

基于CORDIC算法的QDDS 在氢钟锁相环中的应用

施丽君^{1,2}, 蔡勇¹

(1. 中国科学院上海天文台, 上海 200030; 2. 中国科学院研究生院, 北京 100049)

摘要: 鉴相器是锁相环的重要组成部分。提出了一种正交鉴相方案, 鉴别来自氢脉泽与来自晶振信号的相位差。利用CORDIC算法产生所需的正交信号, 通过加、减、移位等基本操作, 完成QDDS运算以及输出相差所需的反正切函数运算。

关键词: 氢原子钟; 正交鉴相; CORDIC算法; QDDS

中图分类号: TH714.1⁺4, TN763.3

1 引言

在氢原子钟接收机中, 通常利用锁相环路修正晶振的频率漂移, 即将量子部分输出的脉泽信号的优秀长期稳定度传递到晶振, 同时保持晶振的优良短稳^[1]。其原理图如图1所示。

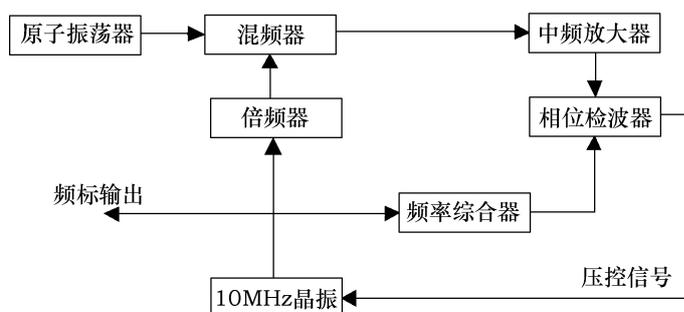


图1 主动型氢原子频标基本原理框图

在主动型氢钟中, 脉泽信号频率由氢原子基态的两超精细能态跃迁决定, 输出信号由原子与频率为1420 MHz的微波腔共振产生, 产生的微波信号频率理论值是1420 405 751 Hz^[1]。但是, 受量子部分C场等影响, 该频率会偏离理论值, 需要DDS (Digital Direct Frequency Synthesis) 微调尾数进行校准^[2]。本文设计方案所需正交输入信号就是利用DDS产生, 所以, 稳定、频谱好并且频率尾数可任意调节的DDS信号对于整个环路设计至关重要。

本文提出了一种新型鉴相器的设计方案, 该方案基于正交鉴相原理, 将CORDIC (Coordinate Rotation Digital Computer, 坐标旋转数字计算机) 算法引入QDDS (正交输出DDS) 设计, 产生正交信号, 该算法同样用于相差的获取。该设计的基本原理图如图2所示。

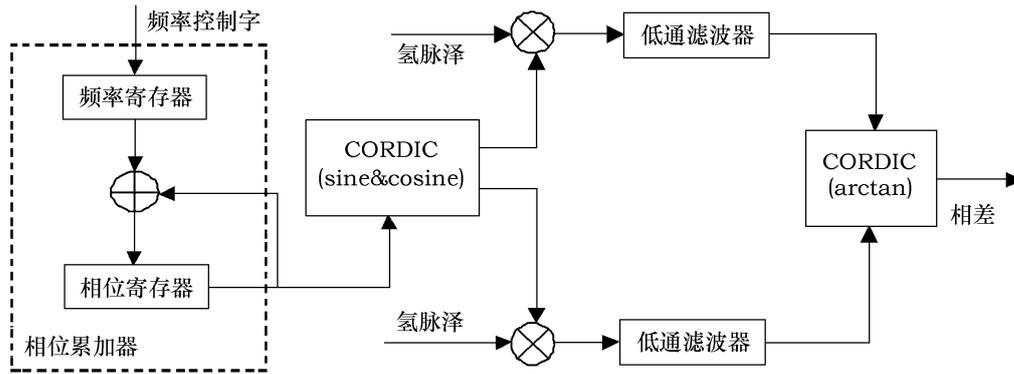


图 2 正交鉴相器原理框图

DDS 的工作原理是用数控振荡器产生频率和相位可控的正弦波，一般包括相位累加器、相幅转换器等模块。相位累加器在时钟 F_{clk} 控制下以频率控制字 F_{cw} 为步长进行累加，其结果经量化处理后送入相幅转换器，输出波形，输出频率为 $F = F_{cw} \cdot F_{clk} / 2^N$ ，其中 N 为频率控制字的字长。

传统的相幅转换器采用 ROM 查找表结构，在高分辨率要求下，频率控制字取值较大，这就需要大量的 ROM 资源。本文采用 CORDIC 算法代替查找表作为相幅转换器，其具有高精度、高分辨率特性，同时节省 ROM 资源。

CORDIC 算法输出幅度相等、相位相差 90° 的一对正交信号，分别与经过接收机前端处理过的同频脉泽信号进行混频、滤波，继而汇集于下一个 CORDIC 核，该核用来实现反正切算法，输出相差值，最终实现鉴相。

2 正交鉴相原理

正交法鉴相原理框图如图 3 所示。

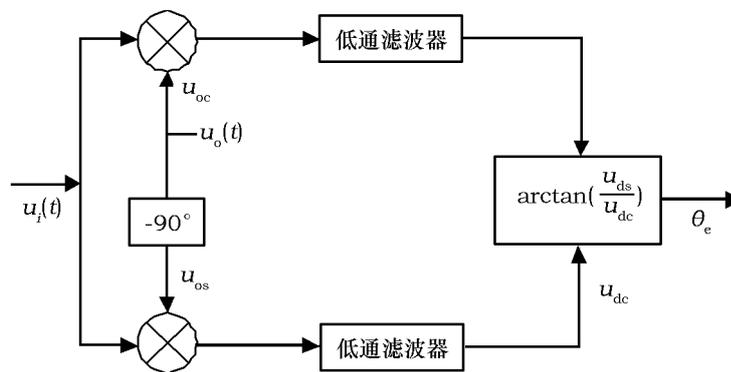


图 3 正交鉴相原理图

理论推导如下：

令 $t = nT$ ，其中 $n = 0, 1, 2, \dots, T$ 是采样周期。且输入信号

$$u_i(nT) = U_i \sin[w_0 nT + \theta_1(nT)] ,$$

$$u_o(nT) = U_o \cos[w_0 nT + \theta_2(nT)] ,$$

则混频后,再经过低通滤波器,可得到信号:

$$u_{ds}(nT) = \text{LPF}[u_i(nT)u_{oc}(nT)] = AU_iU_o \sin[\theta_1(nT) - \theta_2(nT)],$$

$$u_{dc}(nT) = \text{LPF}[u_i(nT)u_{os}(nT)] = AU_iU_o \cos[\theta_1(nT) - \theta_2(nT)],$$

其中, LPF 表示低通滤波过程, A 为低通滤波器增益, 且 $u_{oc}(nT) = u_o(nT) = U_o \cos[w_0nT + \theta_2(nT)]$, $u_{os}(nT) = U_o \sin[w_0nT + \theta_2(nT)]$ 。则鉴相器输出为:

$$\theta_e(nT) = \arctan[u_{ds}(nT)/u_{dc}(nT)] = \theta_1(nT) - \theta_2(nT) + k\pi.$$

从上述推导结果可得, 经过正交鉴相器, 可以直接得到两输入信号的相位差。

3 CORDIC 算法

3.1 基本原理

CORDIC 算法于 1959 年由 J. Volder 提出, 应用于实时导航的数字处理, John Walther 等人于 1974 年对该理论进行了扩展, 利用它研究出了一种能计算多种超越函数的统一算法^[3]。通常情况下, 计算三角函数、反三角函数、双曲线函数及其他超越函数有三种方法:

- (1) ROM 查找表法;
- (2) 多项式近似法 (泰勒级数展开等);
- (3) CORDIC 法。

相比而言, 方法 (3) 具备突出优势^[4]: 只需要移位加 (shift-add) 运算, 不需要硬件乘法器; 可使用流水线结构, 提高计算效率; 可使用循环迭代, 节省硬件资源。该算法的基本原理如图 4 所示。

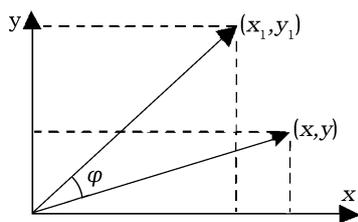


图 4 CORDIC 算法基本原理图

假设直角坐标系下有向量 (x, y) , 按图 4 所示方向旋转角度 φ 得到向量 (x_1, y_1) 。由图可得:

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y_1 = y \cos \varphi + x \sin \varphi \end{cases}. \quad (1)$$

对式 (1) 中的旋转角度 φ 进行限制, 令 $\tan \varphi = \pm 2^{-i}$ ^[5], 这样旋转之后与 $\tan \varphi$ 的乘积项可简化为移位操作。令:

$$\theta = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \alpha_i,$$

其中, θ 表示旋转的任意角度, d_i 表示每次旋转的方向且 $d_i \in \{-1, 1\}$, α_i 表示一系列预定的旋转角度。则旋转任意角度 θ 的第 i 次迭代处理为:

$$\begin{cases} x_{i+1} = K_i [x_i - y_i \cdot d_i \cdot 2^{-i}] \\ y_{i+1} = K_i [y_i + x_i \cdot d_i \cdot 2^{-i}] \end{cases}, \quad (2)$$

式中 K_i 为模校正因子, 且 $K_i = \cos(\arctan(2^{-i})) = 1/\sqrt{1+2^{-2i}}$ 。令 $A_n = \prod_n \sqrt{1+2^{-2i}}$, 则可以将比例常数 K_i 去除, 使得式 (2) 中仅存在移位加运算。

引入辅助变量 z_i 作为第 i 次旋转的预定角度的累加值, 即 $z_{i+1} = z_i - d_i \arctan(2^{-i})$ 。在理论上, CORDIC 算法有两种操作模式^[5]:

(1) 旋转模式: 将向量旋转指定的角度 θ 。此时的差分方程即迭代式为:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - y_i \cdot d_i \cdot 2^{-i} \\ y_{i+1} = y_i + x_i \cdot d_i \cdot 2^{-i} \\ z_{i+1} = z_i - d_i \cdot \arctan(2^{-i}) \end{cases}, \quad (3)$$

其中,

$$d_i = \begin{cases} -1, & z_i < 0 \\ +1, & \text{others} \end{cases}.$$

n 次迭代后的结果为:

$$\begin{cases} x_n = A_n [x_0 \cos z_0 - y_0 \sin z_0] \\ y_n = A_n [y_0 \cos z_0 - x_0 \sin z_0] \\ z_n = 0 \end{cases}. \quad (4)$$

在 DDS 设计中, 令初始输入向量的 y 分量为 0, x 分量为 $1/A_n$, $z_0 = \theta$ (输入的角度值), 代入式 (4) 得到的迭代结果即所需的正弦和余弦输出:

$$\begin{cases} x_n = \cos \theta \\ y_n = \sin \theta \end{cases}. \quad (5)$$

(2) 向量化模式: 将给定向量旋转到 x 轴, 记录下最终旋转的角度。其迭代式与旋转模式的相比, 不同的是:

$$d_i = \begin{cases} -1, & y_i < 0 \\ +1, & \text{others} \end{cases}.$$

则 n 次迭代后的结果为:

$$\begin{cases} x_n = A_n \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ y_n = 0 \\ z_n = z_0 + \arctan(y_0/x_0) \end{cases}. \quad (6)$$

在反正切值的计算中, 令累加器初始值为 $(0, 0, 0)$, 则最终迭代结果为:

$$\theta = \arctan(y_0/x_0). \quad (7)$$

3.2 CORDIC 算法实现

由于本设计中需要计算连续的正、余弦值, 因此采用了流水线结构的 CORDIC 算法, 该结构的特点如下^[6]:

- (1) 每个时钟周期可输出一个对应于指定旋转角度的正、余弦值;
- (2) 移位操作的次数固定, 可用简单的重新连线实现。

圆周 CORDIC 流水线结构框图如图 5 所示。

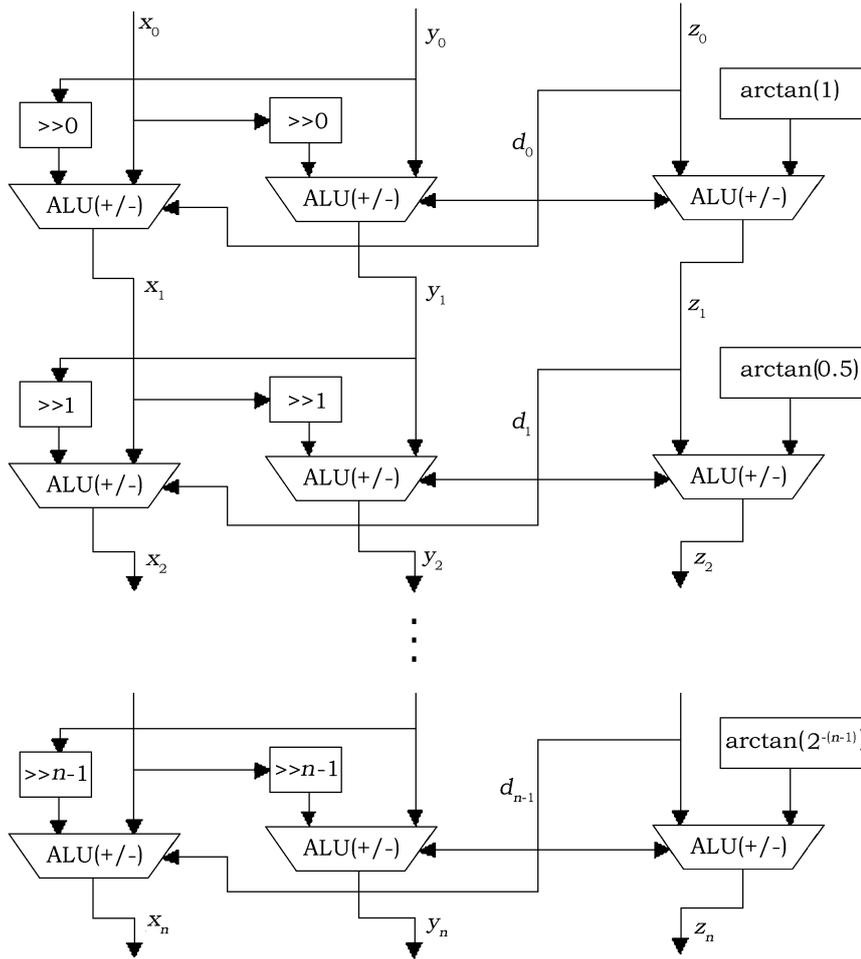


图 5 圆周 CORDIC 流水线结构框图

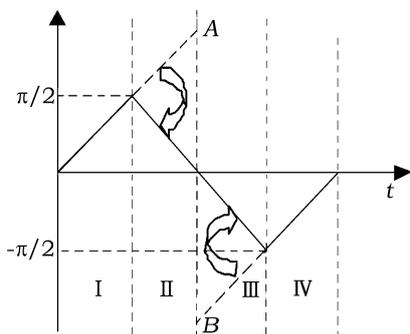


图 6 角度序列波形

本设计中此步骤的目的是，通过计算一系列的 sine、cosine 值，最终产生完整的正、余弦波形。因此，这里需要一个角度序列发生器，用以产生覆盖 4 个象限的角度序列，在时钟激励下逐个注入 CORDIC 核，并且该序列可以决定输出波的频率。

由于 CORDIC 算法覆盖的角度范围是 $[-\pi/2, \pi/2]$ ，即一、四象限，而所需的角序列必须覆盖 4 个象限，因此，该角序列发生器具备将二、三象限的角值转换到一、四象限的功能。图 6 即角序列发生器产生的波形。

这里，先产生一个锯齿波，令 n 为代表角度的比特数，波形从 0 开始计数，当到达 2^n 时，波形从最大值 A 处跳变到负方向上的最大值 B 处，然后再继续增加，以此循环。为了实现象限转换，将锯齿波改为三角波，从而将角度限定在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 。相位区间转换的具体实现方法是：截取角度比特数的高两位作为相位控制信号，当这两位为 01、10 时，保持符号位不变，

其余比特位按位取反。

对于 arctan 函数的实现，只要将上述模型进行适当修改，即将累加器初始值修改为 (0,0,0)，且

$$d_i = \begin{cases} -1, & y_i < 0 \\ +1, & \text{others} \end{cases}, \quad (8)$$

即可。

4 DDS 的逻辑设计

4.1 相位累加器

考虑到提高运算速度和节约资源，采用基于流水线技术的加法器和寄存器结合的方式^[7]。频率控制字是 32 位，这里采用的累加器结构以 4 位加法器为单元，具有 9 级锁存，共 8 级流水线。该功能在 ISE 10.1 中编写 Verilog 代码实现，并使用 ISE simulator 进行仿真，令累加步进为 32'h00008000，仿真结果如图 7 所示。

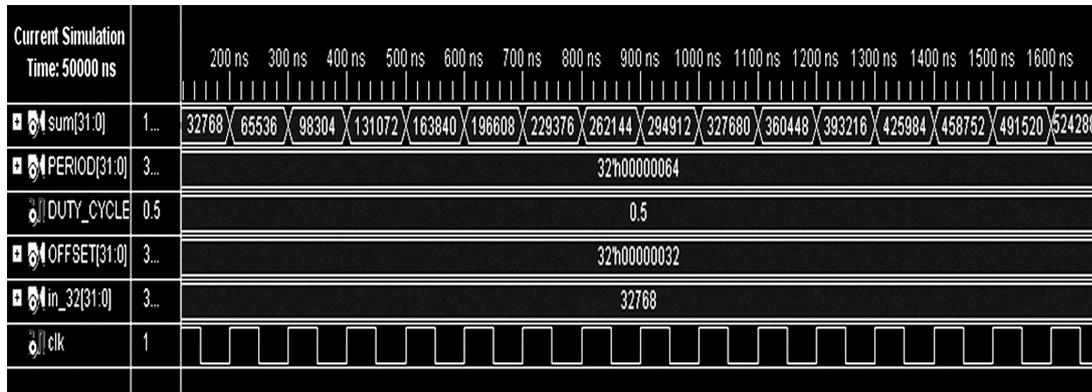


图 7 相位累加器

4.2 基于 CORDIC 算法的正交信号产生

本文所设计的 sine、cosine 波形产生模块采用 Verilog 语言编程实现，并在 MATLAB/simulink 中进行联合仿真。将相位累加器的输出信号送入相位控制单元，校正后，输出如图 6 所示的角度序列波形，将该波形作为 CORDIC 模块的相角输入序列，最终产生正交的正、余弦幅度值。由前文分析可知，生成的正、余弦波形与角度序列波形同频。这里，采用小数点后 10 位精度，迭代次数为 11 次，角度序列字长为 14 位。在 MATLAB 中进行仿真，结果如图 8 所示，图 9 为时域波形图，图 10 为频谱图。

4.3 基于 CORDIC 算法的反正切模块设计

将产生 sine、cosine 的 CORDIC 算法进行修改，即将累加器初始值设为 (0,0,0)，且进行如式 (8) 的约束，即可得到反正切算法^[8]。下面在角度区间 [0°, 30°]，每隔 5° 进行一次算法验证。其中，输入数据 x、y 均为 16 bit，迭代次数为 11 次。仿真结果整理如表 1 所示。

由表中数据可得，在角度值很小的情况下 ($\varphi < 30^\circ$)，相对误差小于 0.2%。若要进一步提高精度，可以增加迭代次数和输入位数。

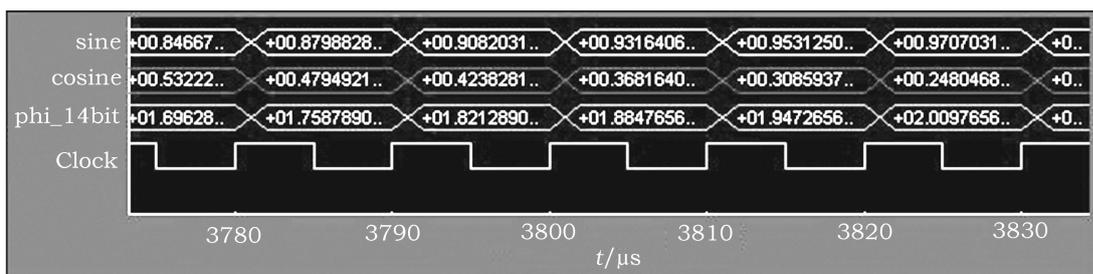


图 8 CORDIC 算法产生的正、余弦幅度值

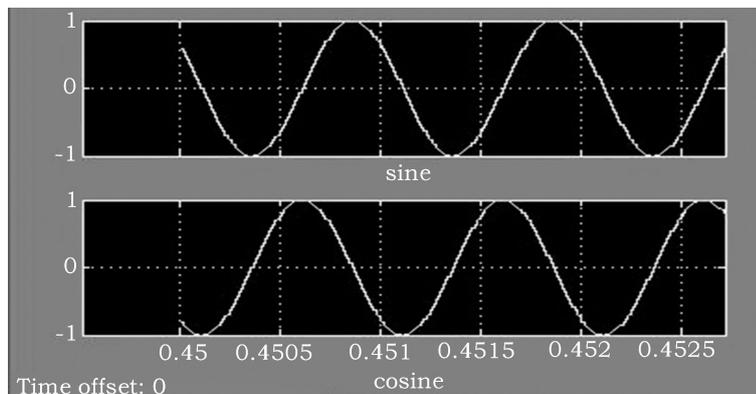


图 9 CORDIC算法产生的正弦、余弦波形

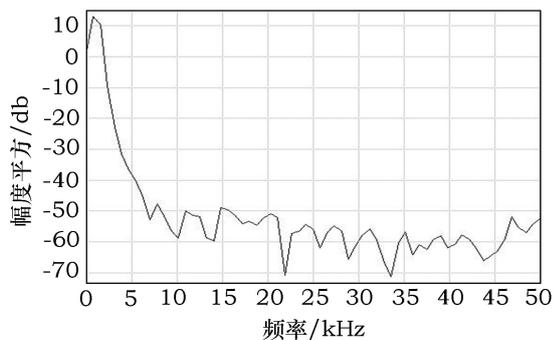


图 10 (a) CORDIC 算法产生的 sine 频谱

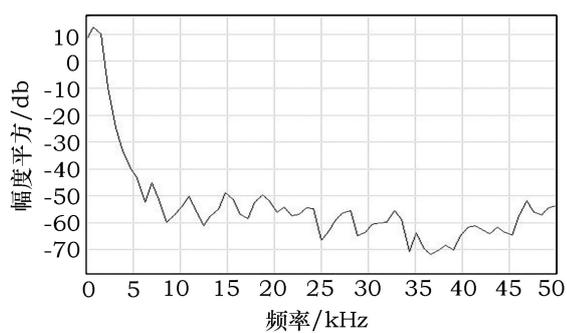


图 10 (b) CORDIC 算法产生的 cosine 频谱

表 1 arctan 算法仿真结果分析

x_{in}	y_{in}	y_{in}/x_{in}	z_{out}	$\varphi/(^{\circ})$	$\arctan(y_{in}/x_{in})$	相对误差/%
1444	0	0	0	0	0	0
11703	1024	0.0875	0.08691	4.98	5	0.04
11617	2048	0.1763	0.1748	10.015	10	0.15
15289	4096	0.2679	0.2627	15.004	15	0.027
2813	1024	0.364	0.3496	20.0306	20	0.153
4392	2048	0.4663	0.4355	24.952	25	0.192
7094	4096	0.5774	0.5234	29.989	30	0.037

5 结束语

本文利用 CORDIC 算法产生正交信号, 代替了传统 QDDS 中相位-幅度变换使用的查找表结构。此外, DDS 中的相位累加器采用流水线结构可进一步提高速度和节省资源。同时, 反正切函数亦由 CORDIC 算法实现, 最终完成正交鉴相。该正交鉴相器用于主动型氢原子钟接收机部分的锁相环中, 它取代了老版锁相环中的模拟器件, 利用软件控制实现鉴相, 从而降低了相位抖动, 改善了氢原子的温度系数, 进一步提高了频率稳定度, 降低了频率漂移率。

参考文献:

- [1] 翟造成, 张为群, 蔡勇等. 原子钟基本原理与时频测量技术. 上海: 上海科学技术文献出版社, 2009
- [2] 王勇, 吕善伟, 冯克明. 宇航计测技术, 2005, 25(3): 15
- [3] 金学哲, 金明吉, 岂飞涛等. 南开大学学报 (自然科学版), 2005, 38(1): 60
- [4] Oskar M, Luc S, Martin M. Journal of VLSI Signal Processing Systems, 2000, 24: 211
- [5] 刘波. 精通 Verilog HDL 语言编程. 北京: 电子工业出版社, 2007
- [6] Esteban O G, Rene C, Miguel A. 3rd International Conference On Electrical and Electronics Engineering, 2006: 104
- [7] 熊兴中, 杨平先, 吴治隆. 四川轻化工学院学报, 2004, 17(2): 49
- [8] 姜华, 毛志刚, 谢憬. 信息技术, 2008, (1): 52

Application of QDDS Based on CORDIC Algorithm in Phase-Lock Loop of Hydrogen Atomic Clocks

SHI Li-jun^{1,2}, CAI Yong¹

(1. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030;

2. Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

Abstract: The phase-detector is one of the important parts of the phase-lock loop. This paper presents a phase-detector design to detect the phase difference between the signal from Hydrogen Maser and signal from the crystal. Adopt CORDIC algorithm to generate the required orthogonal signals. Besides, phase distinction is calculated directly using the Arctan function generated by a CORDIC core.

Key words: hydrogen atomic clock; orthogonal phase-detector; CORDIC algorithm; QDDS