alpha^j) - m(\alpha^k)](T_{z,r}^j - T_{z,b}^j) \quad (2.51)$$

其中, $\alpha = \frac{El_r + El_b}{2}$ 表示参考站 b 和流动站 r 共视星高度角的平均值。

(2) 双差电离层模型

通常认为, 不同卫星间的电离层延迟是不相关的。双差电离层一般被定义为^[54]:

$$I_{rb}^{jk} = [M(El_r^j)I_{z,r}^j - M(El_b^j)I_{z,b}^j] - [M(El_r^k)I_{z,r}^k - M(El_b^k)I_{z,b}^k] \quad (2.52)$$

其中, I_z 为天顶对流层延迟, M 为电离层映射函数, 在长基线定位模式下, 通常取流动

站和参考站投影函数的平均值，则上式可转换为：

$$I_{rb}^{jk} = M(El^j)[I_{z,r}^j - I_{z,b}^j] - M(El^k)[I_{z,r}^k - I_{z,b}^k] \quad (2.53)$$

其中， $M(El^j) = \frac{M(El_r^j) + M(El_b^j)}{2}$ 。

(3) 长基线 RTK

在长基线(>20km)RTK 定位模式下，对流层和电离层很难被消除，因此将长基线的双差对流层湿延迟和双差电离层当作未知数进行参数估计，在卡尔曼滤波状态量中增加双差电离层和双差对流层两个状态量，两者的时间变化被模拟为随机游走模型。长基线星间差观测方程为^[55]：

$$\begin{cases} \nabla \Delta P_{rb,i}^{jk} = \nabla \Delta \rho_{rb,i}^{jk} + \nabla \Delta I_{rb,i}^{jk} + \nabla \Delta T_{rb}^{jk} + \varepsilon \\ \lambda_i \cdot \nabla \Delta \Phi_{rb,i}^{jk} = \nabla \Delta \rho_{rb,i}^{jk} - \nabla \Delta I_{rb,i}^{jk} + \nabla \Delta T_{rb}^{jk} + \lambda \cdot \nabla \Delta \alpha_{rb,i}^{jk} + \xi \end{cases} \quad (2.54)$$

待估计的状态参数为：

$$\mathbf{x} = (\mathbf{r}_r^T, \mathbf{v}_r^T, Z_{T,r}, Z_{T,b}, \mathbf{I}_{z,rb}^T, a_{rb,1}^T, a_{rb,2}^T)^T \quad (2.55)$$

其中， $Z_{T,r}$ 和 $Z_{T,b}$ 分别为流动站和基准站的对流层方向的总延迟；

$\mathbf{I}_{z,rb} = [I_{z,rb}^1, I_{z,rb}^2, \dots, I_{z,rb}^m]^T$ 为 L1 频段上天顶方向电离层延迟误差的站间单差。

对流层误差的大小与基线长度和测站间的高程差有关，天顶对流层的约束和随机游走噪声定义^[56]为：

$$P_{trop} = (\log(1 + D \cdot 5 \cdot 10^{-4}) \cdot 0.05 + H \cdot 5 \cdot 10^{-5}) \quad (2.56)$$

$$Q_{trop} = (\log(1 + D \cdot 10^{-5}) \cdot 0.02 + H \cdot 10^{-5}) / \sqrt{3600 \cdot \Delta t} \quad (2.57)$$

其中， \mathbf{P} 为对流层状态量对应的协方差矩阵； \mathbf{Q} 为对流层状态量对应的过程噪声矩阵； D 为基线长度； H 为测站间的高程差； Δt 为历元间隔。

电离层误差的大小除了与基线长度和测站间的高程差有关外，还与纬度位置密切相关，因此将电离层的约束和随机游走噪声定义^[56]为：

$$P_{iono} = (D \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot \exp((90 - lat) / 50 - 1)) / \sin(El) \quad (2.58)$$

$$Q_{iono} = (D \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot \exp((90 - lat) / 50 - 1)) / \sin(El) \sqrt{3600 \cdot \Delta t} \quad (2.59)$$

其中， \mathbf{P} 为电离层状态量对应的协方差矩阵； \mathbf{Q} 为电离层状态量对应的过程噪声矩阵； lat 为参考站和流动站纬度的平均值。

此时卡尔曼滤波的设计矩阵 \mathbf{H} 、设计矩阵的偏导数 \mathbf{h} 以及测量方差协方差矩阵 \mathbf{R} 为：

$$\mathbf{h} = (h_{\Phi,1}^T, h_{\Phi,2}^T, h_{P,1}^T, h_{P,2}^T)^T \quad (2.60)$$

$$H = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}} = \begin{pmatrix} -DE & 0 & DM_{T,r} & DM_{T,r} & -\gamma_1 M_I & \lambda_1 D \\ -DE & 0 & DM_{T,r} & DM_{T,r} & -\gamma_2 M_I & \lambda_1 D \\ -DE & 0 & DM_{T,r} & DM_{T,r} & -\gamma_3 M_I & \\ -DE & 0 & DM_{T,r} & DM_{T,r} & -\gamma_4 M_I & \\ -DE & 0 & DM_{T,r} & DM_{T,r} & -\gamma_5 M_I & \\ -DE & 0 & DM_{T,r} & DM_{T,r} & -\gamma_6 M_I & \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

其中

$$h_{\Phi,i} = \begin{pmatrix} \rho_{rb}^{12} + T_{rb}^{12} - \gamma_k (m_I^1 I_{rb}^1 - m_I^2 I_{rb}^2) + \lambda_i (N_{rb,i}^1 - N_{rb,i}^2) + d\Phi_{rb,i}^{12} \\ \rho_{rb}^{13} + T_{rb}^{13} - \gamma_k (m_I^1 I_{rb}^1 - m_I^3 I_{rb}^3) + \lambda_i (N_{rb,i}^1 - N_{rb,i}^3) + d\Phi_{rb,i}^{13} \\ \vdots \\ \rho_{rb}^{1m} + T_{rb}^{1m} - \gamma_k (m_I^1 I_{rb}^1 - m_I^m I_{rb}^m) + \lambda_i (N_{rb,i}^1 - N_{rb,i}^m) + d\Phi_{rb,i}^{1m} \end{pmatrix}$$

$$h_{P,i} = \begin{pmatrix} \rho_{rb}^{12} + T_{rb}^{12} + \gamma_k (m_I^1 I_{rb}^1 - m_I^2 I_{rb}^2) \\ \rho_{rb}^{13} + T_{rb}^{13} + \gamma_k (m_I^1 I_{rb}^1 - m_I^3 I_{rb}^3) \\ \vdots \\ \rho_{rb}^{1m} + T_{rb}^{1m} + \gamma_k (m_I^1 I_{rb}^1 - m_I^m I_{rb}^m) \end{pmatrix}$$

$$\gamma_k = \lambda_k^2 / \lambda_1^2$$

$$m_{T,r} = \begin{pmatrix} m_{WG,r}^1 (El_r^1) & m_{WG,r}^1 (El_r^1) \cot(El_r^1) \cos Az_r^1 & m_{WG,r}^1 (El_r^1) \cot(El_r^1) \sin Az_r^1 \\ m_{WG,r}^2 (El_r^2) & m_{WG,r}^2 (El_r^2) \cot(El_r^2) \cos Az_r^2 & m_{WG,r}^2 (El_r^2) \cot(El_r^2) \sin Az_r^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{WG,r}^m (El_r^m) & m_{WG,r}^m (El_r^m) \cot(El_r^m) \cos Az_r^m & m_{WG,r}^m (El_r^m) \cot(El_r^m) \sin Az_r^m \end{pmatrix}$$

$$M_I = (m_I^1, m_I^2, \dots, m_I^m)^T$$

(4) 三频非组合 RTK

三频非组合 RTK 大大增加了观测模型的强度，避免了观测值组合造成的噪声放大的问题出现，可以有效提高整周模糊度固定成功率，缩短模糊度首次正确固定时间。考虑电离层和对流层的三频非组合 RTK 表达式如下所示：

$$\begin{cases} \nabla \Delta P_{rb,1}^{jk} = \nabla \Delta \rho_{rb,1}^{jk} + \nabla \Delta T_{rb}^{jk} + \gamma_1 \nabla \Delta I_{rb,1}^{jk} + \varepsilon \\ \nabla \Delta P_{rb,2}^{jk} = \nabla \Delta \rho_{rb,2}^{jk} + \nabla \Delta T_{rb}^{jk} + \gamma_2 \nabla \Delta I_{rb,2}^{jk} + \varepsilon \\ \nabla \Delta P_{rb,3}^{jk} = \nabla \Delta \rho_{rb,3}^{jk} + \nabla \Delta T_{rb}^{jk} + \gamma_3 \nabla \Delta I_{rb,3}^{jk} + \varepsilon \\ \lambda_1 \cdot \nabla \Delta \Phi_{rb,1}^{jk} = \nabla \Delta \rho_{rb,1}^{jk} + \nabla \Delta T_{rb}^{jk} - \gamma_1 \nabla \Delta I_{rb,1}^{jk} - \lambda_1 \cdot \nabla \Delta \alpha_{rb,1}^{jk} + \zeta \\ \lambda_2 \cdot \nabla \Delta \Phi_{rb,2}^{jk} = \nabla \Delta \rho_{rb,2}^{jk} + \nabla \Delta T_{rb}^{jk} - \gamma_2 \nabla \Delta I_{rb,2}^{jk} - \lambda_2 \cdot \nabla \Delta \alpha_{rb,2}^{jk} + \zeta \\ \lambda_3 \cdot \nabla \Delta \Phi_{rb,3}^{jk} = \nabla \Delta \rho_{rb,3}^{jk} + \nabla \Delta T_{rb}^{jk} - \gamma_3 \nabla \Delta I_{rb,3}^{jk} - \lambda_3 \cdot \nabla \Delta \alpha_{rb,3}^{jk} + \zeta \end{cases} \quad (2.62)$$

其中， $\gamma_i = f_1^2 / f_i^2$ 。

2.7 本章小结

本节内容讲述了 BDS RTK 定位的相关原理。首先，对 RTK 定位的多种函数模型进行了详细介绍，同时也对 BDS 伪距和相位观测值的观测模型以及不同形式的线性组合模型进行了深入的讨论。阐明了如何采用常见的预处理方法来确保观测数据的准确性和可信性。接下来又介绍了随机模型的概念，并着重探讨了基于高度角和信噪比的随机模型。在最后一部分，我们详细介绍了 RTK 在不同的定位模式下如何进行参数估计，包括短基线和长基线。

第3章 全球范围内 BDS 多频多基线 RTK 定位性能评估

3.1 概述

BDS-3 与 BDS-2 不同,它在保留 BDS-2 的 B1I 和 B3I 频点的同时增加了 B1C 和 B2a 两个新的频点,而对于 BDS-2 的 B2I 频点, BDS-3 系统改变了其调制类型,使其保持频率不变,转变为 B2b 频点^[4]。随着 BDS-3 全球卫星导航系统的不断完善和发展,针对 BDS-3 新频点的 RTK 定位,国内外众多学者开展了相关研究。在短基线 RTK 定位方面, Miao 等^[57]主要研究了北斗二号和北斗三号的随机建模和定位性能表现。基于建立的随机模型,对北斗二号和北斗三号 RTK 定位性能进行了分析。结果表明,在北斗三号双频定位中,超短基线和短基线的定位误差均在几厘米左右,与北斗二号双频定位类似。Yuan 等^[58]利用零基线和短基线采集的数据对北斗三号的 RTK 定位性能进行了分析,发现 B1C、B1I、B3I 单频 RTK 的定位精度基本相同,而 B2a 频的定位精度较低。此外,由于缺乏良好的随机模型,双频组合的定位结果并不总是优于单频组合。在长基线 RTK 定位方面,电离层校正与用户数据中的真实电离层延迟之间的差异较大,妨碍整周模糊度的快速固定。Odijk 等^[59]针对这一问题提出了一种提高定位性能的方法,即在观测数据中对电离层校正进行加权,可有效减少估计电离层和实际电离层之间的差异。Takasu 等^[16]针对超长基线(>1000km)的 RTK 提出一种新的策略,该策略不进行任何的线性组合,通过卡尔曼滤波估计未知参数,并配合卫星高度角层面的部分模糊度固定策略以及对固定的模糊度进行约束而实现长基线 RTK 的快速定位。Shu 等^[18]分析了影响北斗中长基线 RTK 精度的因素。处理了不同对流层条件下 38 公里至 167 公里的 15 组基线,以评估 RZTD 约束 RTK 的性能,研究发现对流层参数很难与高度分量区分开来。Zhang 等^[56]提出了三频长基线 RTK 算法,并评估 QZSS 对 GNSS RTK 的贡献。分析了多 GNSS 广播轨道误差、电离层误差和对流层误差对长基线 RTK 的影响。分析结果表明, QZSS 观测值的引入,与只有 GPS 或 GPS+Galileo 方案相比,可以显著改善收敛时间和瞬时 RTK 的性能。

与 B1I 和 B3I 相比, B1C 和 B2a 具有更好的信号强度,全面分析 B1C/B2a 双频 RTK 的定位表现对深入了解 BDS 性能优势具有重要意义。为全面评估 BDS 定位性能,本文选取了 5 组不同基线长度的 IGS/MEGX 测站,分析了当前 BDS-3、BDS-2+BDS-3、GPS 系统卫星的可见性。在短基线和长基线定位模式下,分别对单频 B1C、B1I、B2a、B3I 和 L1,双频 BDS-3(B1C/B2a)、BDS-3(B1I/B3I)、BDS-2+BDS-3 (B1I/B3I)、GPS(L1/L2),三频非组合 BDS-3 (B1C/B2a/B3I)定位精度、模糊度固定率、模糊度首次正确固定时间进行分析。

3.2 数据来源和配置分析

本文筛选出 5 组不同基线长度并且可以接收到 BDS-3、BDS-2 和 GPS 多频观测数据的 IGS/MEGX 观测站，采用 2020 年 8 月 3 日~2020 年 8 月 9 日共 7 天的数据。数据采样间隔为 30s，故每天数据共计 2880 个历元。测站位置分布如图 3.1(由于 METG 和 MET3 距离较远，故将其插入在分布图的右上角)。测站接收机和天线类型见表 3.1。

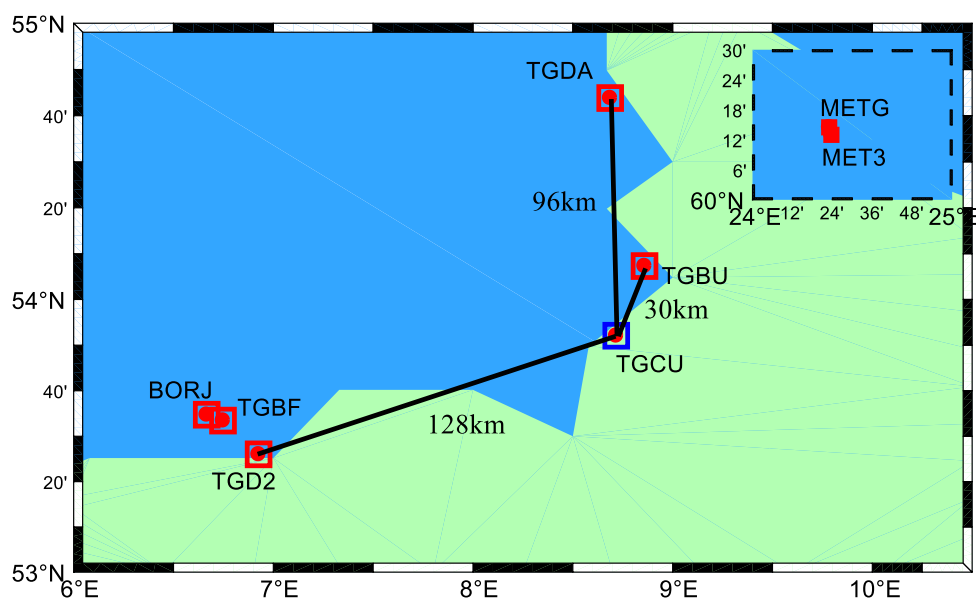


图 3.1 实验数据监测站分布

表 3.1 测站信息

测站名	天线类型	接收机类型
BORJ	LEIAR25.R4	JAVADTRE_3 DELTA
TGBF	LEIAR25.R4	LEICA GR50
TGD2	LEIAR25.R4	LEICA GR50
TGPU	LEIAR25.R4	LEICA GR50
TGBU	LEIAR25.R4	LEICA GR50
TGDA	LEIAR25.R4	LEICA GR50
METG	TRM59800.00	SEPT POLARX5
MET3	JAVRINGANT_DM	JAVAD TRE_3 DELTA

在进行 RTK 定位性能测试时单频 RTK 选取 BDS-3(B1C)、BDS-2+BDS-3(B1I)、GPS(L1); 双频 RTK 选择 BDS-3(B1C/B2a)、BDS-3(B1I/B3I)、BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)、GPS(L1/L2); 三频 RTK 选取 BDS-3(B1C/B2a/B3I)非组合。使用上海天文台 GNSS 分析

中心(http://202.127.29.4/shao_gnss_ac/)研发的 Net_Diff^[56]软件对测站进行数据处理, 权比策略选择高度角定权, 以定位解算日期前后共三天的 PPP 定位均值作为真值, 分别对可视卫星数目、ratio 值(次优整数解残差二次型与最优解残差二次型的比值)、定位精度(Root Mean Square, RMS)和模糊度首次正确固定时间四个方面进行分析。具体数据处理策略见表 3.2, 不同基线长度的测站组合见表 3.3。

表 3.2 数据处理策略

设置项	设置方式
截至高度角	15
卫星星历	广播星历
天顶对流层湿延迟	随机游走参数估计
天顶对流层干延迟	Saastamoinen model
电离层初始值	Klobuchar model
剩余电离层	随机游走参数估计
地球自转	模型改正
相对论效应	模型改正
模糊度固定策略	LAMBDA
参数估计方法	Kalman-filter

表 3.3 基线基本信息

基线	基线长度	模糊度估计策略
BORJ-TGBF	6km	Continuous
METG-MET3	3km	Instantaneous
TGCU-TGBU	30km	Continuous
TGDA-TGCU	96km	Continuous
TGD2-TGCU	128km	Continuous

3.3 实验分析与结果

3.3.1 可见卫星数目和位置精度衰减因子 PDOP

只有足够多的卫星才能够持续地提供观测数据, 才能确保定位的精确性和可靠性。一般而言, 只有在同时获得四颗或四颗以上卫星的观测数据时, 才能进行定位解算。在实际定位时, 影响定位精度的因素有很多, 如星座的几何构型、可视卫星数目等^[60]。

精度因子值的计算方法为: 可通过卫星高度角 E 和卫星方位角 A 计算得到:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \cos E_1 \sin A_1 & \cos E_1 \cos A_1 & \sin E_1 & 1 \\ \cos E_2 \sin A_2 & \cos E_2 \cos A_2 & \sin E_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos E_n \sin A_n & \cos E_n \cos A_n & \sin E_n & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

其中， E 为卫星高度角； A 为卫星方位角。

精度因子矩阵可表示为：

$$\mathbf{D} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

PDOP 的表达形式为：

$$PDOP = \sqrt{d_{11} + d_{22} + d_{33}} \quad (3.3)$$

PDOP 值可以表现卫星几何构型，其值越小，卫星的分布程度越好，定位精度越高。对基线 TGBU-TGCU 第 221 天的数据进行定位分析，其卫星数目和 PDOP 值如图 3.2 所示。BDS-2+BDS-3 的可用卫星数目在 8~14 颗之间变化；BDS-3 可用卫星数目在 5~9 颗之间变化；GPS 可用卫星数目在 5~10 颗之间变化；BDS-2+BDS-3 的 PDOP 值稳定在 0.5~1.5 之间；GPS 与 BDS-3 的 PDOP 值在 1~3 之间变化，大于 BDS-2+BDS-3。结果表明当前 BDS-2+BDS-3 的可用卫星数目和空间卫星几何构型，都明显优于 GPS；BDS-3 的空间卫星几何构型与 GPS 大致相当。

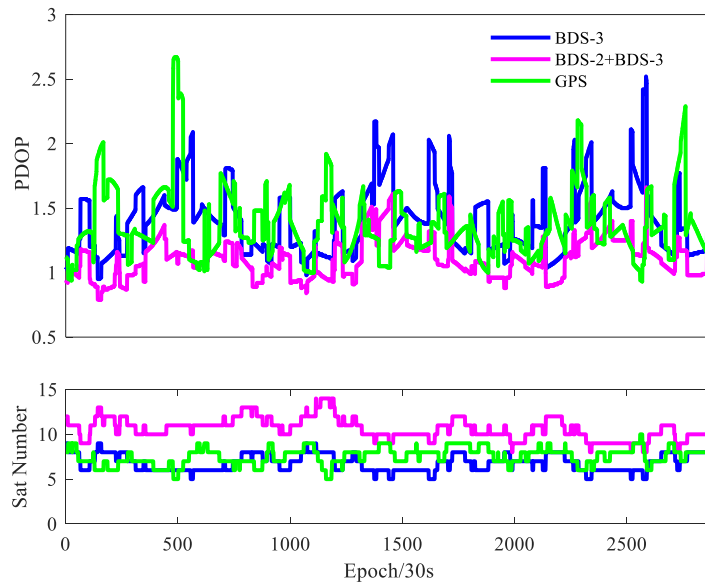


图 3.2 可用卫星数目和 PDOP 值

3.3.2 定位精度

单频接收机因为性价比高、体积小等优点受到越来越多厂家和研究机构的喜爱，因此研究单频低成本接收机的 RTK 定位具有可观的前景。为了分析 BDS-3 新频点 B1C 和 B2a 单频 RTK 定位性能，本文在短基线 RTK 的定位模式下，基于基线 BORJ-TGBF(6km)，选择 continuous 模糊度固定策略^[18](如无特别说明，本文默认 continuous 模糊度固定策略)。BDS-3(B1C)、BDS-3(B2a)、BDS-2+BDS-3(B1I)、BDS-2+BDS-3(B3I)和 GPS(L1)五种频率的 RMS 对比如图 3.3 所示，七天 RMS 和模糊度固定率的平均值如表 3.4 所述。由于当前北斗三号可见卫星较少，几何分布较差，导致 B1C 和 B2a 的模糊度固定率低于 L1，B1I 和 B3I，单频段 B1C、B1I、L1、B3I 的定位精度基本相同，而 B2a 频段定位精度较差。短基线 RTK 可以基本消除与卫星、接收机和大气延迟相关误差，因此造成 B2a 频段定位精度较差的主要原因是 B2a 信号本身的信号质量较差。DOY221 由于 BDS-3 在多个历元只有 4 颗卫星，导致 B1C 和 B2a 在该时期的定位精度较差。

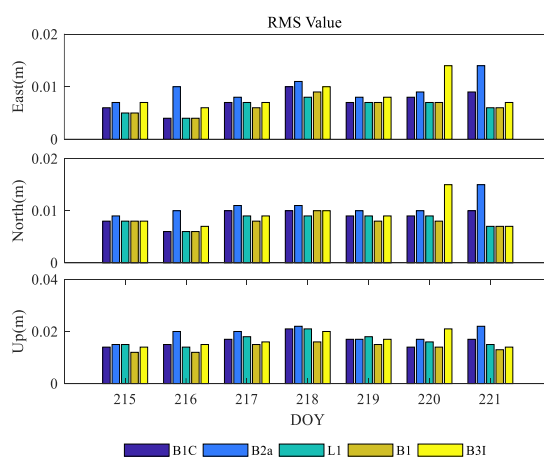


图 3.3 BORT-TGBF(6km)单频短基线 RTK 定位精度

表 3.4 BORJ-TGBF(6km)单频短基线 RTK 定位精度和模糊度固定率的平均值

频点	模糊度固定率	N-RMS(m)	E-RMS(m)	U-RMS(m)
B1C	97.73%	0.008	0.007	0.017
B2a	97.21%	0.013	0.012	0.020
B1I	99.83%	0.008	0.006	0.016
B3I	99.83%	0.008	0.007	0.017
L1	99.82%	0.009	0.008	0.017

单历元 RTK 模糊度固定率是评价 RTK 性能的重要指标之一。在短基线 RTK 定位模式下，GPS(L1L2)、BDS-3(B1CB2a)、BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)、BDS-3(B1C/B2a/B3I)、

BDS-3(B1I/B3I)五种频率的 RMS 对比结果如图 3.4 所示, 7 天的 RMS 和模糊度固定率的平均值如表 3.5 所述。从图 3.4 可以看出, 在 DOY218, 采用 instantaneous 模糊度固定策略的 BDS-3(B1CB2a)RTK 定位效果极差。为探究详细原因, 我们将该基线该时段的可视卫星数目和对应的 PDOP 绘制在图 3.5 中。可以看出在该时段的多个历元只能观测到 4 颗 BDS-3 卫星, 导致该时间段采用 instantaneous 模式, B1CB2a 的定位误差很大, 且 BDS-3(B1IB3I)的模糊度固定率极低(当天的模糊度固定率仅为 51.6%)。因此, 在计算平均 RMS 和模糊度固定率时, 去除了 DOY218 的 BDS-3(B1CB2a)和 BDS-3(B1IB3I)的定位结果。

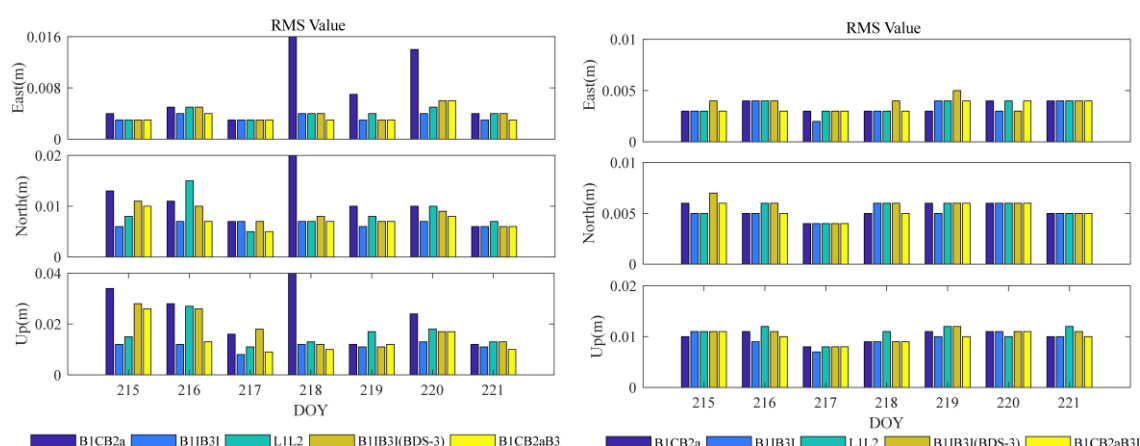


图 3.4 METG-MET3(3km)短基线 RTK 定位精度, 左图为采用 instantaneous 模糊度固定策略结果图, 右图为采用 continuous 模糊度固定策略结果图

表 3.5 METG-MET3(3km)短基线 RTK 定位精度和模糊度固定率的平均值, 表格上半部分为采用 instantaneous 模糊度固定策略结果, 表格下半部分为采用 continuous 模糊度固定策略结果图

频点	模糊度固定率	N-RMS(m)	E-RMS(m)	U-RMS(m)
B1C/B2a	97.68%	0.010	0.006	0.021
B1I/B3I	100.00%	0.007	0.003	0.011
L1L2	99.60%	0.008	0.004	0.017
B1I/B3I(BDS-3)	98.18%	0.008	0.005	0.020
B1C/B2a/B3I	98.30%	0.007	0.003	0.013
B1C/B2a	98.49%	0.005	0.003	0.010
B1I/B3I	100.00%	0.005	0.003	0.010
L1L2	99.96%	0.005	0.004	0.011
B1I/B3I(BDS-3)	98.43%	0.006	0.004	0.011
B1C/B2a/B3I	98.49%	0.005	0.003	0.010

从图 3.4 和表 3.5 可以看出, 在 *instantaneous* 模式下, BDS-2+BDS-3 (B1I/B3I) 和 GPS (L1L2) 的模糊度固定率分别为 100%、99.60%, 略高于 BDS-3(B1I/B3I)、BDS-3(B1C/B2a)和 BDS-3(B1C/B2a/B3I)。在定位精度方面, 由于 BDS-2+BDS-3 (B1I/B3I) 卫星数最多, PDOP 值最小, 三频 BDS-3 (B1C/B2a/B3I) 观测数最多, 使得这两种频率选择的定位效果最好。在 *continuous* 模式下, 与 *instantaneous* 模式相比, 定位精度有明显提高。在 DOY218, 由于 BDS-3 卫星数量较少, BDS-3(B1C/B2a)在 *instantaneous* 模式下定位误差较大, 但在选择 *continuous* 模式下仍能实现高精度定位。

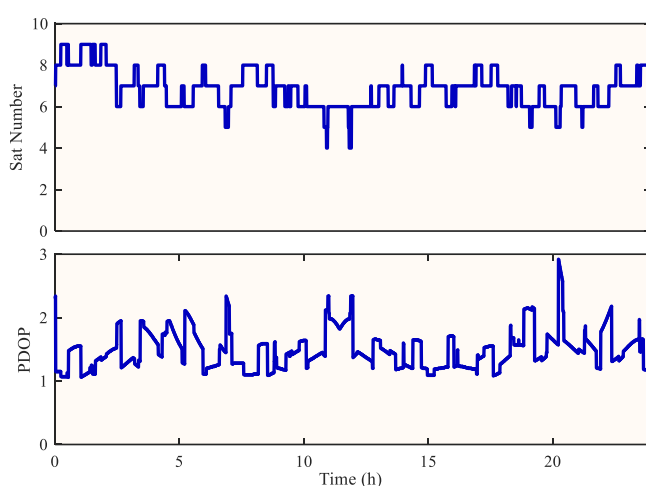


图 3.5 METG-MET3(3km)短基线 RTK 定位精度

由于单历元 RTK 模糊度固定忽略了历元间模糊度的相关性, 其模糊度固定率较低, 尤其是在长基线 RTK 定位的情况下, 难以获得高精度的定位结果。因此, 在实际应用中, 一般采用连续历元的模糊度固定策略。

为了研究基线长度的增加对于实际定位效果的影响, 我们选择了三组基线, TGCU-TGBU(30km)、TGCU-TGDA(96km)和 TGCU-TGD2(128km)。在长基线 RTK 定位模式下, GPS(L1L2)、BDS-3(B1C/B2a)、BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)、三频 BDS-3(B1C/B2a/B3I)、BDS-3(B1I/B3I)五种频率的 RMS 对比结果如图 3.6~3.8 所示, 7 天 RMS 和模糊度固定率的平均值如表 3.6~3.8 所述。在三个基线所在的区域, 电离层在 DOY220 和 DOY221 之间的两天较为活跃, 导致 RMS 值普遍较高, 定位精度略差。由于 BDS-3 可视卫星数目较少, 且几何分布较差, 导致 BDS-3(B1C/B2a)、三频 BDS-3(B1C/B2a/B3I)、BDS-3(B1I/B3I)的模糊度固定率低于 BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)和 GPS(L1L2)。随着基线长度的增加, 大气残余量变大, 使得模糊度浮点解的精度下降, 导致模糊度固定率降低。另一方面, 大气残余量的变大也增加了模糊度错误固定的概率, 从而影响到 RTK 的定位精度。5 种频率选择在基线较短时定位精度相当,

BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)和 GPS(L1L2)的定位精度略好。当基线变长时，BDS-3(B1CB2a)和 BDS-3(B1C/B2a/B3I)的定位效果更优。

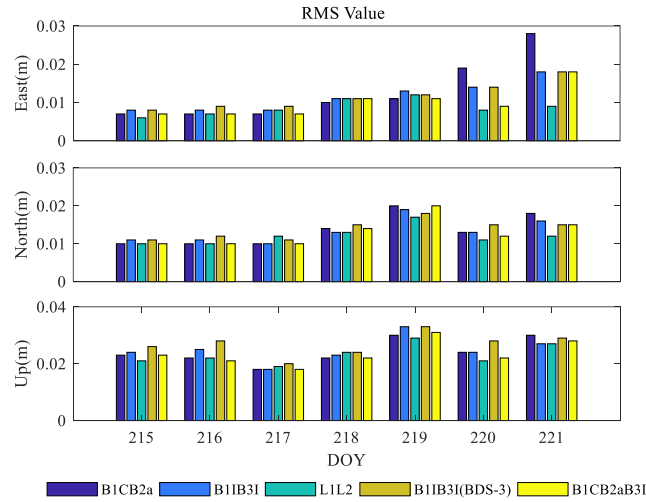


图 3.6 TGPU-TGBU(30km)的定位精度

表 3.6 TGPU-TGBU(30km)双频长基线 RTK 定位精度和模糊度固定率的平均值

频点	模糊度固定率	N-RMS(m)	E-RMS(m)	U-RMS(m)
B1C/B2a	93.53%	0.014	0.013	0.024
B1I/B3I	99.44%	0.014	0.011	0.025
L1L2	99.59%	0.012	0.008	0.024
B1I/B3I(BDS-3)	93.07%	0.014	0.012	0.027
B1C/B2a/B3I	93.65%	0.013	0.010	0.024

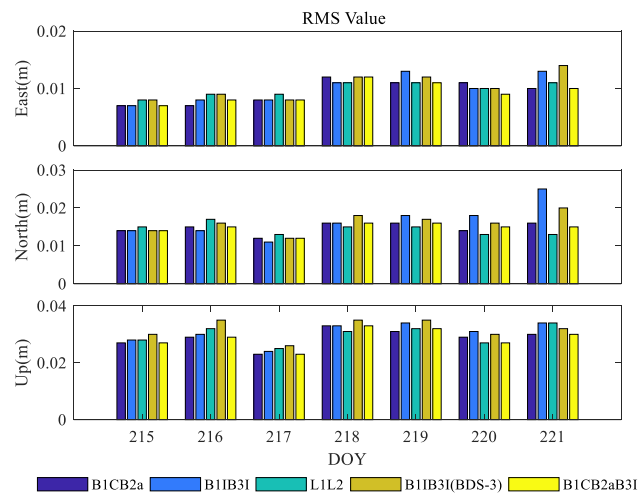


图 3.7 TGDA-TGPU(96km)的定位精度

表 3.7 TGD2-TGCU(96km)双频长基线 RTK 定位精度和模糊度固定率的平均值

频点	模糊度固定率	N-RMS(m)	E-RMS(m)	U-RMS(m)
B1C/B2a	92.29%	0.015	0.009	0.029
B1I/B3I	97.69%	0.017	0.010	0.030
L1L2	99.13%	0.015	0.010	0.030
B1I/B3I(BDS-3)	89.09%	0.016	0.010	0.033
B1C/B2a/B3I	92.68%	0.014	0.009	0.028

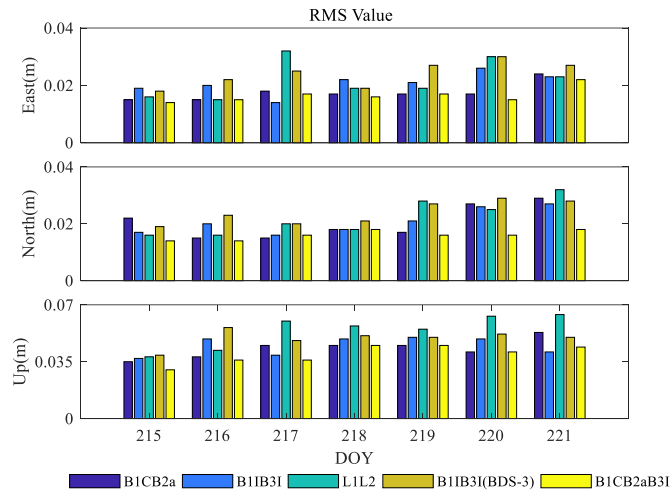


图 3.8 TGD2-TGCU(128km)的定位精度

表 3.8 TGD2-TGCU 双频长基线 RTK 定位精度和模糊度固定率的平均值

频点	模糊度固定率	N-RMS(m)	E-RMS(m)	U-RMS(m)
B1C/B2a	81.80%	0.021	0.018	0.043
B1I/B3I	90.86%	0.021	0.022	0.046
L1L2	89.00%	0.023	0.020	0.053
B1I/B3I(BDS-3)	74.06%	0.025	0.024	0.050
B1C/B2a/B3I	84.68%	0.016	0.017	0.040

从图 3.6 至图 3.8 可以看出，随着基线长度的增加，BDS-3(B1C/B2a)和 BDS-3(B1C/B2a/B3I)的优势变得明显，在 N、E 和 U 三个方向的定位精度分别保持在 0.015m、0.010m、0.030m 以内。在仅使用 BDS-3 卫星的情况下，三频 BDS-3(B1C/B2a/B3I)在定位精度和模糊固定率两个方面均优于 BDS-3(B1C/B2a)和 BDS-3(B1I/B3I)，但相对于 BDS-3(B1C/B2a)提升并不明显。

3.3.3 Ratio 值评估

Ratio 是一种基于数据驱动指标，它定义为次优整数解残差二次型与最优解残差二次型的比值，表征了浮点解与最优整数向量的接近程度，计算公式为：

$$R_best = \frac{(\tilde{N}_{sec} - \tilde{N})^T Q_{\tilde{N}}^{-1} (\tilde{N}_{sec} - \tilde{N})}{(\tilde{N}_{min} - \tilde{N})^T Q_{\tilde{N}}^{-1} (\tilde{N}_{min} - \tilde{N})} \geq k \quad (3.3)$$

式中， \tilde{N}_{min} 为最优解， \tilde{N}_{sec} 为次优解， k 是经验阈值一般将其设为 3。

一般情况下，Ratio 值越大，模糊度固定解的可靠性越高。因此 Ratio 值也是评定定位精度的重要手段。选择基线 TGPU-TGBU(30km)、TGPU-TGDA(96km) 和 TGPU-TGD2(128km) 在 DOY218 的观测数据，5 个种频率选择的 Ratio 变化如图 3.9 至图 3.11 所示。从图中我们可以看出，基线长度越短 Ratio 值越大。由于 BDS-3 可视卫星数目较少，且几何分布较差，导致 BDS-3(B1C/B2a)、BDS-3(B1I/B3I) 和三频 BDS-3(B1C/B2a/B3I) 的 Ratio 值小于 BDS-2+BDS-3(B1I/B3I) 和 GPS(L1L2)。当基线长度增加时，大气残差增大导致了浮点解的精度降低，Ratio 值减小。对于比值过小的时段，主要是由于在该时段内存在多颗低高度角卫星。此外，由于电离层在下午 2:00 左右最为活跃，导致在该时间点附近五个频率的 Ratio 值均较小。

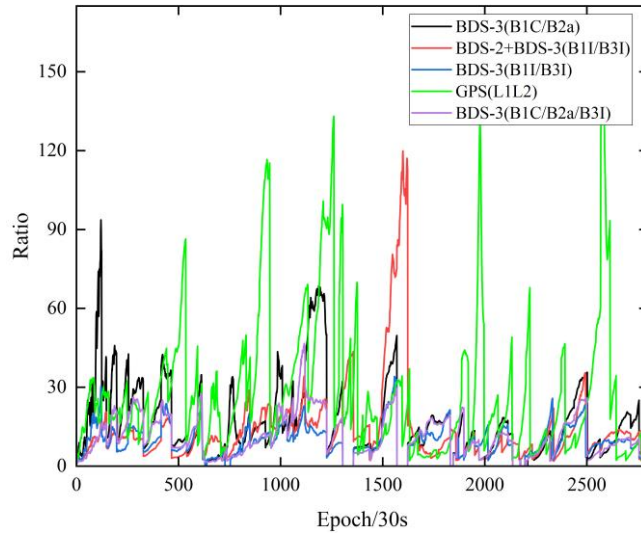


图 3.9 TGPU-TGBU(30km)的 Ratio 变化

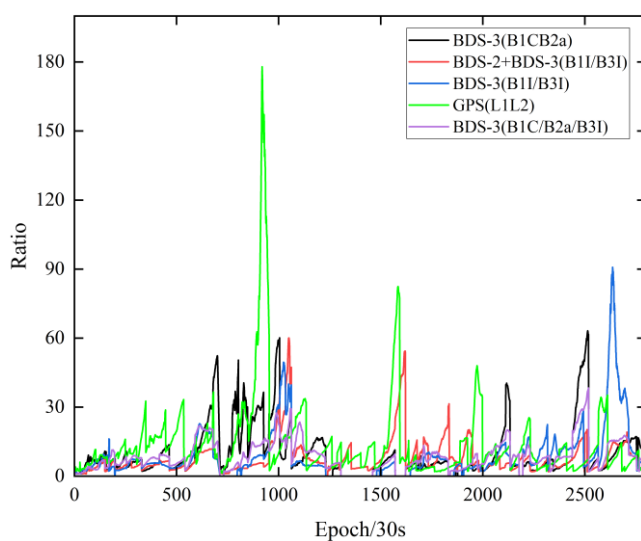


图 3.10 TGPU-TGDA (96km)的 Ratio 变化

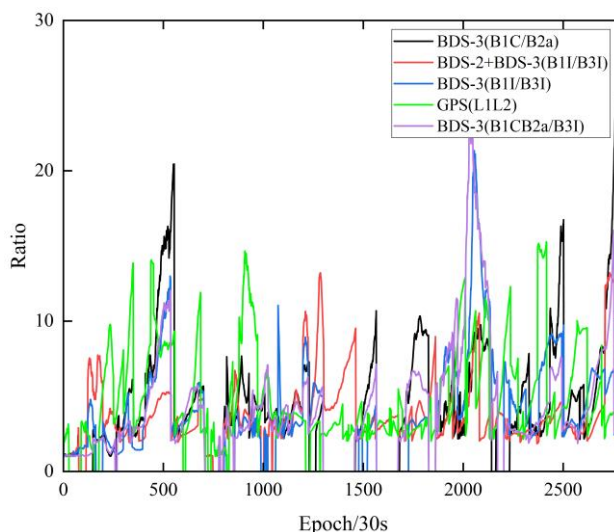


图 3.11 TGPU-TGD2 (128km)的 Ratio 变化

3.3.4 模糊度首次正确固定时间

模糊度首次正确固定时间是评价 RTK 性能的另一个重要指标。影响该指标的因素包括：观测频率的数量、PDOP、卫星与接收机之间的相对几何配置变化的速度、观测精度、观测量之间的相关性、数据采样率和幅度、大气误差延迟等。为了分析基线长度对模糊度首次正确固定时间的影响，选取了基线 TGBU-TGCU(30km)和 TGPU-TGDA(96km)在 DOY218 的观测数据，每天的观测数据被分为每 1 小时共 24 段用于测试（执行定位解决方案时，每个周期都会重新初始化）。本研究采用以下三个条件作为模糊度正确固定的指标：

- (1) 水平方向坐标误差 $<0.1\text{m}$ ；垂直方向坐标误差 $<0.2\text{m}$ 。

(2) $R_{best} \geq 3$ 。

(3) 当前历元以及后续连续 9 个历元均满足条件(1)和(2)。

如图 3.12 所示,某个频率上的模糊度首次正确固定时间为零意味着它可以在首历元实现模糊度正确固定。在基线长度较短的情况下,模糊度首次正确固定时间普遍较短,可以在多个时间段内实现首历元模糊度正确固定。随着基线长度的增加,由于需要分离大气误差,模糊度首次正确固定时间也会增加。此外,中午温度较高,电离层更加活跃,因此这段时间的模糊度首次正确固定时间更久。BDS-3 的可视卫星数目较少,几何分布较差,导致 BDS-3(B1C/B2a)、BDS-3(B1I/B3I)和 BDS-3(B1C/B2a/B3I)的模糊度首次正确固定时间比 BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)和 GPS(L1/L2)更长。在只有 BDS-3 系统的情况下,BDS-3(B1C/B2a)和三频 BDS-3(B1C/B2a/B3I)的模糊度首次正确固定时间优于 BDS-3(B1I/B3I)。

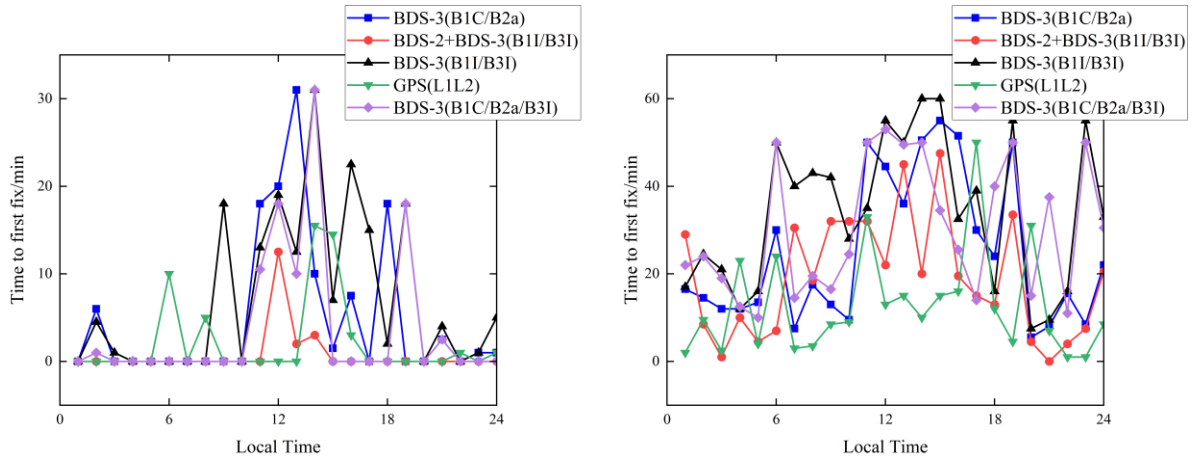


图 3.12 左图为 TGCU-TGBU(30km)的模糊度首次正确固定时间; 右图为 TGCU-TGDA(196km)的模糊度首次正确固定时间

3.4 本章小结

本节基于五组基线七天的观测数据,先后在卫星数目和 PDOP 值、定位精度、Ratio 值和模糊度首次正确固定时间四个方面对 BDS-3(B1C/B2a)、GPS(L1/L2)、BDS-3(B1I/B3I)、BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)和三频 BDS-3(B1C/B2a/B3I)五种频率选择进行对比分析,试验结果表明:

(1) BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)双频 RTK 的定位精度已经达到与 GPS(L1/L2)相当的水平,在长基线 RTK 定位模式下,略优于 GPS(L1/L2)。

(2) BDS-3(B1C/B2a/B3I)三频非组合 RTK 定位精度最高,在定位精度和模糊度固定率两个方面都要高于 BDS-3(B1C/B2a)、BDS-3(B1I/B3I)。但是相对于 BDS-3(B1C/B2a)

的提升并不显著。

(3) 在单频 RTK 的定位模式下, B1C、B1I、L1、B3I 的定位精度最高, 略高于 B2a。

(4) 随着基线长度的增加, 五种频率选择的定位精度降低, Ratio 值变小, 模糊度首次正确固定时间变长。

(5) GPS(L1L2)和 BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)的模糊度固定率相当, 在五个频率中处于最高水平。GPS(L1L2)模糊度首次正确固定时间最短, BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)次之。

(6) BDS-3(B1C/B2a)双频 RTK 在 100 公里范围内 N、E 方向定位精度优于 2cm, U 方向定位精度优于 3cm。

第4章 基于 FFRT 的整周模糊度解算方法及验证

4.1 概述

实际定位时，整周模糊度固定往往受到多种因素的影响，如可视卫星数目、大气干扰、多路径效应和观测噪声等，易造成模糊度错误固定现象发生，其定位效果甚至要劣于模糊度浮点解。当前，众多学者对于模糊度固定提出了多种算法，以模糊度搜索域为依据可将当前主流的模糊度固定算法分为以下三类：坐标域层面解算模糊度、观测值层面解算模糊度、模糊度层面解算模糊度。基于坐标域的方法主要是模糊度函数法^[58]，直接在一个坐标搜索空间中确定最优的模糊度估值，该方法的优点是分离了模糊度和周跳，但其计算速度较慢，实时定位效果较差。观测域求解模糊度主要是通过构造弱电离层、长波长和低噪声的组合，并通过对组合进行分部取整的方法确定整周模糊度值，最具代表性的方法为 MW 组合、三频 TCAR 组合和 CIA 方法。MW 方法主要通过双频码和相位组合的方式^[59]。TCAR 算法和 CIA 算法通过构造无几何双差观测量消除大部分误差项，从而实现三频模糊度的固定。两种算法都可以有效提高定位解算精度，尽管表述方式不同，但思路大致相似。在使用 TCAR 算法时，要充分考虑电离层误差项和观测噪声。由于短基线可基本消除电离层一阶项的影响，因此在该定位模式下可不用考虑电离层残余项，选择观测质量较好的载波相位观测量，即可实现单历元整周模糊度固定。随着基线长度的增加，大气误差的空间相关性减弱，导致 TCAR 算法和 CIR 算法受大气残余误差项影响较为严重，整周模糊度固定较为困难^[60-61]。目前，对于使用各种算法求解得到的模糊度固定结果的可靠性，还需要进一步进行检验和分析。

最常用的模糊度解算方法之一是 LAMBDA，即最小二乘降相关平差法，该方法在模糊度域中得到广泛应用。LAMBDA 算法的整周模糊度解算包括四个主要步骤，首先需要运用最小二乘或卡尔曼滤波技术计算出模糊度的浮点解以及方差-协方差矩阵。由于模糊度具有整数倍特性，因此需要将模糊度的小数部分舍去，得到整数解。验证模糊度固定解的可靠性是必要的第三步。利用经过验证的模糊度整数解，代入原始方程中，得出固定的模糊度参数解^[62]。

4.2 常用的整周模糊度固定方法

将 GNSS 定位观测方程进行线性化，可表示为：

$$\begin{aligned} y &= Aa + Bb + \varepsilon, a \in Z^n, b \in R^p \\ D(y) &= \sigma_0^2 Q_y \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中， y 为 m 维的 GNSS 观测量； a 和 b 分别为 m 维和 p 维的未知参数向量， A 和 B 为

它们的设计矩阵； ε 为观测噪声。 y 一般为伪距和相位观测值， \mathbf{a} 包含了未知的载波相位整周模糊度，一般以周为单位； \mathbf{b} 主要为待定点的坐标值，在长基线 RTK 定位模式下，还包括对流层延迟和电离层延迟； $D(y)$ 和 Q_y 分别为 y 的方差阵和协方差阵； σ_0^2 为 y 的单位先验方差。

模糊度解算将模糊度参数从 n 维实数空间映射到 n 维整数空间：

$$\tilde{\mathbf{a}} = \Gamma(\hat{\mathbf{a}}) \quad (4.2)$$

式中， Γ 为从 n 维实数空间到 n 维整数空间的映射函数。对整周模糊度而言，每一种方法都是从实数模糊度向量向整数模糊度向量的一个映射，且是多对一的映射。

由 Γ 映射到 \mathbf{z} 的所有浮点解 $\hat{\mathbf{a}}$ 的集合被称为 \mathbf{z} 的归整域，记为^[63-64]：

$$S_{\mathbf{z}} = \{x \in R^n \mid \mathbf{z} = \Gamma(x), \mathbf{z} \in Z^n\} \quad (4.3)$$

当 $\hat{\mathbf{a}} \in S_{\mathbf{z}}$ ， $\hat{\mathbf{a}}$ 就固定为 \mathbf{z} ，则模糊度估计可写为：

$$\tilde{\mathbf{a}} = \sum_{\mathbf{z} \in Z^n} \mathbf{z} S_{\mathbf{z}}(\hat{\mathbf{a}}) \quad (4.4)$$

式(4.4)中函数 $S_{\mathbf{z}}(x)$ 为：

$$S_{\mathbf{z}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \in S_{\mathbf{z}} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (4.5)$$

根据式(4.4)可以定义出多个整数估计方法，当它的归整域满足式(4.6)中的三个条件时，该整数估计量称为可容许的，即

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & \bigcup_{\mathbf{z} \in Z^n} S_{\mathbf{z}} = R^n \\ \text{II} \quad & S_{\mathbf{z}_1} \cap S_{\mathbf{z}_2} = \emptyset \quad \forall \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in Z^n, \text{且 } \mathbf{z}_1 \neq \mathbf{z}_2 \\ \text{III} \quad & S_{\mathbf{z}} = \mathbf{z} + S_0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

式(4.6)的第一个条件表明，整数向量对应的归整域组成的并集必须覆盖整个实数空间。第二个条件说明每个归整域都是唯一确定的，不可能存在两个归整域重叠的情况。第三个条件表明，平移操作不改变浮点解和对应的整数解之间的关系，即浮点解和整数解的平移量始终相等。

求得模糊度固定解并通过模糊度检验后，根据公式(4.3)更新基线矢量得到更高精度的基线矢量解

$$\tilde{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}(\tilde{\mathbf{a}}) = \hat{\mathbf{b}} - Q_{\hat{\mathbf{a}}} Q_{\hat{\mathbf{a}}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}) \quad (4.7)$$

本节，我们将对模糊度固定常用方法，取整法、Bootstrapping 方法、整数最小二乘法 and 整数最小二乘降相关搜索法进行详细介绍。

4.2.1 取整法

取整法是将模糊度浮点解直接进行四舍五入取整，设整周模糊度浮点解为

$\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)^T$, 对浮点解进行四舍五入取整后, 模糊度的估值 $\tilde{\mathbf{a}}$ 为^[65]:

$$\tilde{\mathbf{a}} = ([\hat{a}_1], \dots, [\hat{a}_n])^T \quad (4.8)$$

式中, $[\cdot]$ 表示取整。直接取整法对应的归整域为:

$$S_{\mathbf{z}, R} = \{x \in R^n \mid |\mathbf{c}_i^T(\mathbf{x} - \mathbf{z})| \leq 1/2, i = 1, \dots, n\}, \mathbf{z} \in Z^n \quad (4.9)$$

其中, \mathbf{c}_i 为一单位向量, 根据对应的 \mathbf{x} 中的元素, \mathbf{c}_i 的取值一般为 0 或 1。 n 维整数 \mathbf{z} 的归整域是由 n 个以 \mathbf{z} 为中心, 边长为 1 的正方体组成的 n 维立方体。在二维情况下, \mathbf{z} 的整数归整域为一个边长为 1 的正方形, 而所有二维整数的归整域的并集可以用图 4.1 来表示。

4.2.2 Bootstrapping 方法

Bootstrapping 方法将序贯最小二乘和取整法相结合, 该方法的优势是其考虑到模糊度参数之间的相关性。该方法的主要原理是: 将模糊度参数按照方差协方差的主对角线顺序进行升序排列, 首先对第一个模糊度参数进行直接取整, 在第一个模糊度参数固定的基础上, 按照剩余模糊度参数与第一个模糊度参数之间的相关性, 对未固定的模糊度参数进行改正。然后对改正后的第二个元素直接取整, 再次按照模糊度参数之间的相关性, 对剩余未固定的模糊度参数进行改正, 按照此流程处理剩余的模糊度参数, 直到模糊度参数全部固定。如果用 $\tilde{\mathbf{a}}_B = (\tilde{a}_{B,1}, \dots, \tilde{a}_{B,n})^T$ 表示 Bootstrapping 估计值, 那么

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{B,1} &= [\hat{a}_1] \\ \tilde{a}_{B,2} &= [\hat{a}_{2|1}] = [\hat{a}_1 - \sigma_{21}\sigma_1^{-2}(\hat{a}_1 - \tilde{a}_{B,1})] \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{B,2} &= [\hat{a}_{n|N}] = \left[\hat{a}_n - \sum_{j=1}^{n-1} \sigma_{n,j|J} \sigma_{j|J}^{-2} (\hat{a}_{j|J} - \tilde{a}_{B,j}) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

式中, $\hat{a}_{i|I}$ 是在前 $i-1$ 个元素序贯取整条件下的最小二乘估计值, $I = \{i+1, \dots, n\}$; $\sigma_{j|J}^2$ 为 $\hat{a}_{j|J}$ 的方差; $\sigma_{i,j|J}$ 是 \hat{a}_i 和 $\hat{a}_{j|J}$ 的协方差。使用 Bootstrapping 方法得出的模糊度参数的估值存在多样性, 主要是由于模糊度参数的排序方式不同所导致的问题。为了获得更准确处理的 Bootstrapping 估计值, 通常会对模糊度方差-协方差矩阵的主对角线元素进行处理, 处理方法是元素按升序或降序排列后, 从方差最小的一个元素开始逐一固定。该方法对应的归整域为:

$$S_{\mathbf{z}, B} = \{x \in R^n \mid |\mathbf{c}_i^T L^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{z})| \leq 1/2, i = 1, \dots, n\}, \forall \mathbf{z} \in Z^n \quad (4.11)$$

上式中, L 为模糊度方差协方差经 cholesky 分解后的一个下三角矩阵, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}$, 所有二维整数的归整域如图 4.1 所示。

4.2.3 整数最小二乘法

整数最小二乘法则通过搜索寻找最优解，搜索的目标函数为：

$$\hat{\mathbf{a}}_{ILS} = \arg \min_{\mathbf{z} \in Z^n} \|\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{z}\|_{Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}}^2 \quad (4.12)$$

这种方法不同于直接取整法和 Bootstrapping 方法，它是通过搜索整数来计算最优的整数最小二乘解的。它的归整域为^[62]：

$$S_{\mathbf{z}, ILS} = \left\{ \mathbf{x} \in R^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_{Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}}^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_{Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}}^2, \forall \mathbf{u} \in Z^n \right\} \quad (4.13)$$

将不等式展开，可以得到：

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|_{Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}}^2 &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|_{Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}}^2 \\ \Leftrightarrow \forall \mathbf{u} \in Z^n \\ (\mathbf{u} - \mathbf{z})^T Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{z}) &\leq 0.5 \|\mathbf{u} - \mathbf{z}\|_{Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}}^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

令 $\mathbf{t} = \mathbf{u} - \mathbf{z}$ ，则 \mathbf{z} 的归整域为：

$$S_{\mathbf{z}, ILS} = \bigcap_{\mathbf{t} \in Z^n} \left\{ \mathbf{x} \in R^n \mid |\mathbf{t}^T Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{z})| \leq \|\mathbf{t}\|_{Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}}^2 \right\}, \forall \mathbf{z} \in Z^n \quad (4.15)$$

公式 4.12 的最优解是通过搜索一个超椭球体内的所有整数得到的，其中 $Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}$ 决定了椭球的形状； χ^2 决定了超椭球体的大小； $\hat{\mathbf{a}}$ 确定超椭球的球心，表达式为：

$$F(\mathbf{z}) = (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{z})^T Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{z}) \leq \chi^2, \mathbf{z} \in Z \quad (4.16)$$

当 $F(\mathbf{z})$ 取最小值时，即为整数最小二乘的最优解。

将 $Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}} = L^T D L$ 代入(4.16)可得：

$$(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{z})^T L^{-1} D^{-1} L^{-T} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{z}) \leq \chi^2 \quad (4.17)$$

其中， D 为模糊度参数的条件方差矩阵，对角线元素为 $d_i = \sigma_{\hat{\mathbf{a}}_{i|I}}^2$ 。令 $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{z} - L^{-T} (\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{z})$ ，则：

$$L^T (\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{z}) = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{z} \quad (4.18)$$

式中， $\tilde{a}_i = \hat{a}_{i|I} = \hat{a}_i - \sum_{j=i+1}^n (\hat{a}_{j|I} - z_j) \gamma_{j,i}, 1 \leq i \leq n$ 为条件浮点解，将式(4.18)代入(4.17)可得：

$$(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{z})^T D^{-1} (\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{z}) \leq \chi^2 \quad (4.19)$$

对式(4.19)进行展开可得：

$$\frac{(\tilde{a}_1 - z_1)^2}{d_1} + \dots + \frac{(\tilde{a}_i - z_i)^2}{d_i} + \dots + \frac{(\tilde{a}_n - z_n)^2}{d_n} \leq \chi^2 \quad (4.20)$$

满足上述搜索边界的整数解也将在每一维上满足：

$$\begin{aligned}
 & \tilde{a}_n - \sigma_{\tilde{a}_n} \chi \leq z_n \leq \tilde{a}_n + \sigma_{\tilde{a}_n} \chi \\
 & \vdots \\
 & \tilde{a}_i - \sqrt{d_i(\chi^2 - \sum_{j=i+1}^n \frac{(z_j - \tilde{z}_j)^2}{d_j})} \leq z_i \leq \tilde{a}_i + \sqrt{d_i(\chi^2 - \sum_{j=i+1}^n \frac{(z_j - \tilde{z}_j)^2}{d_j})} \\
 & \vdots \\
 & \tilde{a}_1 - \sqrt{d_1(\chi^2 - \sum_{j=2}^n \frac{(z_j - \tilde{z}_j)^2}{d_j})} \leq z_1 \leq \tilde{a}_1 + \sqrt{d_1(\chi^2 - \sum_{j=2}^n \frac{(z_j - \tilde{z}_j)^2}{d_j})}
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

模糊度参数之间的相关性比较强，导致搜索域的形状非常狭长，候选解的个数比较多，大大增加了模糊度的搜索时间，所有二维整数的归整域如图 4.1 所示。

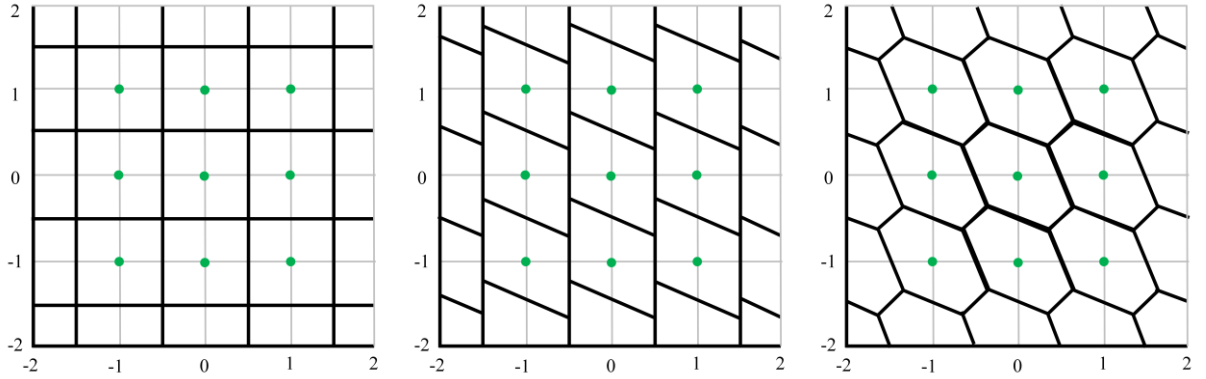


图 4.1 取整法、回退取整法和整数最小二乘法的二维归整域示意图

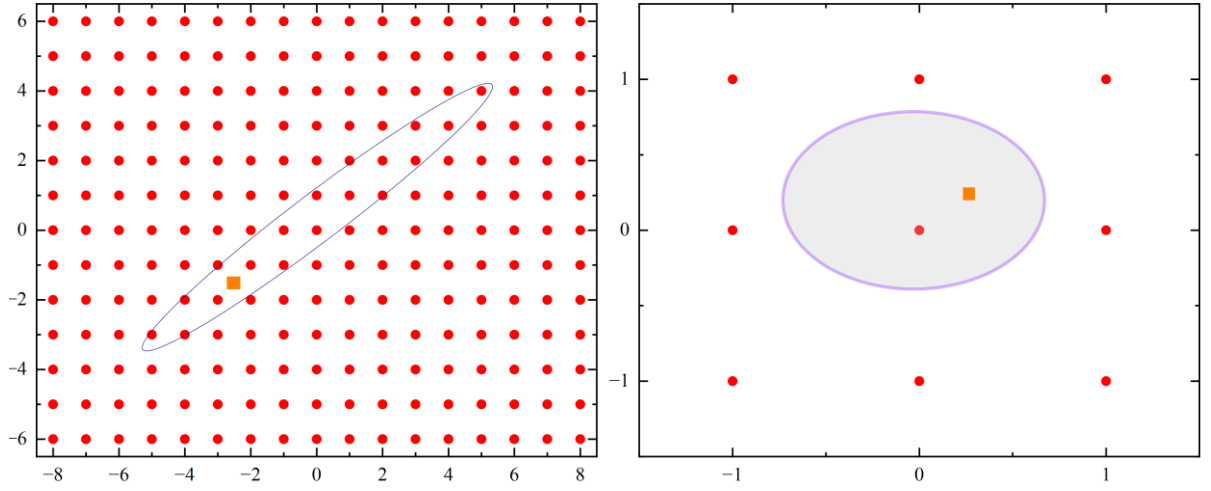
4.2.4 整数最小二乘降相关搜索法

整数最小二乘降相关搜索法，即 LAMBDA 算法是目前最为常用的一种方法。该方法主要有两个步骤：(1) 模糊度参数的降相关，通常采用 Z 变换的方法进行降相关，使整数解的搜索区域更接近圆，以缩短模糊度搜索时间。(2) 完成降相关后，即可进行模糊度搜索。整数线性变换为^[67]：

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}^T \hat{\mathbf{a}}, \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{Z}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}} \mathbf{Z} \tag{4.22}$$

其中， \mathbf{z} 和 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}$ 分别为 $\hat{\mathbf{a}}$ 和 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}$ 整数变换后的向量， \mathbf{Z} 和 \mathbf{Z}^{-1} 中的元素均为整数，且 \mathbf{Z} 的行列式值为正负 1。降相关的目的是使 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{a}}}$ 矩阵非对角线元素接近 0，非对角线元素变小，这样虽然对搜索空间的改变极小，但大大减小了候选解的数量如图 4.2 所示。Z 变换后的搜索空间为：

$$\Omega_z = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbf{Z}^n \mid (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}}^{-1} (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}) \leq \chi^2 \right\} \tag{4.23}$$


 图 4.2 左图为 Z 变换前搜索空间，右图为 Z 变换后的搜索空间

4.3 整周模糊度固定成功率

4.3.1 整周模糊度固定成功率的定义

为了预测模糊度固定的效果，定义了模糊度固定成功率的概念。当成功率足够高时，即可认为当前模糊度参数的最优解是正确的。成功率可以根据模糊度参数的浮点解的分布和归整域来计算，模糊度参数的浮点解服从正态分布^[66]：

$$\hat{\mathbf{a}} \sim N(\mathbf{a}, Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}) \quad (4.24)$$

式中 $\hat{\mathbf{a}}$ 的概率密度函数为：

$$f_{\hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{x} | \mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}}^2\right\} \quad (4.25)$$

在 $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$ 时，模糊度实现正确固定，此时的概率为：

$$P(\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}) = \int_{S_{\mathbf{a}}} f_{\hat{\mathbf{a}}}(\mathbf{x} | \mathbf{a}) d\mathbf{x} \quad (4.26)$$

4.3.2 直接取整法成功率及边界

由式(4.9)定义很难直接计算出取整法的成功率，只有当 $Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}$ 是对角矩阵时，模糊度固定成功率为单个模糊度参数成功率的乘积。当 $Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}$ 不是对角矩阵时，Teunissen 给出取整法下边界的公式^[59]：

$$P_{s,IR} = P(\tilde{\mathbf{a}}_{IR} = \mathbf{a}) \geq \prod_{i=1}^n (2\Phi(\frac{1}{2\sigma_{\hat{a}_i}}) - 1) \quad (4.27)$$

其中， $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数， $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\} dt$ 。

4.3.3 Bootstrapping 方法成功率

Bootstrapping 方法在进行模糊度固定之前先进行 $L^T DL$ 分解, D 为浮点模糊的方差阵, 因此 Bootstrapping 方法成功率可以表示为如下形式:

$$P_{s,IB} = P(\tilde{\mathbf{a}}_{IB} = \mathbf{a}) = \prod_{i=1}^n (2\Phi(\frac{1}{2\sigma_{\hat{a}_{il}}}) - 1) = \prod_{i=1}^n (2\Phi(\frac{1}{2\sqrt{d_i}}) - 1) \quad (4.28)$$

其中, d_i 为对角阵 D 的第 i 个元素。Bootstrapping 方法成功率主要取决于条件模糊度参数的标准差 $\sigma_{\hat{a}_{il}}$, 通过改变 Bootstrapping 处理的模糊度参数的顺序改变条件模糊度参数的方差, 从而改变 Bootstrapping 方法的成功率。

4.3.4 整数最小二乘降相关搜索法

在三种估计方法中, 整数最小二乘的成功率是最高的, $P_{s,IR} \leq P_{s,IB} \leq P_{s,ILS}$ 。其固定成功率也是最难以固定的, 因此, 通常会把 $P_{s,IB}$ 作为 $P_{s,ILS}$ 的下边界。通常会通过对 $\hat{\mathbf{a}}$ 进行 Z 变换进行降相关来提高下边界的准确性^[68]。

$$P_{s,ILS} \geq P_{s,IB} = \prod_{i=1}^n (2\Phi(\frac{1}{2\sigma_{\hat{a}_{il}}}) - 1) \quad (4.29)$$

也有学者提出以模糊度精度因子(Ambiguity Dilution of Precision, ADOP)做作为 $P_{s,ILS}$ 的上边界^[69]:

$$P_{s,ILS} \leq P\left(\chi^2(n, 0) \leq \frac{c_n}{ADOP^2}\right) \quad (4.30)$$

其中

$$ADOP = \sqrt{|Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}|^{\frac{1}{n}}} = \prod_{i=1}^n \sigma_{\hat{a}_{il}}^{\frac{1}{n}} \quad (4.31)$$

$$c_n = \frac{\left(\frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right)^{\frac{2}{n}}}{\pi} \quad (4.32)$$

其简化公式为:

$$P_{s,ILS} \leq \left(2\Phi\left(\frac{1}{2ADOP}\right) - 1\right)^n \quad (4.33)$$

ADOP 值是描述模糊度固定成功率的关键概念, 一般情况下 ADOP 值越小, 越容易进行模糊度参数的整体固定。

4.4 整周模糊度检验

在高精度 RTK 定位中, 整周模糊度检验是实现模糊度固定的最后一步, 它用来检

验当前模糊度解是否可靠性，是实现高精度定位的有效保障。采用最小二乘降相关搜索法固定的整周模糊度向量为 $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$ ，存在两个相互对立的假设^[70]：

$$H_0 : a_0 = \tilde{a} \quad \text{vs} \quad H_1 : a_0 \neq \tilde{a} \quad (4.34)$$

其中， H_0 为原假设； H_1 为备选假设； a_0 为真实值。进行整周模糊度的假设检验时往往存在以下两类错误，即原假设正确，但被拒绝，一般将其称为“弃真”；原假设错误，但被接受，一般将其称为“纳伪”。在进行模糊度解算时，我们致力于减少这两类错误的发生，但也会面临另外一种问题，即降低弃真概率，需要扩大接受率，反之亦然。因此在实际操作时，我们无法同时降低弃真和纳伪的概率。通过整周模糊度检验验证模糊度固定解的可靠性，其结果主要有以下两种形式：固定解通过模糊度检验，则基线解算使用该模糊度固定解；固定解未通过模糊度检验，基线解算采用浮点解。

4.4.1 孔估计方法验证整周模糊度

为了验证模糊度固定解的可靠性，国内外众多学者提出了一系列的整周模糊度检验方法、例如：比例测试(Ratio-test)、差分检验(difference-test)、F 检验(F-test)等，本节，我们将对最常用的 Ratio 检验方法进行详细说明。

Ratio 检验的定义如下：

$$\text{如果} \begin{cases} \frac{(\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}_2) Q_{\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{a}}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}_2)}{(\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}_1) Q_{\tilde{\mathbf{a}}\tilde{\mathbf{a}}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}_1)} \leq c & \text{使用} \hat{\mathbf{a}} \\ > c & \text{使用} \tilde{\mathbf{a}} \end{cases} \quad (4.35)$$

其中， $\tilde{\mathbf{a}}_2$ 为固定解中的最优解， $\tilde{\mathbf{a}}_1$ 为固定解中的次优解，Ratio 检验将固定解的次优解和最优解的残差二次型之比作为检验统计量， c 为检验阈值，当 Ratio 值越大，得到的固定解的精度越高。

图 4.3 为 Ratio 检验在二维情况下的示意图，图中六边形黑色框所代表的是整数最小二乘估计所对应的孔径域，每个孔径都对应着一个整数取值区间，而模糊度的浮点解落在不同的孔径上，对应着不同的整数最小二乘估计值。定义图最中央的六边形为模糊度真实值，红色和蓝色表示 Ratio 检验的接受域，即认为当前的模糊度固定是正确的，其中红色为模糊度固定解通过 Ratio 检验并且正确固定；蓝色为通过 Ratio 检验但是模糊度固定错误。也就是所谓的“纳伪”现象。黄色和紫色表示 Ratio 检验的拒绝域，即认为当前的模糊度固定是错误的，采用浮点解的形式，其中黄色为模糊度固定解未通过 Ratio 检验，但模糊度已经真实固定了也就是所谓的“弃真”现象；紫色为模糊度固定解未通过 Ratio 检验且模糊度固定错误，即当前的 Ratio 检验成功的探测出错误固定的模糊度解。Ratio 检测的结果可以归纳为成功、失败和未固定三类情况。孔径域的尺寸对成功率和失败率之和的计算产生了影响，使其不再等同于传统的“1”。随着孔径域的扩大，成功的可能性和失败的可能性都会增加，但不确定性会减少。当孔径域减小时，

成功率和失败率均减少，但不确定率会增加。

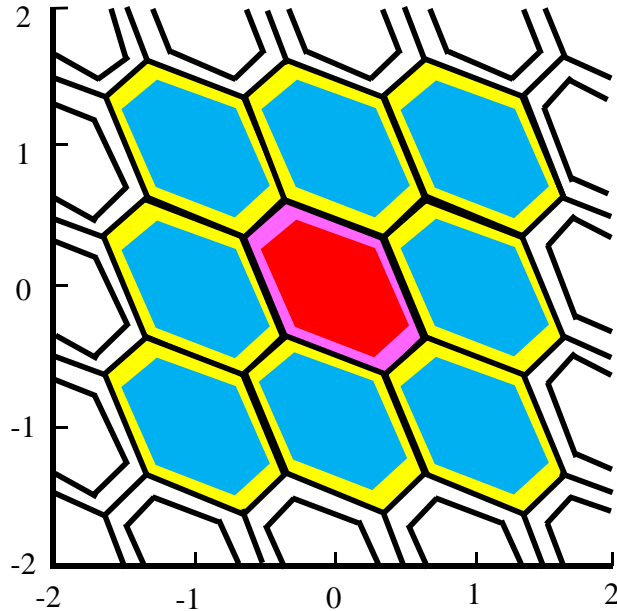


图 4.3 Ratio 检验二维孔径域示意图

4.4.2 孔估计方法阈值设置

随着卫星导航定位技术的建设和发展，当前的 RTK 大多采用多频多系统的 RTK 定位模式，模糊度维数大大增加，模糊度最优候选解和次优候选解所对应残差二次型差异会越来越小，Ratio 值无限接近于 1。面对这种问题，传统的 Ratio 检测阈值 c 设置为 2.5 和 3，将会产生严重的弃真现象。因此，本文将采用固定失败率的 Ratio 检验方法(Fixed Failure-rate Ratio Test, FFRT)对阈值进行设定。当正确固定率大于设定阈值时即可认为模糊度正确固定，因此要把失败率设的足够小(一般为 0.001)，在固定失败率之后，即可确定孔径域的大小，Ratio 检测阈值也随之确定。FFRT 的具体实现步骤如下所示：

- (1) 首先需要用户给定一个可容许的最小失败率，通常将其设定为 0.001。
- (2) 计算 n 维整周模糊度参数，然后利用最小二乘成功率近似解 P_s ，计算得到的最小失败率为 $P_f = 1 - P_s$ 。为了确保实际统计中的失败率不超过容许值，我们需要使用下限来代替成功率，上限作为失败率。
- (3) 利用模糊度参数的维数 n 和 P_f 进行查表反推 c ，部分数据如表 4.1 所述。

表 4.1 最小失败率为 0.001 情况下的阈值的倒数

$P_{f,ILS}$	n=...	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=...
0	...	1	1	1	1	1	...
0.001	...	1	1	1	1	1	...
0.002	...	0.780	0.784	0.816	0.805	0.815	...
0.005	...	0.541	0.543	0.571	0.573	0.589	...
0.010	...	0.365	0.387	0.413	0.434	0.449	...
0.015	...	0.269	0.298	0.327	0.361	0.377	...
...

当观测值精度较高，观测模型较强时，Bootstrapping 成功率会十分接近 100%，此时的 Ratio 值也无限接近于 1，检验方法失效^[71-72]。

4.5 本章小结

本章介绍了整周模糊度解算常用的几种方法，阐述了几种方法的原理和解算流程，分析了几种方式在取整域上的优劣及其在成功率上的不同。单纯的模糊度解算往往会产生大量的模糊度错误固定的现象出现，因此本章详细介绍了 Ratio 检验方法验证整周模糊度固定解的可靠性的流程和原理，整数解通过检验，基线解算采用模糊度固定解；整数解未通过检验，基线解算采用浮点解。此外，阈值 c 的设定对于 Ratio 检验十分重要，设定过低将导致严重的“纳伪”现象；设定过高将导致严重的“弃真”现象，基于此种现状，本文介绍了 FFRT 方法，根据用户的实际定位情况来确定检验阈值 c，减少了“纳伪”或“弃真”现象的发生。

第 5 章 基于模型与数据相结合的部分模糊度固定策略

5.1 概述

随着四大全球卫星导航系统的建设和更新,卫星数量不断增加,观测频率数量也不断提高,待估模糊度参数也越来越多。对于这种高维模糊度参数的解算不仅会增加模糊度全部固定成功的风险性,还会增加模糊度错误固定的可能性。因此,需要探索一种新的方式提高模糊度浮点解的精度,同时还要保证模糊度固定率的可靠性。采用高成功率的模糊度子集进行部分固定,能够显著提高模糊度的正确固定率,缩短固定时间,对于高精度定位具有重要的实际应用价值。当前对于部分模糊度固定的研究仍然存在以下几个问题:

(1) 如何选取高精度的模糊度子集。高精度的模糊度子集可大大提高模糊度正确固定的概率,缩短模糊度固定的时间。根据模糊度子集的选取依据,可将现有的模糊度固定策略分为三种层面和两种方法。三种层面分别为卫星层面、模糊度层面和频率层面,两种方法为模型驱动和数据驱动。几种选取的策略各有优劣,详尽分析几种策略的内在联系,从而有利于确定影响模糊度子集的关键因素。

(2) 确定模糊度检验的阈值。在确定了模糊度固定解之后,必须先进行可靠性检验,只有通过检验后才能使用该固定解,否则将使用浮点解。当前,整周模糊度可靠性检验通常可以分为三类,包括基于模糊度最优解和次优解的检验、基于固定成功率/失败率指标的判别方法以及将两者综合考虑的方法。其中,基于成功率/失败率的方法认为当成功率达到一定水平或失败率降低到一定程度时,就可以接受模糊度固定解。当前应用最广泛的模糊度检验方法为 Ratio 检验。上一章详细介绍了模糊度检验阈值的确定方法 FFRT,该方法减少了“纳伪”或“弃真”现象的发生。但对于观测精度普遍较高的数据,Bootstrapping 成功率会十分接近 100%,此时的 Ratio 值也无限接近于 1,检验方法失效,不能够达到模糊度检验的目的,如何根据实际的定位情况选择合适的定位阈值十分重要。

(3) 如何在中长基线条件下提高基线的矢量精度,在中长基线 RTK 的定位模式下,定位解算受残余对流层与电离层误差影响较大,使得卡尔曼滤波估计的浮点解精度下降,模糊度正确固定难度增加,模糊度固定时间增长。在此种情况下,最常用的方法是 SRC,这种方法操作简单,计算量较小,且易保证较高的模糊度固定成功率。Nardo 等^[73]通过仿真验证了长基线 RTK 定位模式下 SRC 能够使到达基线矢量固定解所需的历元数缩短 50%。但该方法的缺点是所选取的模糊度子集较少,难以大幅度提高基线矢量精度。此外,双频一致性检验也是长基线定位条件下常用的模糊度子集选取方法,其主要

的思路是将双频解算的整周模糊度解进行比较，去除不同的解，留下相同的解。该方法的优点是简单易实现，缺点是缺乏理论基础，且对于长基线矢量精度的增益尚未可知。

5.2 模型驱动和数据驱动的对比较分析

在使用 PAR 策略时，要按照某种准则将模糊度参数进行排序处理，一般按照模糊度的精度顺序，并选择高精度的模糊度子集。为确定模糊度子集的维数，必须依据一项指标进行决策，基于不同的模糊度子集的选取指标，可将多种部分模糊度固定策略分为 M-PAR 和 D-PAR 两个大类。

5.2.1 模型驱动

M-PAR 是指根据观测模型的强度决定当前模糊度固定值是否可靠，该方法通过模糊度固定成功率进行量化。当前计算的模糊度固定成功率大于预先设定的阈值时，则可认为当前的模糊度被固定成功。在上一节我们对几种模糊度固定方法的成功率进行分析比较，得出 $P_{s,IR} \leq P_{s,IB} \leq P_{s,ILS}$ 。整数最小二乘的成功率虽然是最优的，但很难通过公式求出具体数值，在实际使用时，我们一般将 Bootstrapping 成功率当作最小二乘成功率的下界。

$$P_{s,ILS} \leq P_{s,IB} = 1 - \prod_{i=1}^n \left(2\Phi \left(\frac{1}{2\sqrt{d_i}} \right) - 1 \right) \quad (5.1)$$

根据此判定条件进行模糊度固定解可靠性的判别条件为：

$$\text{如果} \begin{cases} P_{s,IB} \leq \mu & \text{使用} \hat{\mathbf{a}} \\ P_{s,IB} > \mu & \text{使用} \tilde{\mathbf{a}} \end{cases} \quad (5.2)$$

在进行部分模糊度子集选取时，成功率指标法是一种经典的基于 M-PAR 的方法，设定一个固定阈值 ($P_0 = 0.995$)，当成功率 $P_{s,IB}$ 大于阈值时才接受模糊度固定解为正确的模糊度值，否则将按照条件方差矩阵的顺序对模糊度参数进行剔除，直到成功率 $P_{s,IB}$ 大于等于阈值，其具体程序流程如图 5.1。首先使用卡尔曼滤波法计算得到 k 个模糊度参数的浮点解 $(\hat{\mathbf{a}})_k$ 及其 $k \times k$ 的方差-协方差矩阵 $(Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}})_{k \times k}$ 。然后应用 Z 变换和对模糊度参数的条件方差排序的方法对模糊度的方差-协方差矩阵进行变换，其主要思想是把对角线元素进行降序排列，并尽量消去非对角线元素，求得 Z 变换后的浮点解 $(\hat{\mathbf{z}})_k$ ，方差-协方差矩阵 $(Q_{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}})_{k \times k}$ 和条件方差 $(\bar{d}_i)_k$ 。根据式(4.8)计算模糊度固定成功率 $P_{s,IB}$ ，当 $P_{s,IB} \geq P_0 (P_0 = 0.995)$ ，进入到整周模糊度搜索阶段，否则将按照条件方差 $(\bar{d}_i)_k$ 的顺序对模糊度参数进行剔除，可得 $(\hat{\mathbf{z}})_{k-1}$ 、 $(Q_{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}})_{(k-1) \times (k-1)}$ 、 $(\bar{d}_i)_{k-1}$ ，重新计算模糊度固定率 $P_{s,IB}$ ，直

到 $P_{s,IB} \geq P_0$ 。

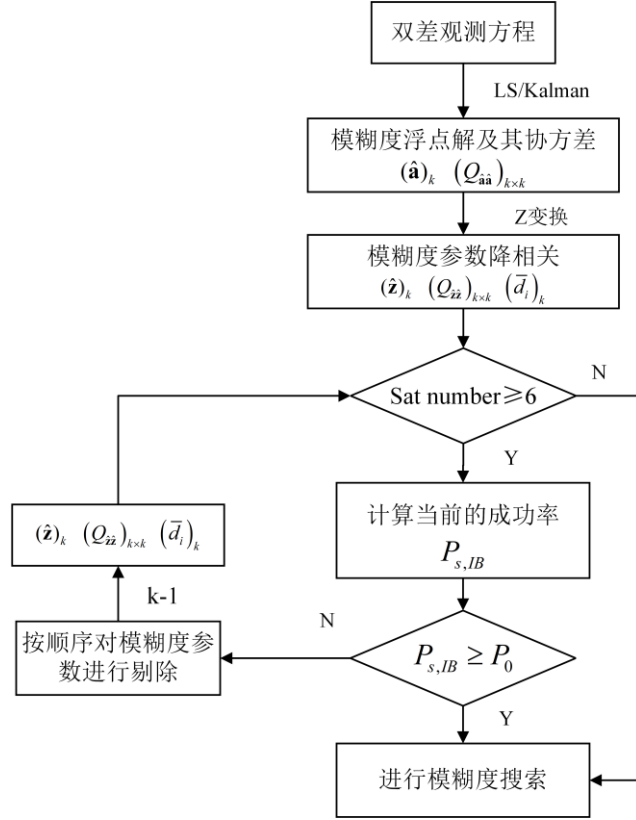


图 5.1 模型驱动流程图

观测模型的强度可以通过成功率的大小反映，因此我们可以根据成功率的数值了解模糊度固定解和基线固定解的精度，这是一个相对准确的指标。但是，随着 GNSS 的不断建设与更新，可用卫星数目较多，卫星的几何构型极佳，观测模型强度提升，使得成功率十分接近 100%，无法进行模糊度的剔除。另一方面，成功率的计算并没有涉及实际观测值，而是对整体测量噪声水平的先验知识，仅涉及到观测值的理论精度，尽管计算的成功率可能很高，但实际测量中的任何偏差都可能影响实际成功率，极易产生模糊度错误固定。

5.2.2 数据驱动

基于实际观测信息，对模糊度固定解的可靠性进行评估，从而实现 D-PAR。在实际应用时，Ratio 检验是最广泛应用的方法之一，使用基于数据的 Ratio 检验方法来判断模糊度固定解，判断表达式为：

$$\text{如果 } \frac{(\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}_2) Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}_2)}{(\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}_1) Q_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{a}}}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}_1)} \begin{cases} \leq c & \text{使用 } \hat{\mathbf{a}} \\ > c & \text{使用 } \tilde{\mathbf{a}} \end{cases} \quad (5.3)$$

其中, $\tilde{\mathbf{a}}_2$ 为固定解中的最优解, $\tilde{\mathbf{a}}_1$ 为固定解中的次优解, c 为 Ratio 检验阈值, Ratio 检验将固定解的次优解和最优解的残差二次型之比作为检验统计量, 当 Ratio 值越大, 得到的固定解的精度越高。

与 M-PAR 相比, D-PAR 对于模糊度固定解检验的优势是其涉及真实的观测值, 是对于模糊度固定解候选解的区别性检验。当采用 FFRT 方式时, 可以最大程度保证模糊度固定解的可靠性。但 D-PAR 无法对观测模型的强度进行具体评估, 使得该策略无法根据观测数据的精度对内部模型进行调整。

5.3 改进的部分模糊度固定策略

考虑到模型驱动反应了观测模型的强度和模糊度参数的整体精度以及数据驱动反映了模糊度候选解之间不同性, 本文提出了一种模型和数据相结合的部分模糊度固定策略(Model and Data Driven PAR, MD-PAR)。在模型驱动部分采用成功率指标法 SRC; 在数据驱动部分, 结合历元间 Ratio 值的大小及模糊度固定状态对下一历元进行模糊度固定的卫星做适当调整, 并对定位粗差进行剔除, 具体程序流程如图 5.2 所示。

(1) 对定位粗差进行剔除(计算三维位置状态量的方差协方差的均值, 当均值大于设定阈值(通常将其设为 0.1)时, 表明当前的定位误差较大, 将其剔除)。

(2) 在当前历元应用模型驱动进行部分模糊度固定, 得到当前历元的 Ratio 值 ratio1。

(3) 设上一历元的 ratio 值为 pre_ratio, 当 $\text{pre_ratio} \geq c$ 且 $\text{ratio1} < c$, 即上一历元模糊度可以固定但是当前历元模糊度无法固定; 或者 $\text{pre_ratio} > 2\text{ratio1}$, 即前后两历元的 ratio 值相差较大, 在这两种状态下, 对于当前历元相较于上一历元新加入的卫星进行剔除, 重新进行模型驱动的部分模糊度固定。

(4) 求得新的 ratio 值 ratio2, 当 $\text{ratio2} \geq c$ 时, 即求得部分固定解, 否则将剔除高度角最低的一颗卫星, 重新进行模糊度搜索求得 ratio3, $\text{ratio3} \geq c$ 时, 即求得部分固定解; $\text{ratio3} < c$ 时采用模糊度浮点解的形式。

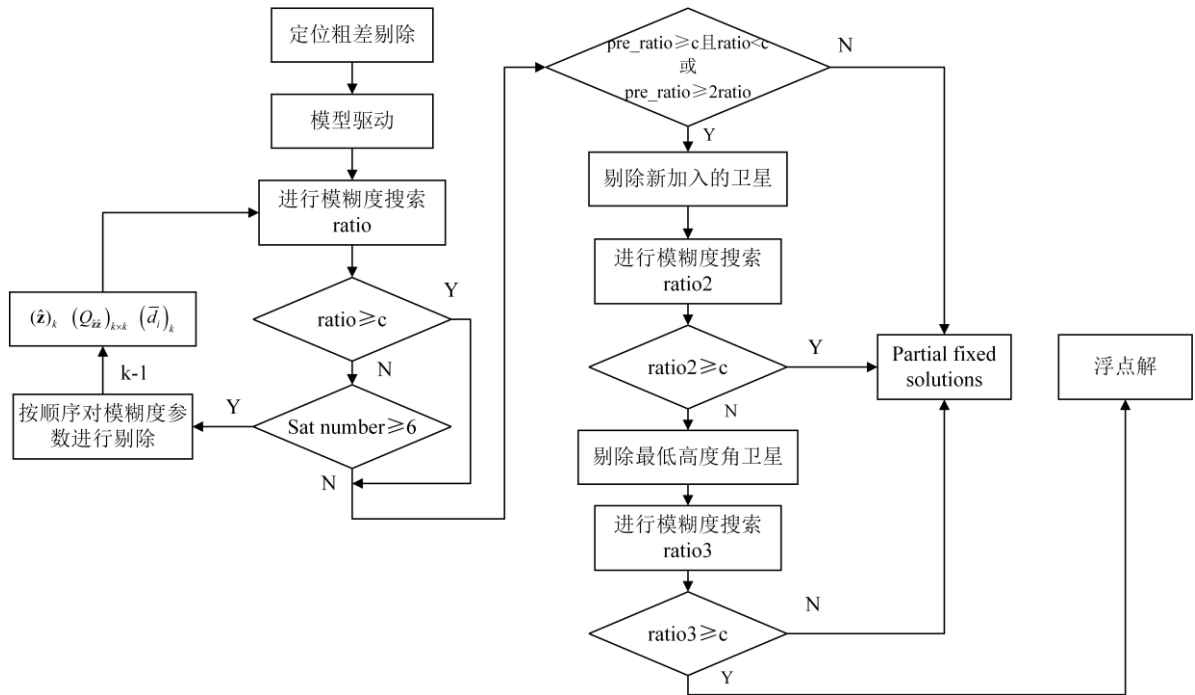


图 5.2 新的部分模糊度固定流程图

5.4 改进的部分模糊度固定策略定位性能分析

为了验证 MD-PAR 策略的实际定位性能, 使用实测动态数据和静态长基线数据从模糊度子集固定率和基线解的精度两个方面对双重驱动的部分模糊度固定进行评估, 讨论了模糊度最少固定维数对基线解精度的影响, 并与单模型驱动和单数据驱动进行比较分析。

5.4.1 实测动态数据

为了验证 MD-PAR 策略的实际定位性能, 我们在西安市长安区进行了动态 RTK 定位测试。表 5.1 为动态 RTK 定位实验的基本信息, 表 5.2 为动态 RTK 定位实验数据的处理策略。图 5.3 为动态实验的轨迹, 图中 A、B、C、D 表示由于遮挡较严重, 导致非视距信号和多路径效应较为强烈的区域, 这些区域难以实现整周模糊度固定。以 Net_diff^[56]的 backward+forward 组合滤波方式的结果为真实值, 固定率为 99.7%, 采用短基线 RTK 定位模式。

表 5.1 动态数据采集的基本信息

实验 1	动态数据
开始时间	09:38:16
结束时间	12:28:14
采集区域	西安市长安区
环境状况	居民区，灌木丛
采样率(s)	1
基线长度(km)	≤ 8

表 5.2 数据处理基本策略

系统和频点	GPS(L1/L2)+BDS(B1/B2)
卫星星历	Broadcast
截至高度角	15°
地球自转	模型改正
相对论效应	模型改正
整周模糊度解算方法	MD-PAR/LAMBDA
对流层天顶干延迟	Saastamoinen model
初始电离层延迟	Klobuchar model
GPS 与 BDS 权比	1:1

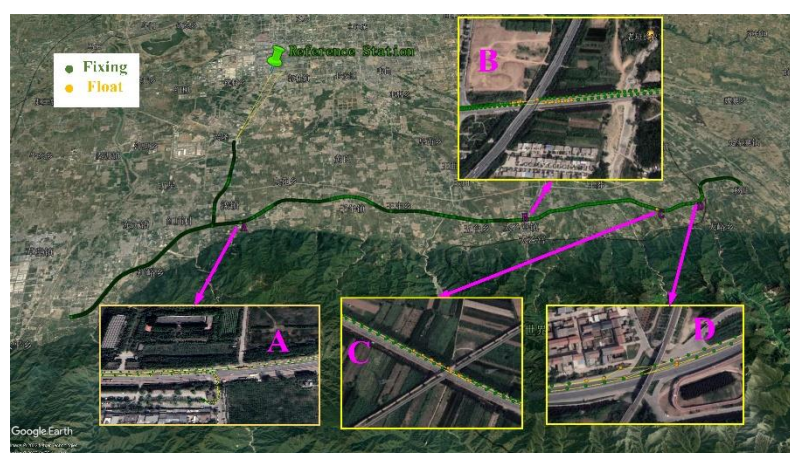


图 5.3 实测动态数据采集轨迹，其中绿色为固定解，黄色为浮点解。A、B、C、D 为遮挡较为严重区域

实验过程中卫星数量和 PDOP 值的变化如图 5.4 所示。GPS+BDS 的可用卫星数量在 4~16 颗之间变化，GPS+BDS 的 PDOP 值稳定介于 1 和 5 之间。经过图 3 中 A、B、C、D 四个区域时，由于高架桥和树木严重遮挡，可视卫星数量减少。

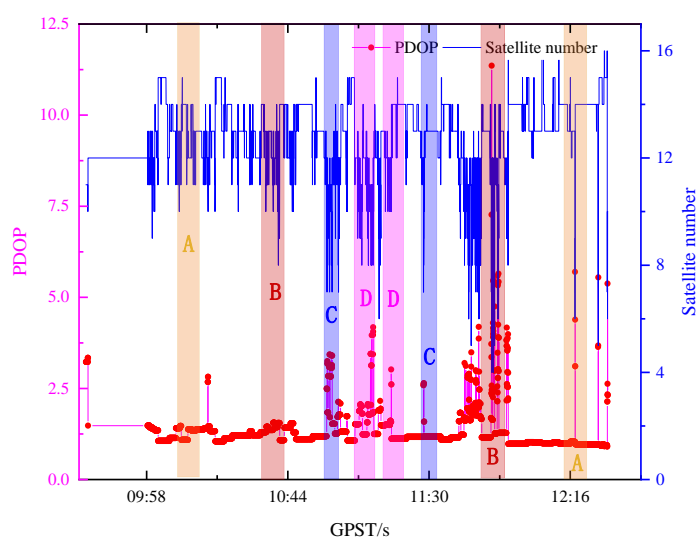


图 5.4 实测动态数据卫星数目和 PDOP 值

在进行部分模糊度固定时, 卫星的数目对于模糊度固定率及定位精度影响最大, 卫星数目过多时, 导致计算量增大, 对应模糊度参数之间相互影响, 难以实现模糊度固定; 卫星数目过少导致模糊度固定率降低, 错误固定率增加。因此, 本文采用实测动态数据对参与模糊度固定的最少卫星数目进行分析, 当参与模糊度固定的最少卫星数目分别为 4、5、6、7 颗时的模糊度固定率及定位精度如表 5.3 所示。参与模糊固定的最少卫星数目为 7 颗时, 在 N、E 和 U 三个方向的定位精度分别为 0.011m、0.019m 和 0.027m, 明显优于 4、5、6 颗三种选择。因此, 当可见卫星数较多时, 应适当增加参与模糊度固定的最小卫星数。

表 5.3 最少卫星数目分别为 4、5、6 和 7 颗时的模糊度固定率及定位精度

最少卫星数目	4	5	6	7
Fixing rate	99.2%	99.2%	99.3%	99.3%
N RMS(m)	0.034	0.033	0.013	0.011
E RMS(m)	0.023	0.022	0.019	0.019
U RMS(m)	0.065	0.063	0.044	0.027

在复杂的城市环境下, 由于非视距信号和多路径效应显著, 导致定位粗差问题十分严重, 精准探测出粗差发生的历元对于复杂环境下的高精度定位十分重要, 本文通过处理卡尔曼滤波输出的三维位置浮点解的后验方差, 以达到粗差探测的目的。如表 5.4 所示, 经粗差剔除后, 在 N、E 和 U 三个方向的定位精度分别提升 0.4cm、0.4cm 和 0.2cm, 定位精度有明显提升。

表 5.4 粗差剔除对定位精度的提升

处理策略	未进行粗差剔除	进行粗差剔除
Fixing rate	99.6%	99.3%
N RMS(m)	0.017	0.013
E RMS(m)	0.023	0.019
U RMS(m)	0.046	0.044

为了验证 MD-PAR 策略的性能, 我们使用实测动态数据对 MD-PAR、M-PAR 和 D-PAR 三种策略进行对比分析。实验测试结果如图 5.5 和表 5.5 所示。与 M-PAR 相比, MD-PAR 可以避免多个 epoch 定位误差较大的情况, 在 N、E 和 U 三个方向的定位精度分别提升 0.4cm、0.7cm 和 0.4cm。MD-PAR 与 D-PAR 定位精度大致相当, 但 MD-PAR 模糊度固定率较高, 改正的历元数相较于 D-PAR 明显偏多。如图 5.6 所示, a、b、c、d 四个区域树木遮挡较为严重, 可见卫星数量较少, 多径效应显著, 动态测试经过这些路段时定位误差普遍较大。MD-PAR 与 D-PAR 两种策略可有效规避这些区域的定位误差, 更适用于复杂环境下的高精度定位。

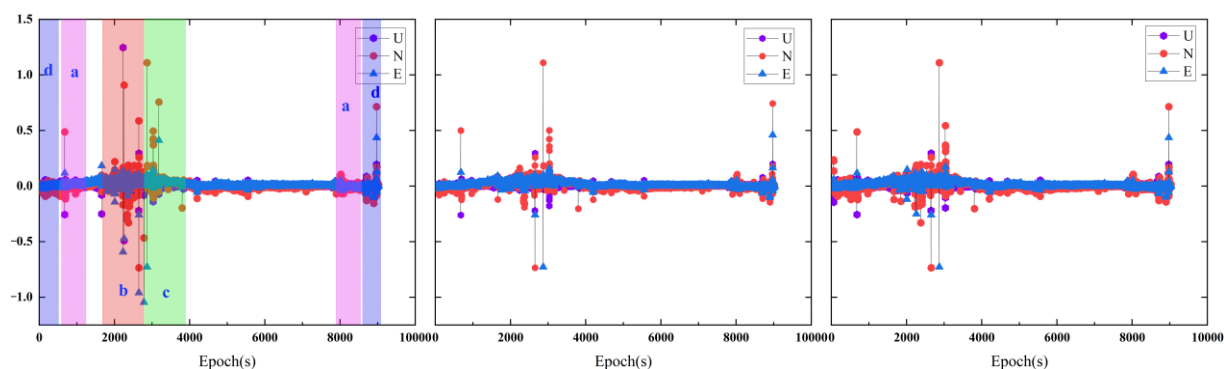


图 5.5 从左到右依次为 M-PAR、D-PAR 和 MD-PAR 三种模糊度固定策略的定位精度

表 5.5 M-PAR、D-PAR 和 MD-PAR 三种模糊度固定策略的模糊度固定率及定位精度

模糊度固定策略	M-PAR	D-PAR	MD-PAR
模糊度固定率	99.6%	98.5%	99.3%
N RMS(m)	0.018	0.012	0.011
E RMS(m)	0.026	0.019	0.019
U RMS(m)	0.048	0.043	0.043



图 5.6 实测动态数据采集轨迹，其中绿色为固定解，黄色为浮点解。a、b、c、d 为定位干扰较为严重区域

对于固定历元，当 E/N/U 三个方向的定位误差分别小于 0.05m/0.05m/0.07m 时^[34]，认为模糊度正确固定，否则称之为错误固定。如图 5.7 所示，空白部分为错误固定历元，D-PAR 错误固定历元数位 1200 个，M-PAR 错误固定历元数位 1185 个，MD-PAR 错误固定历元数位 1165 个，MD-PAR 的定位效果更佳。

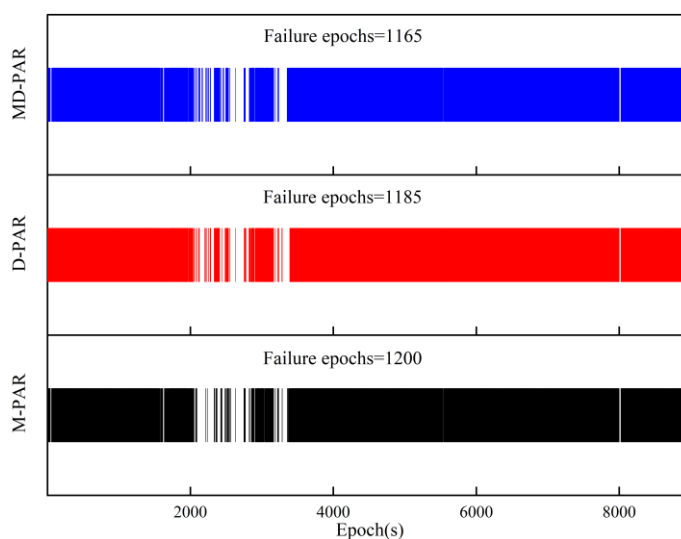


图 5.7 MD-PAR、M-PAR 和 D-PAR 三种模糊度固定策略的错误固定历元分布图，空白部分表示模糊度错误固定历元

一般情况下，Ratio 值越大，模糊度固定解的可靠性越高。因此 Ratio 值也是评定定位精度的重要手段。图 5.8 为 MD-PAR、M-PAR 和 D-PAR 的 Ratio 值，由于 MD-PAR 和 D-PAR 涉及根据历元间的关系对参与模糊度固定的卫星进行调整，因此这两种方法的 Ratio 普遍较高，其中 MD-PAR 的 Ratio 值最优，该结果表明 MD-PAR 定位效果最佳。

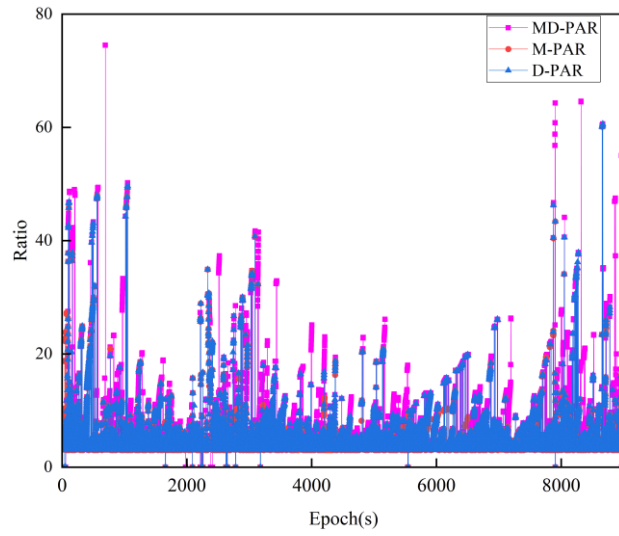


图 5.8 MD-PAR、M-PAR 和 D-PAR 的 Ratio 值

5.4.2 长基线数据

选取 2022 年 3 月 1 日基线 BAMF-NANO(92km)的数据对 MD-PAR 策略进行测试，数据的基本信息如表 5.6 所示，数据处理策略如表 5.7 所示。

表 5.6 长基线数据的基本信息

实验 2	静态长基线数据
开始时间	00:00:00
结束时间	23:59:30
地区	加拿大温哥华岛
采样间隔(s)	30
基线长度(km)	92
接收机类型(基站)	SEPT POLARX5-5.3.2
接收机类型(流动站)	SEPT POLARX5-5.3.2
天线类型(基站)	SEPCHOKE_B3E6-SPKE
天线类型(流动站)	SEPCHOKE_B3E6-SPKE

表 5.7 长基线 RTK 数据处理的基本策略

系统和频点	GPS(L1/L2)+BDS(B1/B2)
卫星星历	Broadcast
截至高度角	15
对流层天顶湿延迟	Estimated as random walk parameter
电离层残余值	Estimated as random walk parameter
对流层天顶干延迟	Saastamoinen model
电离层初始值	Klobuchar model
整周模糊度解算方法	MD-PAR/LAMBDA
初始电离层延迟	Klobuchar model
GPS 和 BDS 权比	1:1

实验过程中卫星数量和 PDOP 值的变化如图 5.8 所示，GPS+BDS 的可用卫星数量在 9~16 颗之间变化，GPS+BDS 的 PDOP 值稳定在 6 到 10 之间。使用静态长基线数据对 MD-PAR 和 M-PAR 进行实验分析，测试结果如图 5.9 和表 5.8 所示。在长基线 RTK 的定位模式下，定位解算受残余对流层与电离层误差影响较大，使得卡尔曼滤波估计的浮点解精度下降，导致 D-PAR 难以实现模糊度固定。因此在长基线 RTK 定位模式下本文只对 MD-PAR 和 M-PAR 两种策略对比分析。MD-PAR 策略考虑到历元间 Ratio 值的相关性，并对定位粗差做剔除处理，使得在 N、E 和 U 三个方向相较于 M-PAR 的定位精度分别提高了 0.4cm、1.5cm 和 0.3cm。因此 MD-PAR 对长基线 RTK 定位模式也有一定的改善。

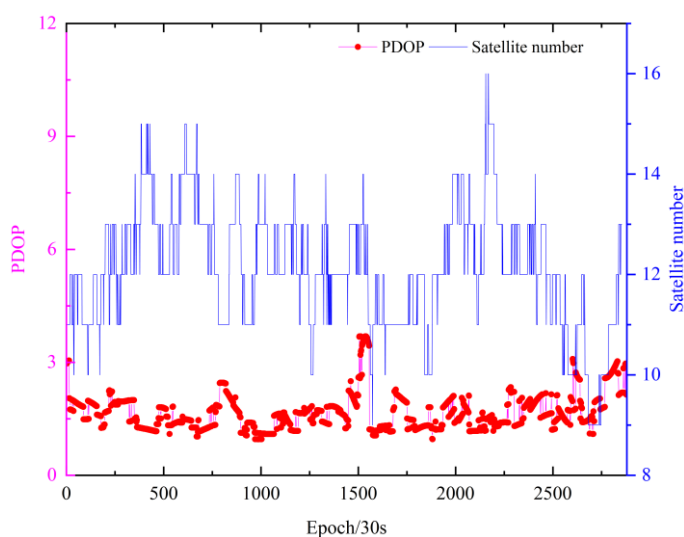


图 5.9 长基线数据可视卫星数目和 PDOP 变化情况

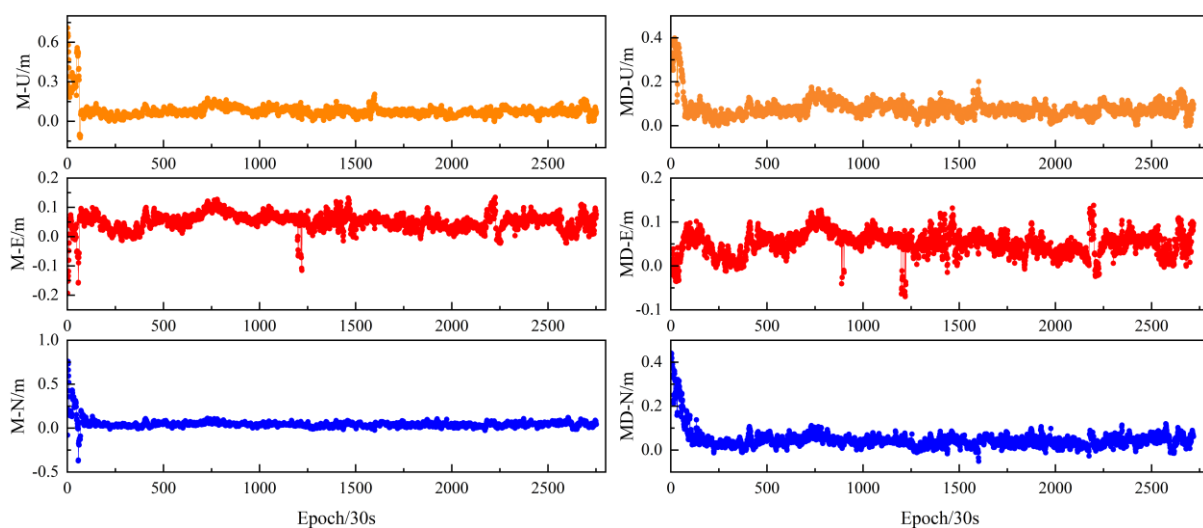


图 5.10 从左到右分别为 M-PAR 和 MD-PAR 在静态长基线 RTK 下的定位精度

表 5.8 M-PAR 和 MD-PAR 在静态长基线 RTK 下的定位精度及模糊度固定率

处理策略	M-PAR	MD-PAR
模糊度固定率	96.3%	95.2%
N RMS(m)	0.043	0.039
E RMS(m)	0.038	0.023
U RMS(m)	0.056	0.053

5.5 本章小结

本节基于部分模糊度固定理论，提出了一种模型和数据相结合的部分模糊度固定策略。在模型驱动部分，采用成功率指标法对模糊度参数进行检验；在数据驱动部分，首先通过 Ratio 检验方法对模糊度参数进行检验，并结合历元间 Ratio 值的大小及模糊度固定状态对下一历元用于模糊度固定的卫星做适当调整。双重驱动改善了模型驱动缺乏对于真实观测数据的考虑(仅用到方差协方差，并未考虑到真实的模糊度浮点解)以及数据驱动无法对内部观测模型强度进行评估的缺点，更好地保证了模糊度固定解的精度和可靠性。本节使用实测动态数据和长基线静态数据从模糊度子集固定率和基线解的精度两个方面对双重驱动的部分模糊度固定进行评估，解释了根据模糊度参数的后验方差进行粗差剔除的有效性，讨论了参与模糊度固定的最少卫星数目对定位解算的影响。具体研究工作及成果如下：

(1) 参与模糊度固定的最少卫星数目对定位精度影响较大，实际定位中应根据可视卫星数目对其做具体调整。

(2) 根据位置先验方差进行粗差剔除, 可有效规避误差较大历元, 在 N、E 和 U 三个方向的定位精度分别提升 0.4cm、0.4cm 和 0.2cm。

(3) MD-PAR 可以提高动态 RTK 的定位精度。与 M-PAR 相比, 在 N、E 和 U 三个方向的定位精度分别提升 0.4cm、0.7cm 和 0.4cm。与 D-PAR 相比, MD-PAR 模糊度固定率较高, 可以对更多历元进行有效改正。此外, 与 M-PAR 和 D-PAR 相比, MD-PAR 拥有做少的错误固定历元和最优的 Ratio 值。

(4) MD-PAR 对于长基线 RTK 定位也有一定的提升, 与 M-PAR 相比, 在 N、E 和 U 三个方向的定位精度分别提升 0.4cm、1.5cm 和 0.3cm。

结 论

本文围绕着北斗卫星导航定位背景下长基线 RTK 定位算法及部分模糊固定解算及验证展开学习和研究。主要内容涉及 RTK 定位模型的建立与解算、BDS 多频 RTK 定位性能的评估、整周模糊度固定理论和部分模糊度固定理论。

具体研究工作及成果如下：

(1) 从原始的伪距和相位观测方程入手，详细分析了几种常用的观测值组合方式以及各方式的优劣，并在此基础上深入分析了误差改正模型、数据预处理和基于高度角和信噪比定权的随机模型。并着重讲解了短基线 RTK 和长基线 RTK 两种模式的不同之处及其滤波的详细过程。

(2) 详细分析研究了 BDS 在全球范围内的 RTK 定位表现，并深入研究了 BDS 三频非组合的定位效果。首先随机选取全球的测站对参与 RTK 结算的卫星数目和 PDOP 进行分析。在短基线和长基线定位模式下，分别对单频 B1C、B1I、B2a、B3I 和 L1，双频 BDS-3(B1C/B2a)、BDS-3 (B1I/B3I)、BDS-2+BDS-3 (B1I/B3I)、GPS (L1/L2)，三频非组合 BDS-3 (B1C/B2a/B3I)在定位精度、模糊度固定率、模糊度首次正确固定时间以及 Ratio 值进行具体分析。第一，BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)双频 RTK 的定位精度已经达到与 GPS(L1/L2)相当的水平，在长基线定位模式下，略优于 GPS(L1/L2)。第二，BDS-3(B1C/B2a/B3I)三频非组合 RTK 定位精度最高，在定位精度和模糊度固定率两个方面都要高于 BDS-3(B1C/B2a)、BDS-3(B1I/B3I)。但是相对于 BDS-3(B1C/B2a)的提升并不显著。第三，在单频 RTK 的定位模式下，B1C、B1I、L1、B3I 的定位精度最高，略高于 B2a。第四，随着基线长度的增加，五种频率选择的定位精度降低，Ratio 值变小，模糊度首次正确固定时间变长。第五，GPS(L1/L2)和 BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)的模糊度固定率相当，在五个频率中处于最高水平。GPS(L1/L2)模糊度首次正确固定时间最短，BDS-2+BDS-3(B1I/B3I)次之。第六，BDS-3(B1C/B2a)双频 RTK 在 100 公里范围内 N、E 方向定位精度优于 2cm，U 方向定位精度优于 3cm。

(3) 单纯的模糊度解算往往会产生大量的模糊度错误解算的现象出现，因此本文详细介绍了 Ratio 检验方法验证整周模糊度固定解的可靠性的流程和原理，整数解通过检验，基线解算采用模糊度固定解；整数解未通过检验，基线解算采用浮点解。此外，阈值 c 的设定对于 Ratio 检验十分重要，设定过低将导致严重的“纳伪”现象；设定过高将导致严重的“弃真”现象，基于此种现状，本文介绍了 FFRT 方法，根据用户的实际定位情况来确定检验阈值 c ，减少了“纳伪”或“弃真”现象的发生。

(4) 提出了一种模型和数据相结合的部分模糊度固定策略。使用实测动态数据和长基线静态数据从模糊度子集固定率和基线解的精度两个方面对双重驱动的部分模糊度固定进行评估。参与模糊度固定的最少卫星数目对定位精度影响较大, 实际定位中应根据可视卫星数目对其做具体调整。根据位置先验方差进行粗差剔除, 可有效规避误差较大历元, 在 N、E 和 U 三个方向的定位精度分别提升 0.4cm、0.4cm 和 0.2cm。MD-PAR 可以提高动态 RTK 的定位精度。与 M-PAR 相比, 在 N、E 和 U 三个方向的定位精度分别提升 0.4cm、0.7cm 和 0.4cm。与 D-PAR 相比, MD-PAR 模糊度固定率较高, 可以对更多历元进行有效改正。此外, 与 M-PAR 和 D-PAR 相比, MD-PAR 拥有做少的错误固定历元和最优的 Ratio 值。MD-PAR 对于长基线 RTK 定位也有一定的提升, 与 M-PAR 相比, 在 N、E 和 U 三个方向的定位精度分别提升 0.4cm、1.5cm 和 0.3cm。

下一步工作:

(1) 在评估 RTK 定位性能时受限于基线长度, 所选测站全部位于欧洲, 未涉及亚洲和美洲等地区, 存在一定的区域局限性; 对于定位性能的分析只有 BDS 和 GPS, 卫星导航系统较为单一; 基线长度仅涉及长基线, 未对超长基线(>1000km)做深入研究。未来针对该方面的研究要面向更广泛的区域, 引入更多的卫星导航系统。

(2) 对于 MD-PAR 策略在大多数情况下表现良好, 但仍然存在一些不足。粗差的剔除不是绝对的, 仍然存在无法通过后验方差剔除的粗差。其次, MD-PAR 策略对长基线的改进有限, 当基线长度超过 200 公里时效果不佳。此外 MD-PAR 策略只涉及模糊度浮点解计算完成之后, 未来针对这方面的研究计划加入质量控制理论, 提高模糊度浮点解的精度。

RTK 凭借其瞬时高精度的优势, 成为当前主流的高精度定位技术, 但受限于服务范围使它的服务性能大打折扣, 众多学者纷纷针对长基线算法、多频多系统组合、单频算法、部分模糊度固定策略和网络 RTK 展开研究以改善 RTK 定位效果, 扩大 RTK 的服务范围, 相关研究取得了显著进展。目前短基线 RTK 可实现瞬时厘米级定位服务, 中长基线 RTK 可实现厘米级定位服务, 被广泛应用于自动驾驶汽车和无人物流等新兴行业。单频 RTK 在开阔环境下可以达到与双频 RTK 相当的定位效果, 但复杂环境下效果较差, 服务范围较小。此外 RTK 在某些情况下仍然面临严峻挑战, 例如活跃电离层情景、城市复杂环境和恶劣天气等, 因此, 如何在复杂城市环境下减轻信号遮挡和多径对 RTK 的影响? 如何开发适应复杂环境的大气改正模型? 如何完善高精度定位领域完好性机制? 这些问题都将是未来 RTK 研究的重点。

参考文献

- [1] 杨元喜, 王建荣. 泛在感知与航天测绘[J]. 测绘学报, 2023, 52(01):1-9.
- [2] Dong D, Fang P, Bock Y, et al. Anatomy of apparent seasonal variations from GPS derived site position time series[J]. Journal of Geophysical Research, 2002, 107(B4):2075.
- [3] 杨宇飞, 杨元喜, 陈金平, 等. 北斗三号星座拟稳钟差测定及其预报[J]. 测绘学报, 2021, 50(12):1728-1737.
- [4] 周锋. 多系统 GNSS 非差非组合精密单点定位相关理论和方法研究[D]. 上海:华东师范大学, 2018.
- [5] Yang Y, Liu L, J Li, et al. Featured services and performance of BDS-3[J]. Science Bulletin, 2021, 66(20):2135-2143.
- [6] 李昕. 多频率多星座 GNSS 快速精密定位关键技术研究[D]. 武汉:武汉大学, 2021.
- [7] Chen J, Zhang Y, Yu C, et al. Models and performance of SBAS and PPP of BDS[J]. Satellite Navigation, 2022, 3(1):4-18.
- [8] 曹士龙. GNSS 长基线精密实时相对定位关键技术研究[D]. 北京:中国科学院大学(中国科学院精密测量科学与技术创新研究院), 2021.
- [9] 杨元喜. 北斗卫星导航系统的进展、贡献与挑战[J]. 测绘学报, 2010, 39(01):1-6.
- [10] Lu M, Li W, Yao Z, et al. Overview of BDS III new signals[J]. Navigation Journal of The Institute of Navigation, 2019, 66(4):1-17.
- [11] Zhang Y, Wang H, Chen J, et al. Calibration and impact of BDS satellite dependent timing group delay bias[J]. Remote Sensing, 2020, 12(1):192-208.
- [12] Wanninger L, Beer S. BeiDou satellite-induced code pseudorange variations: diagnosis and therapy[J]. GPS Solutions, 2015, 19(4):639-648.
- [13] Remondi B W. Performing centimeter-level surveys in seconds with GPS carrier phase: initial results[J]. Navigation, 1985, 32(4):386-400.
- [14] Edwards S J, Cross P A, Barnes J B, et al. A methodology for benchmarking real time kinematic GPS[J]. Survey Review, 1999, 35(273):163-174.
- [15] 刘濛濛, 高成发, 张瑞成, 等. 北斗三号新信号中长基线 RTK 定位研究[J]. 大地测量与地球动力学, 2022, 42(07):716-721.
- [16] Kubo Y, Tanaka H, Ohashi M, et al. Long baseline GNSS relative positioning with estimating ionospheric and tropospheric delays and their gradients[J]. International Journal of Innovative Computing Information & Control Ijicic, 2012, 8(3B):2375-2388.
- [17] 张钰玺, 张小红, 刘全海, 等. 航空测量场景下的中长基线动态定位方法[J]. 测绘学报, 2019, 48(7):871-878.
- [18] Shu B, Liu H, Xu L, et al. Performance analysis of BDS medium-long baseline RTK positioning using an empirical troposphere model[J]. Sensors, 2018, 18(4):1199.
- [19] Hou P, Zhang B, Liu T. Integer-estimable GLONASS FDMA model as applied to Kalman-filter-based short-to long-baseline RTK positioning[J]. GPS Solutions, 2020, 24:1-14.
- [20] Choi B K, Roh K M, Lee S J. Long baseline GPS RTK with estimating tropospheric delays[J]. Journal of Positioning, Navigation, and Timing, 2014, 3(3):123-129.
- [21] Takasu T, Yasuda A. Kalman-filter-based integer ambiguity resolution strategy for long-baseline RTK with ionosphere and troposphere estimation[C]. Proceedings of the 23rd International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GNSS 2010). Portland, USA, 2010.
- [22] Liu L, Pan S, Gao W, et al. Assessment of quad-frequency long-baseline positioning with BeiDou-3 and Galileo observations[J]. Remote Sensing, 2021, 13(8):1551.
- [23] Xu Y, Wu C, Li L, et al. GPS/BDS medium/long-range RTK constrained with tropospheric delay parameters from NWP model[J]. Remote Sensing, 2018, 10(7):1113.
- [24] Parkins, A. Increasing GNSS RTK availability with a new single-epoch batch partial ambiguity resolution algorithm[J]. GPS Solutions, 2011, 15(4):391-402.

- [25] Dai L, Eslinger D, Sharpe T. Innovative algorithms to improve long range RTK reliability and availability[C]. Proceedings of ION. San Diego, CA, 2007.
- [26] Feng Y. GNSS three carrier ambiguity resolution using ionosphere-reduced virtual signals[J]. Journal of Geodesy, 2008, 82(12):847-862.
- [27] Teunissen P J G, Joosten P, Tiberius CCJM. Geometry-free ambiguity success rates in case of partial fixing[C]. Proceedings of ION National Technical Meeting 1999 and 19th. Portland, USA, 1999.
- [28] Brack A. Reliable GPS + BDS RTK positioning with partial ambiguity resolution. GPS Solution[J]. 2017, 21:1083-1092.
- [29] Teunissen P J G, Joosten P, Tiberius C. Geometry-free ambiguity success rates in case of partial fixing[C]. Proceedings of the National Technical Meeting of the Institute of Navigation. San Diego, CA, 1999.
- [30] Dai L L, Eslinger D J, Sharpe R T, et al. Partial search carrier-phase integer ambiguity resolution: U.S. Patent 7961, 143[P]. 2011-6-14.
- [31] Vollath U, Doucet K D. GNSS signal processing with partial fixing of ambiguities: U.S. Patent 7538, 721[P]. 2009-5-26.
- [32] Teunissen P J G, Verhagen S. The GNSS ambiguity ratio-test revisited: a better way of using it[J]. Survey Review, 2009, 41(312): 138-151.
- [33] Hou Y, Verhagen S. Model and data driven partial ambiguity resolution for multi-constellation GNSS[C]. China Satellite Navigation Conference (CSNC) 2014 Proceedings. Nanjing, China, 2014.
- [34] Lu, L. Ma, L. Liu, W. A triple checked partial ambiguity resolution for GPS/BDS RTK positioning[J]. Sensors, 2019, 19(22):5034.
- [35] Wang E, Song W, Zhang Y, et al. Evaluation of BDS/GPS multi-frequency RTK positioning performance under different baseline lengths[J]. Remote Sensing, 2022, 14(15):3561.
- [36] Cheng L, Wang W, Liu J, et al. GNSS receiver-related pseudorange biases: characteristics and effects on wide-lane ambiguity resolution[J]. Remote Sensing, 2021, 13(3):428.
- [37] Li X, Li X, Liu G, et al. Triple-frequency PPP ambiguity resolution with multi-constellation GNSS: BDS and Galileo[J]. Journal of Geodesy, 2019, 93:1105-1122.
- [38] Feng W, Zhao Y, Zhou L, et al. Fast cycle slip determination for high-rate multi-GNSS RTK using modified geometry-free phase combination[J]. Gps Solutions, 2020, 24:1-11.
- [39] Wang K, Rothacher M. Ambiguity resolution for triple-frequency geometry-free and ionosphere-free combination tested with real data[J]. Journal of Geodesy, 2013, 87:539-553.
- [40] 李征航, 黄劲松. GPS 测量与数据处理[M]. 武汉:武汉大学出版社, 2010:55-60.
- [41] Zhou F. Theory and methodology of multi-gnss undifferenced and uncombined precise point positioning[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2020, 49(7):938.
- [42] Kunysz W. Antenna phase center effects and measurements in GNSS ranging applications[C]. 14th International Symposium on Antenna Technology and Applied Electromagnetics & the American Electromagnetics Conference. Washington, USA, 2010.
- [43] Chen D, Ye S, Zhou W, et al. A double-differenced cycle slip detection and repair method for GNSS CORS network[J]. GPS solutions, 2016, 20: 439-450.
- [44] Xu X, Nie Z, Wang Z, et al. A modified turboedit cycle-slip detection and correction method for dual-frequency smartphone GNSS observation[J]. Sensors, 2020, 20(20): 5756.
- [45] Penna N, Dodson A, Chen W. Assessment of EGNOS tropospheric correction model[J]. Journal of Navigation, 2001, 54(1):37-55.
- [46] Boehm J, Heinkelmann R, Schuh H. Short Note: A global model of pressure and temperature for geodetic applications[J]. Journal of Geodesy, 2007, 81(10):679-683.
- [47] Lagler K, Schindelegger M, Bohm J, et al. GPT2: Empirical slant delay model for radio space geodetic techniques[J]. Geophysical Research Letters, 2013, 40(6):1069-1073.
- [48] 戴吾蛟, 丁晓利, 朱建军. 基于观测值质量指标的 GPS 观测量随机模型分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2008, 33(7):718-722.
- [49] 张小红, 李星星, 郭斐, 等. GPS 单频精密单点定位软件实现与精度分析[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2008, 33(8):783-787.
- [50] Ge M, Gendt G, Dick G, et al. A new data processing strategy for huge GNSS global networks[J]. Journal of Geodesy, 2006, 80(4):199-203.

-
- [51] 杨元喜. 自适应动态导航定位[M]. 北京:测绘出版社, 2006:75-79.
 - [52] Liu J, Tu R, Han J, et al. Estimability analysis of differential inter-system biases and differential inter-frequency biases for dual-frequency GPS and BDS combined RTK[J]. *Measurement Science and Technology*, 2019, 31(2):1-18.
 - [53] Ying X, Chen W, Lei, et al. GPS/BDS medium/long-range RTK constrained with tropospheric delay parameters from NWP model[J]. *Remote Sensing*, 2018, 10(7):1113.
 - [54] Elliott D K, Christopher J H. Understanding GPS principles and applications[M]. America: Journal of Atmospheric and So-lar-Terrestrial Physics, 1996:308-318.
 - [55] Guo H, He H, Li J, et al. Estimation and mitigation of the main errors for centimetre-level compass RTK solutions over medium-long baselines[J]. *The Journal of Navigation*, 2011, 64(S1):113-126.
 - [56] Yize Z. Nobuaki Kubo, Junping, C. Contribution of QZSS with four satellites to multi-GNSS long baseline RTK[J]. *Journal of Spatial Science*, 2020, 65,41-60.
 - [57] Weikai M, Bofeng L, Zhiteng, Z, et al. Combined BeiDou-2 and BeiDou-3 instantaneous RTK positioning: stochastic modeling and positioning performance assessment[J]. *Journal of Spatial Science*, 2020, 65, 7-24.
 - [58] Yunbin, Y, Xiaolong, M, Baocheng, Z. Initial assessment of single and dual-frequency BDS-3 RTK positioning[J]. *Satellite Navigation*, 2020, 1:1-7.
 - [59] Odijk, D. Weighting ionospheric corrections to improve fast GPS positioning over medium distances[C]. *Proceeding of the 13th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS 2000)*, Salt Lake City, UT, 2000.
 - [60] Wang M, Wang J, Dong D, et al. Performance of BDS-3: satellite visibility and dilution of precision[J]. *GPS Solutions*, 2019, 23(2):1-14.
 - [61] Li B, Feng Y, Shen Y. Three carrier ambiguity resolution: distance-independent performance demonstrated using semi-generated triple frequency GPS signals[J]. *GPS solutions*, 2010, 14:177-184.
 - [62] Teunissen P J G. The least-square ambiguity decorrelation adjustment: a method for fast GPS integer ambiguity estimation[J]. *Journal of Geodesy*, 1995, 70(1):65-82.
 - [63] Teunissen P J G. An optimality property of the integer least-squares estimator[J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 73:587-593.
 - [64] 侯燕青. 多卫星导航系统 RTK 定位部分整周模糊度解算方法研究[D]. 长沙:国防科学技术大学, 2017.
 - [65] 宋福成. GNSS 整周模糊度估计方法研究[D]. 徐州:中国矿业大学, 2016.
 - [66] Hou Y, Liu X, Zhang H, et al. Two-step success rate criterion strategy: a model-and data-driven partial ambiguity resolution method for medium-long baselines RTK[J]. *GPS Solutions*, 2022, 26(4):1-10.
 - [67] Psychas D, Verhagen S, Teunissen P J G. Precision analysis of partial ambiguity resolution-enabled PPP using multi-GNSS and multi-frequency signals[J]. *Advances in Space Research*, 2020, 66(9):2075-2093.
 - [68] Chang X W, Yang X, Zhou T. MLAMBDA: A modified LAMBDA method for integer least-squares estimation[J]. *Journal of Geodesy*, 2005, 79:552-565.
 - [69] Odijk D, Teunissen P J G. ADOP in closed form for a hierarchy of multi-frequency single-baseline GNSS models[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(8):473-492.
 - [70] Verhagen S, Teunissen P J G. The ratio test for future GNSS ambiguity resolution[J]. *GPS Solutions*, 2013, 17:535-548.
 - [71] Jiang Y, Ding W, Gao Y, et al. A new partial ambiguity resolution method based on modified solution separation and GNSS epoch-differencing[J]. *Journal of Geodesy*, 2022, 96(11):1-15.
 - [72] Li Z, Xu G, Guo J, et al. A sequential ambiguity selection strategy for partial ambiguity resolution during RTK positioning in urban areas[J]. *GPS Solutions*, 2022, 26(3):1-16.
 - [73] Nardo A, Li B, Teunissen P J G. Partial ambiguity resolution for ground and space-based applications in a GPS+ Galileo scenario: a simulation study[J]. *Advances in Space Research*, 2016, 57(1):30-45.
-

致 谢

行文至此心态变得无比轻松，回顾自己三年的硕士学习和生活，不禁有些感慨。言到彼岸：若到彼岸，便是未到。像是经历了多次的循环，又来到了即将开启下一程的节点。在毕业论文完成之际，我谨向所有教导过我的老师和帮助关心过我的朋友们表示最真挚的感谢。

首先感谢我的导师王尔申教授。王老师为人和善，平易近人，在学术科研方面博学多识，视野开阔，在本文的选题和撰写等方面给予了悉心的指导。王老师始终不忘关心我的研究进展以及论文完成情况，在生活中也给予了我无微不至的关怀，使我得以专心投入日常的学习研究之中。此外，王老师给我提供了优秀的科研学习平台及学术交流机会，使我在各方面得到充分的锻炼。

感谢中科院上海天文台的张益泽研究员，与张老师的每次会议与请教都能让我学到很多新的东西。在天文台联合培养期间，张老师在生活和工作上都给予我极大的帮助和支持。不论是学习还是做人，张老师都将是永远学习的榜样。

感谢卫星导航实验室这个大集体，感谢杨涛、郭靖、邓喜丹、舒皖森、王欢、刘帆、刘云天、刘慧超、蓝彬、胡威以及研二研一的各位师弟师妹对我的帮助和宽容，从你们身上学到很多东西，大家的相互扶持和互相帮助让我的研究生生活充满乐趣。

感谢在中科院上海天文台学习期间唐文杰博士、宋子远博士、丁君生博士、朱红玉博士等的帮助，尤其是唐文杰博士在实验上的帮助。感谢“58 同城”微信群成员程泉润、王珩，与你们的相处让我摆脱了实验的枯燥与乏味，怀念我们一起在佘山共同寻找和发现的日子。感谢我的室友姜来、毛雨和吴涵旭对我的鼓励和支持，你们让分别变得更加不舍。

最后感谢我的父母和妹妹对我无条件的支持和理解，你们是我奋斗的源泉。

宋伟于沈阳航空航天大学

2022 年 5 月 29 日

攻读硕士期间发表(含录用)的学术论文

- [1] Wang E, **Song W**, Zhang Y, et al. Evaluation of BDS/GPS multi-frequency RTK positioning performance under different baseline lengths[J]. Remote Sensing, 2022, 14(15):3561. (SCI 检索号: 000839791800001) (本学位论文第三章)

版权授权说明

本人授权学校“有权保留送交学位论文的原件，允许学位论文被查阅和借阅，学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以影印、缩印或其他复制手段保存学位论文”；愿意将本人学位论文电子版提交给研究生部指定授权单位收录和使用。学校必须严格按照授权对论文进行处理，不得超越授权对毕业论文进行任意处置。

作者：

2023 年 6 月 8 日

指导教师：

2023 年 6 月 8 日