中 国 科 学 院 上 海 天 文 台 年 刊
1999 年第 20 期 ANNALS OF SHANGHAI OBSERVATORY ACADEMIA SINICA No.20,1999

2 维弦论中的黑洞的熵

沈 有 根
（中国科学院上海天文台,上海 200030）

提 要

在 2 维弦论黑洞背景时空中求解了具有 't Hooft 的边界条件和“准周期”边界条件的 Klein - Gordon 方程和 Dirac 方程,分别计算了相应的玻色子熵和费米子熵,发现它们具有同一发散形式,两者仅相差一个系数。

主题词:弦论 — 2 维黑洞 — 费米子熵 — 玻色子熵
分类号:P145.8

1 引 言

众所周知,物理学中的熵可以由在热力学意义上和依据态的计算两种方式描述。在黑洞的热力学传统描述中,一个黑洞事件视界面积被解释成黑洞的热力学熵形式,而视界上表面引力正比于 Hawking 温度,经典黑洞的 Bekenstein - Hawking 熵与视界面积成比例,且满足所有热力学定律。起源于黑洞背景时空中的物质场的量子涨落是黑洞物理中的一个有趣问题,'t Hooft 利用砖墙模型计算了一个 Schwarzschild 黑洞的标量粒子态的数目[1],他发现了关于 Hartle - Hawking 温度的量子标量的涨落,给出了导致对熵的单圈贡献的关系式:

$$S^{q}_{\mathrm{sch}} = \frac{8\pi^3}{45}\frac{(ZM)^4}{h\beta^2},$$

这里 β 是 Hawking 温度的倒数,而 h 是一截断, S^{q}_{sch} 被认为是一几何特征量 $\frac{A_h}{48\pi\varepsilon^2}$,ε 系紫外截断, $\varepsilon^2 = \frac{15}{2}\delta^2$,而 $\delta = 2\sqrt{r_H \cdot h}$ 是从视界 r_H 到 $r_H + h$ 的固有距离。在 't Hooft 所采用的砖墙模型对 Schwarzschild 黑洞熵的量子修正研究中[2],存在有一个对数发散项 $\log(\frac{\Lambda}{\varepsilon})$,这里 Λ 是红外截断。而 Selodukhin 由标量物质的单圈有效作用出发,利用 Gibbons - Hawking 的欧氏路径积分方法,在研究 Selodukhin 黑洞熵的量子修正中,也存在这一个对数发散项 $\log(\frac{\Lambda}{\varepsilon})$。发散项出现在熵中是因为出现在视界上的态有无穷多个。在量子力学中几何熵满足如下假定,若粒子是服从玻色——爱因斯坦统计的标量玻色子,这样的熵在习惯上称为玻色子熵。若几何

1998 年 1 月 5 日收到。

熵是由计算费米子态来确定的话,则此时熵相应地被称为费米子熵。

近几年来,黑洞熵的问题引起了许多研究者的兴趣[1~8],这些研究工作对各种黑洞背景时空中的黑洞熵的量子修正进行了探讨。

黑洞物理由于它的许多奇特性质而著名,它的一些重要问题诸如有关奇点本性或者一个蒸发黑洞的最终结局等至今仍无法确切回答。弦论有可能对这些问题的最终解答提供一个自然途径[9]。

在本文中,我们利用 't Hooft 的边界条件和"准周期"边界条件求解了 2 维弦论中的黑洞背景时空下的 Klein - Gordon 方程和 Dirac 方程,并计算了相应的玻色子熵和费米子熵,发现除了系数不同外,两者有相同的表达式。

2 2 维弦论中的黑洞

对于 1 + 1 维靶空间中弦的一般 Sigma 模型作用量为[10]

$$S = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\left(G_{ij}(x)\bar{\partial}x^i\partial x^j + \Phi_{(x)}R^{(2)} + T_{(x)}\right), \tag{1}$$

这里坐标 $x = (x^1, x^2)$, $G_{ij}(x)$ 为时空度规, $\Phi_{(x)}$ 为 dilaton 场, $T_{(x)}$ 为 tachyon 场。背景场动力学由世界叶场为零的 β - 函数条件支配,这些方程可写为靶空间中的作用量[10]:

$$S_{eff} = \int d^2x\sqrt{G}e^{\Phi}\left[R + (\nabla\Phi)^2 + (\nabla T)^2 - 2T^2 - 8\right], \tag{2}$$

事实上,tachyon $T_{(x)}$ 描述一无质量场。

由文献[9,10]知,当 $T = 0$ 时,经典运动方程有如下解[这时 $x^i = (u, v)$]:

$$ds^2 = \frac{du\,dv}{1 - uv}, \tag{3}$$

$$\Phi = \log(1 - uv). \tag{4}$$

由此经典度规描述的靶空间几何是一个 2 维黑洞。

作如下坐标变换:

$$u = e^t \mathrm{sh}\, r,\ v = -e^{-t}\mathrm{sh}\, r, \tag{5}$$

这里 t 是时间坐标, r 为径向坐标,则此时(3),(4)两式为

$$ds^2 = -\mathrm{th}^2 r\, dt^2 + dr^2, \tag{6}$$

$$\Phi = \log \mathrm{ch}^2 r. \tag{7}$$

3 玻 色 子 熵

考虑背景时空(6)中无质量标量的场波动方程,其形式为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi) = 0, \tag{8}$$

将(6)式代入(8)式,我们有:

$$\frac{1}{\mathrm{th}r}\partial_t^2\Psi - \partial_r(\mathrm{th}r\partial_r\Psi) = 0 \ . \tag{9}$$

令

$$\Psi = U(r)\exp(-iEt) \ , \tag{10}$$

则我们得到:

$$\frac{1}{\mathrm{th}r}E^2 U + \frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{th}r\frac{\partial U}{\partial r}) = 0 \ . \tag{11}$$

令

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{th}r} \ , \tag{12}$$

时有

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = E^2 U \ . \tag{13}$$

从而我们有:

$$U_{(y)} = \exp(\pm iEy) \tag{14}$$

由(12)式我们有:

$$y = \log \mathrm{Sh}r \ . \tag{15}$$

由 't Hooft 的砖墙模型,我们引入紫外截断 $R = \varepsilon$,ε 为一正的小量。另外,红外截断在 $R = L$ 。

从而我们有本征解:

$$U(r) = \mathrm{Sin}\left[E\log(\frac{\mathrm{Sh}r}{\mathrm{Sh}\varepsilon})\right] \ , \tag{16}$$

而本征值是

$$E\log\left(\frac{\mathrm{Sh}L}{\mathrm{Sh}\varepsilon}\right) = n\pi \ . \tag{17}$$

标量场的自由能为

$$\beta F = \sum_n \ln[1 - e^{-\beta E(n)}] \doteq -\beta\int \frac{n(E)}{e^{\beta E} - 1}\mathrm{d}E \ , \tag{18}$$

计算得:

$$F = -\frac{\pi}{6\beta^2}\log(\frac{\mathrm{Sh}L}{\mathrm{Sh}\varepsilon}) \ , \tag{19}$$

相应(19)式的熵为

$$S_b = \frac{\pi}{3\beta}\log(\frac{\mathrm{Sh}L}{\mathrm{Sh}\varepsilon}) \ . \tag{20}$$

这里, β 为 Hawking 温度倒数。考虑到 ε 为一小的正量,则(20)式可写为

$$S_b = \frac{2\sqrt{2}}{12}\log(\frac{\mathrm{Sh}L}{\varepsilon}) \ . \tag{21}$$

S_b 即为度规(6)的 dilaton 黑洞的玻色子熵。

4 费米子熵

考虑背景时空(6)中零质量旋量的场波动方程,其形式为

$$r^{\mu}\nabla_{\mu}\Psi = 0\ , \tag{22}$$

其中 r^{μ} 满足 Dirac 条件：

$$r^{\mu}r^{\nu} + r^{\nu}r^{\mu} = 2g^{\mu\nu}\ , \tag{23}$$

而

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} - \Gamma_{\mu}\ , \tag{24}$$

Γ_{μ} 的显式为

$$8\Gamma_{\mu} = (\partial_{\mu}r_{\nu})r^{\nu} - r^{\nu}\partial_{\mu}r_{\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}[r^{\nu}r_{\lambda} - r_{\lambda}r^{\nu}]\ . \tag{25}$$

我们取：

$$r^{0} = \frac{1}{\sqrt{\text{th}^{2}r}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad r^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ , \tag{26}$$

计算得到：

$$\Gamma_{0} = \frac{1}{4}\frac{1}{\text{Ch}^{2}r}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ , \tag{27}$$

$$\Gamma_{1} = 0\ . \tag{28}$$

令

$$\psi = e^{iEt}\begin{pmatrix} \psi_{1} \\ \psi_{2} \end{pmatrix}\ , \tag{29}$$

由(28),(27),(26),(24)和(22)等诸式,我们得到：

$$\text{th}r\ \partial_{r}\varphi_{1} + \frac{1}{4}\frac{1}{\text{Ch}^{2}r}\varphi_{1} + iE\psi_{1} = 0\ , \tag{30}$$

$$\text{th}r\ \partial_{r}\varphi_{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{\text{Ch}^{2}r}\varphi_{2} - iE\psi_{2} = 0\ , \tag{31}$$

求解可得：

$$\psi_{1}(r) = C_{1}(\text{th}r)r^{-1/2}\exp[-iE\log\text{Sh}r]\ , \tag{32}$$

$$\psi_{2}(r) = C_{2}(\text{th}r)r^{-1/2}\exp[-iE\log\text{Sh}r]\ , \tag{33}$$

这里 C_1, C_2 为积分常数。

为了计算黑洞的费米子熵,引入所谓的“准周期”边界条件：

$$\sqrt{\text{th}r}\psi_{j}\mid_{\varepsilon} = \sqrt{\text{th}r}\psi_{j}\mid_{L},\quad j = 1,2 \tag{34}$$

另一方面,要求费米子本征解的相因子满足周期条件,从而我们得到：

$$E\log\left[\frac{\text{Sh}L}{\text{Sh}\varepsilon}\right] = 2n\pi\ . \tag{35}$$

由 Fermi - Dirac 统计,我们有单模配分函数为

$$Z(n) = \sum_{m=0}^{2} e^{-m\beta E(n)} = (1 - e^{-3\beta E})(1 - e^{-\beta E})^{-1}, \tag{36}$$

则自由能为

$$F = -\beta^{-1} \sum_n \log[(1 - e^{-3\beta E(n)})(1 - e^{-\beta E(n)})^{-1}] \quad . \tag{37}$$

由下式：

$$\beta F \doteq \int \log\left[\frac{1 - e^{-\beta E(n)}}{1 - e^{-3\beta E(n)}}\right] \mathrm{d}n(E) \ , \tag{38}$$

应用分部积分法求积分，并由熵表达式：

$$S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} \ , \tag{39}$$

如同波色子情形，我们可以得到：

$$S_f = \frac{2\sqrt{2}}{36} \log(\frac{\mathrm{Sh}L}{\varepsilon}) \ , \tag{40}$$

S_f 即为度规(6)的 dilaton 黑洞的费米子熵。

5 结 论

由(40)式和(21)式，我们可以看出费米子熵与玻色子熵，除了系数不同以外，具有相同的表达式。

参 考 文 献

1 't Hooft G. Nucl. Phys. 1985, B256:727
2 Solodukin S N. Phys. Rev. 1995, D51:618
3 Solodukin S N. Phys. Rev. 1995, D51:609
4 Ghosh A and Mitra P. Phys. Lett. 1995, B357:295
5 Russo J G. Phys. Lett. 1995, B359:69
6 Zhou J, Zimmerschild F et al. Phys. Lett. 1995, B359: 62
7 Ichinose I and Satoh Y. Nucl. Phys. 1995, B447:340
8 Shen Y G, Chen D M, Zhan T J. Phys. Rev. 1997, D56:6698
9 Witten E. Phys. Rev. 1991, D44:314
10 Verlinde H. Preprint, 1991, PUPT-1303

ENTROPY OF 2D VLACK HOLE IN STRING THEORY

Sheng Yougen
(Shanghai Astronomical Observatory, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030)

Abstract

The Klein-Gordon equation and Dirac equation are solved in the backgrounds of 2D black bole of string theory respectively with 't Hooft boundary condition and "quasi-periodic" boundary condition. The corresponding entropies of Bosons and Fermions are calculated respectively, which shows that the divergence in the fermionic entropy has the same form as that in the bosonic one, except that the cofficient is different.

Key words string theory — 2D black hole — Fermionic entropy — Bosonic entropy