第2卷 第4期　　天 文 学 进 展　　Vol. 2, No. 4
1984年10—12月　　PROGRESS IN ASTRONOMY　　Oct.—Dec., 1984

等离子体天体物理中的弱湍动和强湍动

李 晓 卿
(中国科学院紫金山天文台)

提　　要

本文对等离子体天体物理中的弱及强湍动进行评述，并强调了等离子体的基本相互作用。

弱湍动的主要课题是波—波、波—粒子间的非线性相互作用；相互作用的动力学方程组可用半经典方法导出。讨论了如下重要课题：弱非均匀性介质中波的传播方程，湍动加速和磁发电机制。

分析了控制强湍动现象的查哈罗夫方程。讨论了一些天体物理中的重要问题，例如宇宙天体中自生磁场、电双层、孤波加速、辐射以及爆发等等。

一、引　　言

等离子体是一种很不稳定的多自由度系统，在其内可以激发多种模式的等离激元。天文学家，甚至在朗缪尔研究气体放电后引进“等离子体”这个术语(1929年)之前，就已经涉猎到一些等离子体过程的研究。然而，一方面，直到五十年代等离子体物理本身仍未得到长足的发展；另一方面，长期以来天文学家用以接收宇宙天体信息的武器主要是光学望远镜，因此原子层次的跃迁辐射理论在天体物理中占统治地位。到六十年代，特别是七十年代初，由于全波段天文学的蓬勃发展以及对等离子体物理的更为积极的研究，等离子体天体物理才以崭新的姿态出现在广阔的天文学舞台上。

在地球上，在人们活动的范围内，等离子体现象不过是在特定环境和范围内的一种物理表现。但是在宇宙条件下，在宇宙天体上，情况就大为不同。在宇宙条件下，介质的电导率是非常大的：在星际气体中，如果1,000个原子只有一个电离的话，那么它的电导率也竟和完全电离情况下的电导率相差无几。因而，这种介质就有足够的自由荷电粒子，使其表现为等离子体性质。出现这种情况的原因在于特大的天体尺度。事实上，电导率为

$$\sigma=\frac{\omega_{pe}}{4\pi}\ \frac{\lambda}{\lambda_d},$$

其中，$\omega^2_{pe}=4\pi e^2n/m_e$为电子等离子体频率，$\lambda$ 是电子平均自由程，$\lambda_d=\omega_{pe}^{-1}v_{Te}$ 为电子的德拜波长。在宇宙条件下，λ近似于天体尺度，而λ_d却是非常小的(对星际气体$\lambda_d\approx700$cm；对日冕，$\lambda_d\approx0.7$cm；光球，$\lambda_d\approx2\times10^{-5}$cm；脉冲星磁层，$\lambda_d\approx0.07$cm；气体星云，$\lambda_d\approx70$cm，等等)，

1984年8月31日收到。

本文系在上海天体物理前沿讨论会上的报告。

因而$\lambda/\lambda_d \gg 1$。这就是说，宇宙天体大多处于等离子体态。

根据现代观点，等离子体是足量"非裸露"的荷电粒子和等离激元(plasmons)的准中性系统。等离激元，这种准粒子，是多自由度等离子体不稳定性的一种元激发，也即各种模式的等离子体波。每种等离激元都有一定的能量密度w和波粒数(密度)N：

$$w_k^\sigma = \frac{1}{(2\pi)^3}\hbar\omega^6(\boldsymbol{k})N_k^\sigma \tag{1.1}$$

$$w^\sigma = \int w_k^\sigma d\boldsymbol{k} = \int \hbar\omega^\sigma(\boldsymbol{k})N_k^\sigma \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \tag{1.2}$$

在热动平衡等离子体中，能量均分成立；对朗缪尔等离激元，由于朗道阻尼使其$k \leqslant k_d$($k_d \sim 1/\lambda_d$为德拜波数)，故单位体积等离激元数为k_d^3量级，这时$w \approx k_d^3 T_e$(T_e以能量为单位)，即

$$W_T \equiv w_T/n_e T_e \approx k_d^3/n_e = 1/N_d \tag{1.3}$$

N_d为德拜球内电子数，$N_d = n\lambda_d^3$。在宇宙条件下，N_d非常大，$N_d \gg 1$(例如，对日冕$N_d \approx 3\times 10^7$)。换句话说，湍动等离激元热能级是很低的。这意味着，在此基础上激起等离子体波模就较容易(如果波模的能级高于热水平能级，我们将说这种波模被激发起来)。事实上，对于激发源功率$Q = \eta\ n_e T_e \omega_{pe}$，我们有如下平衡方程

$$Q = \nu_e w$$

其中ν_e为电子之间的碰撞频率。由此，可得到

$$W_{ex} = w_{ex}/n_e T_e = \frac{Q}{\nu_e n_e T_e} = \eta N_d \tag{1.4}$$

与(1.3)式相比，激发等离子体波的条件($W_{ex} \gg W_T$)为

$$\eta \gg N_d^{-2} \tag{1.5}$$

由于N_d很大，上述条件在天体中极易满足。

众所周知，天体辐射的谱线总是有一定频宽的。这表明辐射的波列的场不是单色波场，而是一个波包，它的宽度和波列平均寿命τ有周知的关系：$\delta\Omega \sim \tau^{-1}$。波列平均寿命$\tau$的含义是：在经过平均时间间隔$\Delta t = \tau$之后，波列的位相有明显的移动，成为具有同样波频$\Omega$但有不同位相的新波列。现在，如果在空间同一点在相等的时间间隔t_0(它是$2\pi\Omega^{-1}$的整数倍)来测量这种波列的场强的话，那么当$t_0 \gg \tau$时，由于在此间隔内波场出现过多次明显相移，我们就会得到完全不同的测量值。这正好是随机相的物理含义：在相同宏观条件下重复做同样的实验，测量图象不会重现。通常t_0是由物理过程的特征时间来确定。在天体物理情况下，等离子体中过程的特征时间约为秒或不到一秒的量级，随机相条件

$$\delta\Omega \gg t_0^{-1} \tag{1.6}$$

一般是满足的。位相是随机的等离激元称之为湍动等离激元。如果说一种或几种湍动等离激元的能量密度比它们的热能量密度大许多，那么就说它们被激发了，同时等离子体就处于湍动态。

产生随机相的原因，不外是某种不稳定性。作为多粒子系统的等离子体，具有众多自由度和多种多样可能的集合运动。各种不稳定性都可以得到发展，波的振幅逐渐增大，以致非线性效应使这种集合运动彼此相互作用，类似于流体湍流中各种尺度运动之间的相互作用，

在此情况下，等离子体就过渡到湍动状态。

湍动分强湍动和弱湍动，在等离子体天体物理中，它们对粒子加速和加热、辐射、爆发及爆后现象、宇宙线起源、dynamo理论等重要问题都有其独特的作用。

在以下各节中，先论述弱湍动，然后再转到强湍动；在简要论述它们的基本理论之后，对等离子体天体物理中若干重要问题作一些中肯的分析研究。

二、等离子体天体物理中弱湍动

这一节所考虑的弱湍动，是指 $\overline{w}\equiv w/n_eT_e\ll 1$，同时，在动力论展式中只计及二级非线性流。

1 线性响应和非线性流

从Vlasov方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}=0 \tag{2.1}$$

出发，把分布函数和场分成规则部分和湍动部分

$$\left.\begin{aligned}&f=f^R+f^T,\ \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^R+\boldsymbol{E}^T\\&\boldsymbol{F}\equiv e\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{F}^R+\boldsymbol{F}^T\end{aligned}\right\}\tag{2.2a}$$

同时对随机相平均给出

$$\langle f^T\rangle=0,\ \ \langle\boldsymbol{E}^T\rangle=0,\ \ \langle\boldsymbol{F}^T\rangle=0, \tag{2.2b}$$

就可以得到

$$\frac{\partial f^R}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f^R}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}^R\cdot\frac{\partial f^R}{\partial \boldsymbol{p}}=-\left\langle\boldsymbol{F}^T\cdot\frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{p}}\right\rangle \tag{2.3}$$

假定f^T可按湍动场$\boldsymbol{E}^T$作如下展开

$$f^T=\sum f^{T(i)} \tag{2.4}$$

其中(i)表示正比于场的幂次。于是从(2.1)、(2.3)、(2.4)就可得到如下级联方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f^{T(1)}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f^{T(1)}}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}^T\cdot\frac{\partial f^R}{\partial \boldsymbol{p}}+\boldsymbol{F}^R\cdot\frac{\partial f^{T(1)}}{\partial \boldsymbol{p}}=0\\&\frac{\partial f^{T(2)}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f^{T(2)}}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}^T\cdot\frac{\partial f^{T(1)}}{\partial \boldsymbol{p}}+\boldsymbol{F}^R\cdot\frac{\partial f^{T(2)}}{\partial \boldsymbol{p}}-\left\langle\boldsymbol{F}^T\cdot\frac{\partial f^{T(1)}}{\partial \boldsymbol{p}}\right\rangle=0\\&\frac{\partial f^{T(3)}}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f^{T(3)}}{\partial \boldsymbol{r}}+\boldsymbol{F}^T\cdot\frac{\partial f^{T(2)}}{\partial \boldsymbol{p}}+\boldsymbol{F}^R\cdot\frac{\partial f^{T(3)}}{\partial \boldsymbol{p}}-\left\langle\boldsymbol{F}^T\cdot\frac{\partial f^{T(2)}}{\partial \boldsymbol{p}}\right\rangle=0\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

利用谱分解，可以解(2.5)，获得(令$\boldsymbol{F}^R=0$)

$$i\,(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})f_k^{T(1)}=\int\boldsymbol{F}_{k_1}^T\cdot\frac{\partial f_{k_2}^R}{\partial \boldsymbol{p}}dk_1dk_2\delta(k-k_1-k_2) \tag{2.6a}$$

$$i\,(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})f_k^{T(2)}=\int\left[\boldsymbol{F}_{k_1}^T\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}f_{k_2}^{T(1)}-\left\langle\boldsymbol{F}_{k_1}^T\cdot\frac{\partial f_{k_2}^{T(1)}}{\partial \boldsymbol{p}}\right\rangle\right]dk_1dk_2\delta(k-k_1-k_2) \tag{2.6b}$$

$$i\ (\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})f_k^{T(3)}=\iint\left[\boldsymbol{F}_{k_1}^T\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{p}}f_{k_2}^{T(2)}-\left\langle\boldsymbol{F}_{k_1}^T\cdot\frac{\partial f_{k_2}^{T(2)}}{\partial\boldsymbol{p}}\right\rangle\right]dk_1dk_2\delta(k-k_1-k_2)\tag{2.6c}$$

其中，$f_k\equiv f_{\omega,\boldsymbol{k}}, dk\equiv d\omega d\boldsymbol{k}$，$\delta(k-k_1)=\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)\delta(\omega-\omega_1)$。忽略规则分布函数$f^R$的缓变化，就可得到各级流

$$\boldsymbol{j}^{T(i)}=\sum_\alpha\int e_\alpha\boldsymbol{v}f_\alpha{}^{T(i)}\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\tag{2.7}$$

以及非齐次Maxwell方程

$$\left(k^2\delta_{ij}-k_ik_j-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega,\boldsymbol{k})\right)E_{k,j}^T=\frac{4\pi\omega}{c^2}ij_i^{T(n)}(\omega,\boldsymbol{k})\tag{2.8}$$

$n\geqslant2$；介电张量ε_{ij}是线性响应部分

$$\left.\begin{aligned}&j_{k,i}^{T(1)}=\sigma_{ij}(k)E_{k,j}^T\\&\varepsilon_{ij}=\delta_{ij}+\frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{ij}\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

它为[1]

$$\varepsilon_{ij}\ (\omega,\boldsymbol{k})=\delta_{ij}+\sum_\alpha\frac{4\pi i}{\omega}\int\frac{v_ie_\alpha{}^2\left[\delta_{js}\left(1-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega}\right)+\frac{k_sv_j}{\omega}\right]}{i(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}+i\varepsilon)}\frac{\partial f_\alpha{}^R}{\partial p_s}\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\tag{2.10}$$

被积函数分母中的$i\varepsilon$是考虑到Landau约定的结果[2]。对于纵振荡和横振荡

$$\varepsilon^l=\varepsilon_{ij}\frac{k_ik_j}{k^2},\ \varepsilon^t=\varepsilon_{ij}e_{k,i}^te_{k,j}^t$$

有

$$\varepsilon^l{}_{(\omega,k)}=1+\sum_\alpha\frac{4\pi e_\alpha{}^2}{\omega k^2}\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}+i\varepsilon}\left(\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial f^R}{\partial\boldsymbol{p}}\right)\tag{2.11}$$

$$\varepsilon^t(\omega,\boldsymbol{k})=1+\sum_\alpha\frac{2\pi e_\alpha{}^2}{\omega}\int\frac{d\boldsymbol{p}/(2\pi)^3}{\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}+i\varepsilon}\left[\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f_\alpha{}^R}{\partial\boldsymbol{p}}-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{k^2}\left(\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial f_\alpha{}^R}{\partial\boldsymbol{p}}\right)\right]\tag{2.12}$$

以极化矢量$e_{k,i}$乘(2.8)式，得到

$$\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon^\sigma(k)\right)E_k^{T\sigma}=\frac{4\pi i}{c^2}\omega(e_k^\sigma{}^*\cdot\boldsymbol{j}_k^{T(n)})\tag{2.13}$$

其中

$$\varepsilon^\sigma(k)=\varepsilon_{ij}e_{k,i}^\sigma e_{k,j}^\sigma{}^*+\frac{c^2}{\omega^2}(\boldsymbol{k}\cdot e_k^\sigma)(\boldsymbol{k}\cdot e_k^\sigma{}^*)$$

略去(2.13)式右端非线性流，令此情况下色散方程的解为$\omega^\sigma(\boldsymbol{k})+i\gamma_k^\sigma$，这时对下式在$\omega^\sigma(\boldsymbol{k})$领域展开

$$\omega^2(Re\varepsilon^\sigma+iIm\varepsilon^\sigma)-k^2c^2=0$$

得到

$$\gamma_k^\sigma = -\frac{(\omega^\sigma)^2 Im\varepsilon^\sigma(\omega^\sigma, \boldsymbol{k})}{\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^2 Re\varepsilon^\sigma(\omega, \boldsymbol{k})\Big|_{\omega=\omega^\sigma}} \tag{2.14}$$

对纵振荡易得

$$\gamma_k^l = \sum_\alpha \frac{4\pi^2 e_\alpha^2}{k^2 \frac{\partial}{\partial\omega} Re\varepsilon^l(k)\Big|_{\omega=\omega^l}} \int \delta(\omega^l - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}) \left(\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial f_\alpha^R}{\partial \boldsymbol{p}}\right) \frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \tag{2.15}$$

$\gamma_k^\sigma > 0$，表示波放大；$\gamma_k^\sigma < 0$则波被粒子吸收。

在知道了各级非线性流(2.7)之后，就可以根据(2.8)用格林函数方法求出它们所产生的场E_k^T，即可得到相关强度$I_{k,k'} = \langle E_{k'}^T \cdot E_k^T\rangle$，考虑到$I_{k,k'}$对$(k-k')$的关系不是精确的无宽度的$\delta(k-k')$依赖关系，就可获得波粒数$N_k \sim I_k(\boldsymbol{r}, t)$的非线性方程，它包括波与波、波与粒子的各种非线性项。但是，这种运算是非常复杂的，并且由于各种非线性过程搅混在冗长的展式中，过程的物理图象变得模糊不清。然而，在此情况下，半经典理论却为这种弱湍动等离子体提供了一种非常有力的表述。

2 弱湍动半经典理论表述

我们知道，量子论的有效性不单单在于它的公式表述，它的一些基本观念也占据了颇为重要的位置。在等离子体物理中，常把粒子和波看作经典的，同时借用量子观念来处理它们之间的相互作用，这种方法称之为半经典方法。必须指出，半经典理论在描述等离子体相互作用，即建立各种非线性的N_k的动力学方程方面，它暗含着要求随机相近似，因而它非常适宜于表述弱湍动过程。事实上，对于激元数N_k，我们总认为在所有等离子体相互作用过程中是完全确定的量，由量子论，激元数N_k和激元的位相φ_k是一对满足测不准关系的共轭量；N_k的确定性势必导致位相φ_k的不确定。换句话说，半经典理论要求激元的位相是随机的。自然，这并不意味着半经典理论仅仅适合随机相的情况，而只是表明，有关固定位相的信息在这种理论中并不占有重要位置。例如，在天体物理情况下，大多数观测结果并没有提供有关波的位相信息，因而随机相近似是一种合适的近似。

众所周知，某种模式波自发辐射过程总伴随着感应过程，它或者引起波的吸收，或引起波的再辐射。假定处于态$\{q\}$的粒子辐射σ量子N_k^σ后跃迁到态$\{q'\}$，记$u_{q,q'}$为一秒钟内从$\{q\} \longrightarrow \{q'\}$的自发跃迁概率，相应的感应跃迁概率为$w_{q,q'}$，感应吸收概率为$w_{q',q}$，当然，在仅仅满足等式$\hbar\omega^\sigma(\boldsymbol{k}) = \varepsilon_q - \varepsilon_{q'} > 0$情况下，过程的概率才是非零的。这时，我们就得到态$\{q\}$的粒子数$n_q$的变化率方程：

$$\frac{\partial n_q}{\partial t} = -n_q(u_{q,q'} + w_{q,q'}) + n_{q'} w_{q',q} = -\frac{\partial n_{q'}}{\partial t}$$

当然，感应过程概率总是正比于辐射能量密度的，即$w_{q,q'} = \widetilde{w}_{q,q'} N_k^\sigma$，$w_{q',q} = \widetilde{w}_{q',q} N_k^\sigma$；从物理上来说，自发辐射概率和感应系数$\widetilde{w}$只依赖于系统与场之间的相互作用，而与系统的能态之间是否达到平衡无关。于是当两能态处于统计平衡时：$\partial n_q/\partial t = \partial n_{q'}/\partial t = 0$，$n_{q'}/n_q = \exp[(\varepsilon_q - \varepsilon_{q'})/T]$（为简单起见，假定这两个能级的简并因子相等），就有

$$N_k^\sigma = u_{q',q'}/\left(\widetilde{w}_{q',q}\exp\frac{\varepsilon_q-\varepsilon_{q'}}{T}-\widetilde{w}_{q,q'}\right)$$

与电磁波量子N_k^σ所服从的波色-爱因斯坦分布

$$N_k^\sigma = 1/\left[\exp\frac{\varepsilon_q-\varepsilon_{q'}}{T}-1\right] \tag{2.16}$$

比较，得到

$$u_{q,q'}=\widetilde{\widetilde{w}}_{q,q'}=\widetilde{\widetilde{w}}_{q',q} \tag{2.17}$$

从而，我们得到结论[3],[4]：过程的总辐射概率(自发+感应辐射)为

$$w_{q,q'}+u_{q,q'}=u_{q,q'}(N_k^\sigma+1) \tag{2.18a}$$

而感应吸收概率为

$$w_{q',q}=u_{q,q'}N_k^\sigma \tag{2.18b}$$

必须指出，(2.17)并不仅仅是热动平衡的产物，它实质上反映了某种物理对称性，即是力学系统所具有的时间反演不变性的反映。换句话说，(2.17)是用所研究问题的符号表述的细致平衡原理。

现在来研究二能级粒子系统。假定动量为$\boldsymbol{P}$的粒子辐射σ波后跃迁到动量为$(\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k})$态，令这种过程的自发辐射概率为$w_p^\sigma(\boldsymbol{k})$。由(2.18a)可知，由于辐射，$\sigma$波的激元数$N_k^\sigma$的增率为

$$(N_k^\sigma+1)w_p^\sigma(\boldsymbol{k})f_p\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}$$

再由(2.18b)式，因吸收，它的减少率为

$$N_k w_p^\sigma(\boldsymbol{k})f_{p'}\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}$$

因此，总变率方程为

$$\frac{dN_k^\sigma}{dt}=\int\left[\left(N_k^\sigma+1\right)f_p-N_k^\sigma f_{p'}\right]w_p^\sigma(\boldsymbol{k})\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}$$

其中$\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}-\hbar\boldsymbol{k}$($|\hbar\boldsymbol{k}|\ll|\boldsymbol{p}|$)，展开$f_{p'}\approx f_p-\hbar\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial f_p}{\partial\boldsymbol{p}}$，就获得

$$\frac{dN_k^\sigma}{dt}=\gamma^\sigma(\boldsymbol{k})N_k^\sigma+\int w_p^\sigma(\boldsymbol{k})f_p\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \tag{2.19}$$

其中

$$\gamma^\sigma(\boldsymbol{k})=\int w_p^\sigma(\boldsymbol{k})\hbar\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial f_p}{\partial\boldsymbol{p}}\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \tag{2.20}$$

(2.19)右边第一项表示感应项，而第二项表自发辐射项。因此这个过程

$$e\rightleftarrows e'+\sigma \tag{2.21}$$

产生的自发辐射总功率密度为

$$Q^\sigma=\int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\hbar\omega^\sigma(\boldsymbol{k})\frac{dN_k^\sigma}{dt}\bigg|_{N_k^\sigma\to0}=\int Q_p^\sigma f_p\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3} \tag{2.22}$$

其中

$$Q_p^\sigma = \int \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \hbar\omega^\sigma(\boldsymbol{k}) w_p^\sigma(\boldsymbol{k}) \tag{2.23}$$

是单粒子自发辐射的功率，即辐射强度。另一方面，在等离子体中运动的荷电粒子会产生电流$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$，由麦氏方程可得到流所诱发的场。流对场作功使场能增加，即自发辐射σ波，其功率为

$$I^\sigma = -\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)d\boldsymbol{r} \tag{2.24}$$

用格林函数方法，我们可以计算(2.24)式，并与(2.23)相比较($I^\sigma = Q_p^\sigma$)，可得到自发辐射概率。对匀速运动情况下(考虑速度非均匀性只不过是计及更小一阶的散射效应)，有

$$w_p^\sigma(\boldsymbol{k}) = \frac{8\pi^2}{\hbar} \frac{e^2|\boldsymbol{e}^*(\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{v}|^2\delta(\omega^\sigma - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}{\frac{\partial}{\partial\omega}[\omega^2\varepsilon^\sigma(\omega,\boldsymbol{k})]|_{\omega=\omega^\sigma}} \tag{2.25}$$

上式δ函数的宗量为0，正好是切仑柯夫条件

$$\omega^\sigma = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} \tag{2.26}$$

它是过程的能量、动量守恒律的结果。

(2.21)作为粒子和波相互作用的过程，除了波强度变率方程(2.19)以外，还可类似推导出粒子分布函数f_p的变率方法：

$$\frac{df_p}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left\{ D_{ij}(\boldsymbol{p})\frac{\partial f_p}{\partial p_i}\right\} + \frac{\partial}{\partial p_i}(A_i f_p) \tag{2.27}$$

其中

$$D_{ij}(\boldsymbol{p}) = \int \hbar^2 k_i k_j w_p^\sigma(\boldsymbol{k}) N_k^\sigma \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \tag{2.28a}$$

$$A_i(\boldsymbol{p}) = \int \hbar k_i w_p^\sigma(\boldsymbol{k}) \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \tag{2.28b}$$

扩散方程(2.27)实质上就是Fokker-Planck方程。在天体物理条件下，自发项往往可以忽略，于是从(2.19)和(2.27)可得到如下一组准线性方程：

$$\frac{dN_k^\sigma}{dt} = \gamma_k^\sigma N_k^\sigma \tag{2.29}$$

$$\frac{df_p}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(D_{ij}\frac{\partial f_p}{\partial p_j}\right) \tag{2.30}$$

在外磁场存在下，我们同样可以推得过程(2.21)的自发辐射概率及一组准线性方程，它们描述了许多重要的物理过程：纵波和横波的回旋辐射、同步加速辐射及其不稳定性、它们的自发辐射过程以及辐射与粒子的相互作用。

类似地，我们可以建立和推求波—粒子非线性散射过程

$$\sigma + \alpha \rightleftarrows \sigma' + \alpha' \tag{2.31}$$

以及非线性波—波相互作用

$$\sigma \rightleftarrows \sigma' + \sigma'' \tag{2.32}$$

的动力方程及其自发辐射概率。在[5]中我们给出了这些重要相互作用过程的详尽分析和推

演；有关方面的简略的推导亦可参见[1]和[3]。

在天体物理条件下，我们对高频电磁波经等离子体湍动散射的辐射转移过程特别有兴趣。在(2.32)中，令$\sigma=t$(高频电磁波)，$\sigma'=t'$ $\sigma''=l$(纵波)，即过程

$$t\rightleftharpoons t'+l, \tag{2.33}$$

对应该过程的高频电磁波辐射转移方程不难求得[5]：

$$\frac{dI_{\omega,\Omega}}{dt}=\frac{\partial I_{\omega,\Omega}}{\partial t}+\boldsymbol{v}_g\cdot\frac{\partial I_{\omega,\Omega}}{\partial \boldsymbol{r}}=\frac{1}{2}\sigma_\perp\Delta_\perp I_{\omega,\Omega}+\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega^4\sigma_1\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{I_{\omega,\Omega}}{\omega^3}\right) \tag{2.34}$$

其中(对 l 为朗缪尔湍动而言)

$$\sigma_\perp{}^l=\frac{\pi\omega_{pe}^2}{8ck^4}\int_0^k\frac{w_{k_1}^l k_1{}^3dk_1}{n_e m_e c^2} \tag{2.35a}$$

$$\sigma_1{}^l=\frac{\pi}{16}\frac{\omega_{pe}^4}{c^3k^4}\int_0^k\frac{w_{k_1}^l k_1dk_1}{n_e m_e c^2} \tag{2.35b}$$

分别为弹性散射系数和非弹性散射系数。前者描述谱强度分布的改变，而后者使谱的宽度变化；$I_{\omega,\Omega}$为谱强度，它定义为

$$w_\omega{}^t=\int I_{\omega,\Omega}d\Omega dk/d\omega(\boldsymbol{k}) \tag{2.36}$$

应该指出，方程(2.34)与卡普兰和齐托维奇给出的方程[6]〔公式(5.32)〕是有差别的。

基于(2.34)方程的分析，我们研究了硬X射线经强等离子体湍动散射而发生的谱变，结果是很有趣的[7]：

(1) 湍动散射确实改变了辐射谱特征；

(2) 活动区结构类似于多方过程所控制的大气结构，多方指数σ值范围是1.167—1.5。

3 弱非均匀介质中波的传输方程

在天体物理条件下，通常可认为等离子体是一种弱非均匀的介质。所谓弱非均匀性是指介质的特征参量(例如密度n，温度T等)随距离缓慢地变化。当所研究的波的波长远小于介质非均匀标高H_{sh}(即经过这个距离，介质参量改变e倍)时，即

$$\lambda\ll H_{sh} \tag{2.37}$$

成立时，就说对这种波，介质是弱非均匀的。条件(2.37)也称之为几何光学或短波长近似。

在短波长近似下，熟知的射线方程

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\partial\omega^\sigma/\partial\boldsymbol{k} \tag{2.38a}$$

$$\dot{\boldsymbol{k}}=-\partial\omega^\sigma/\partial\boldsymbol{r} \tag{2.38b}$$

成立，它们的推导可见[4]、[5]。由上两式，

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\partial\omega^\sigma}{\partial t}+\frac{\partial\omega^\sigma}{\partial\boldsymbol{r}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}+\frac{\partial\omega^\sigma}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\dot{\boldsymbol{k}}=\frac{\partial\omega^\sigma}{\partial t}$$

在稳定的介质情况下$\left(\dfrac{\partial\omega^\sigma}{\partial t}=0\right)$，

$$\omega=\omega^\sigma=\text{const} \tag{2.39}$$

现在来研究弱非均匀性介质中波的传输方程。在(2.29)式

$$\frac{dN_k^\sigma}{dt}=\gamma_k^\sigma N_k^\sigma \tag{2.40}$$

中，γ_k^σ(见(2.20))通常表示介质的吸收。由于介质的非均匀性，时间的全导数可展为

$$\frac{dN_k^\sigma}{dt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}+\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right)N_k^\sigma$$

把(2.38)代入，

$$\frac{dN_k^\sigma}{dt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}_g{}^\sigma\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{\partial\omega^\sigma}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right)N_k^\sigma=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}_g{}^\sigma\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)N_k^\sigma+N_k^\sigma(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_g{}^\sigma)$$
$$-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\cdot\left[N_k^\sigma\frac{\partial\omega^\sigma}{\partial \boldsymbol{r}}\right],$$

因此有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}_g{}^\sigma\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)N_k^\sigma+(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_g{}^\sigma)N_k^\sigma-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\cdot\left[N_k^\sigma\frac{\partial\omega^\sigma}{\partial \boldsymbol{r}}\right]=\gamma_k^\sigma N_k^\sigma \tag{2.41}$$

考虑一个窄波包的情况：它的中心频率和波矢量分别是$\omega^\sigma(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k}$；在频宽和波数宽度($\Delta\omega\ll\omega^\sigma(\boldsymbol{k})$，$|\Delta\boldsymbol{k}|\ll|\boldsymbol{k}|$)内，波强度才显著异于零。于是，用$w_k^\sigma$代替$N_k^\sigma$($N_k^\sigma=w_k^\sigma(2\pi)^3/\hbar\omega^\sigma(\boldsymbol{k})$)，然后用$d\boldsymbol{k}$乘(2.41)两边，并积分，考虑到

$$\int\frac{w_k^\sigma d\boldsymbol{k}}{\omega^\sigma(\boldsymbol{k})}\approx\frac{1}{\omega^\sigma(\boldsymbol{k})}\int w_k^\sigma d\boldsymbol{k}=\frac{w^\sigma}{\omega^\sigma(\boldsymbol{k})}$$

以及

$$\int\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\left[N_k^\sigma\frac{\partial\omega^\sigma}{\partial \boldsymbol{r}}\right]d\boldsymbol{k}\sim\frac{\partial\omega^\sigma}{\partial \boldsymbol{r}}N_k^\sigma\Big|_\Sigma=0$$

上边第一式是窄波包条件的结果；第二式表示在波包范围之外（包括“表面”Σ）强度为0，$N_k^\sigma|_\Sigma=0$。因此(2.41)就变为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}_g^\sigma\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\right)\left(\frac{w^\sigma}{\omega^\sigma}\right)+(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_g{}^\sigma)\left(\frac{w^\sigma}{\omega^\sigma}\right)=\gamma_k^\sigma\left(\frac{w^\sigma}{\omega^\sigma}\right) \tag{2.42}$$

上式右边也作了窄波包近似。由于(2.40)是一般的，它不仅限于等离子体波的情况，因而(2.42)也是一般的波动系传输的方程。在介质是透明的情况下，(2.42)右边项可略去，这时

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{w^\sigma}{\omega^\sigma}\right)+\nabla\cdot\left(\boldsymbol{v}_g{}^\sigma\frac{w^\sigma}{\omega^\sigma}\right)=0 \tag{2.43}$$

我们知道，粒子系的动力学方程可以从它们的Lagrangian变分

$$\delta s=\delta\int L(q,\dot{q},t)dt=0$$

得到。对波动系有没有类似情况？1965年物理学家Whitham以原理的形式提出了如下命题：对一个缓变波系应该满足对应的变分原理[8]

$$\delta\int L\left(a,-\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{r}}\right)d\boldsymbol{r}dt=0$$

其L是波系的平均Lagrangian密度。从它出发，对振幅a变分就得到色散方程；对ψ变分则得到(2.43)。这方面的详细计算也请参见[9]。在他们的文章中还援引了不少满足(2.43)方程的

例子：非均匀流中的重力表面波，非均匀介质中传播的声波，剪切流中传播的内波，阿尔文波及磁声波，引力波及引力场中的电磁波以及还有星系密度波等等。嗣后，1977年Jacques[10]认为在耗散介质情况下，应该采用(2.42)，他用$\Gamma(\boldsymbol{k},\rho,T)$代替$\gamma_k^g$，但对$\Gamma(\boldsymbol{k},\rho,T)$的寻求却未置一词。

笔者认为，Whitham提出的方程(2.43)并不是新的原理的产物，它不过是波动物理中一个极为简单的结果。从上面笔者的推导可见，它的导出不需要任何新的假设乃至于新的原理。

4 湍动加速、有质动力和磁dynamo

现代天体物理的分析表明，在宇宙天体活动区和宇宙线中，快速荷电粒子的能谱分布可用下式描述：

$$f_\varepsilon \propto \varepsilon^{-\gamma} \tag{2.44}$$

其中$\gamma \approx 2.7$—3.2。众所周知电场能加速粒子；但因宇宙等离子体具有高的电导率，能加速的电场容易迅速地“中和”，而且这种加速只产生平谱，对(2.44)没有贡献。在强湍动部分，我们将研究包含电场的一个稳定结构——double layer。此外，引力对产生各向同性的快粒子效应不重要，因为在粒子下落时它得到加速，但在逃逸时它又被减速。这样一来，随机加速就成了一种非常可能的加速机制。

1949年费米首先用随机加速来解释宇宙线快粒子的形成[11]，然而，用它来解释快粒子谱(2.44)却遇到了困难。事实上，扩散方程(2.30)可化为[5]

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{d\varepsilon}{dt} f_\varepsilon\right) \tag{2.45}$$

假定加速特征时间为τ，且f_ε取(2.44)形式，则把费米加速率

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{4u^2v}{Lc^2}\varepsilon \tag{2.46}$$

(v—粒子速度，u—随机磁云速度，L—两磁云间的距离，ε—粒子能量)代入，则得到

$$f_\varepsilon/\tau = \frac{1}{\varepsilon}\ \frac{d\varepsilon}{dt}\gamma f_\varepsilon - f_\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right) = \beta\gamma f_\varepsilon - \beta f_\varepsilon$$

因而

$$\gamma = 1 + 1/\beta\tau$$

其中

$$\beta \equiv 4u^2v/Lc^2$$

β和τ两个参量可以在很宽的间隔内变化，以致于γ也在很宽的范围内取值。这与观测值γ位于甚窄范围相冲突。

然而，在宇宙条件下，粒子和湍动激元的“碰撞”常常比与磁云“碰撞”更为有效。代替两磁云间距L的是湍动等离激元的特征波长。由于$\lambda \ll L$，从(2.46)可看出，这种湍动加速比费米加速有效得多。必须指出，这里所说的粒子加速是指等离子体中少量快粒子与湍动场“碰撞”而获得能量。从热力学观点看，这种“碰撞”结果会使粒子趋向于具有它们两者的平均能量；因为整个湍动场平均能量比少量快粒子平均能量大得多，因而一般说来，这种“碰撞”使粒子获得能量，即使粒子加速。

对于各向同性的湍动场，扩散系数可写为

$$D_{ij}(\boldsymbol{p})=D_p{}^l\frac{p_ip_j}{p^2}+D_p{}^t\left(\delta_{ij}-\frac{p_ip_j}{p^2}\right) \tag{2.47}$$

纵扩散系数$D_p{}^l$仅对粒子的动量大小，即对粒子的能量变化有贡献；而横扩散系数$D_p{}^t$只引起粒子动量方向的变化。在粒子得到加速之前，粒子首先由于$D_p{}^t$的作用而快速各向同性化，这时$D_p{}^t$作用消失，式(2.30)就变为

$$\frac{df_p}{dt}=\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left\{p^2D_p{}^l\frac{\partial f_p}{\partial p}\right\} \tag{2.48}$$

在多粒子系统中，任何量的平均值为

$$\langle L\rangle=\int Lf_p\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}\bigg/\int f_p\frac{d\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3}$$

于是，由(2.30)及(2.47)式得到

$$\frac{d}{dt}\langle\varepsilon\rangle=\left\langle\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}(p^2vD_p{}^l)\right\rangle \tag{2.49}$$

定义加速系数为

$$\dot{\varepsilon}=\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}(p^2vD_p{}^l) \tag{2.50}$$

对于非相对论粒子，上式变为

$$\dot{\varepsilon}=\frac{2}{m\sqrt{\varepsilon}}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\varepsilon^{3/2}D^l(\varepsilon)) \tag{2.51}$$

在费米加速情况下，它对应的纵扩散系数$D^l=\frac{2u^2}{3Lc^2}p\varepsilon$[12]，把它代入(2.51)，即得到(2.46)。

因此，湍动加速问题主要在于计算纵扩散系数$D_p{}^l$。对于朗缪尔湍动加速，可得

$$\dot{\varepsilon}=\frac{2\pi^2e^2}{mv}w_k{}^l\bigg|_{k=\omega_{pe}/v} \tag{2.52}$$

在相对论性粒子速度情况下，应代之以下式：

$$\dot{\varepsilon}=\frac{4\pi^2e^2}{\varepsilon c}\omega_{pe}^2\int_{\omega_{pe}/c}^{k_1}\frac{dk}{k^3}w_k{}^l \tag{2.53}$$

积分上限k_1为朗缪尔波湍动的极大波数。对离子声湍动而言($\omega^s=kv_s$)，

$$\begin{cases}D_p{}^s=\dfrac{2\pi^2e^2}{\omega_{pi}^2v^3}v_s{}^4\displaystyle\int_0^{d_e^{-1}}kw_k{}^sdk, & v>v_s\\ D_p{}^s=0, & v<v_s\end{cases} \tag{2.54}$$

这些方面的详细计算可参见[5]，[1]，[4]。对同步加速辐射而言，它对相对论粒子产生的加速率，笔者算得为[5]

$$\dot{\varepsilon}=\left[3^{1/6}\pi e^2c^2 2(m_ec^2)^{2/3}\ \omega_{He}^{2/3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}\times\int_0^{\infty}\frac{W_\omega{}^t}{\omega^{5/3}}d\omega\ \right]\frac{2}{\varepsilon^{5/3}} \quad (2.55)$$

其中积分上限取为∞是假定$W_\omega{}^t$为ω的陡降函数，否则应取同步加速辐射极大频率ω_c。

在计及自发项(即粒子能量损失项)情况下，对各向同性分布的粒子,可以把扩散方程(2.27)化为

$$\frac{df_\varepsilon}{dt}=-\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[\dot{\varepsilon}f_\varepsilon]+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(\dot{\varepsilon}_{loss}f_\varepsilon) \quad (2.56)$$

上式已略去了脉动加速项，它一般是很小的。而$\dot{\varepsilon}$由(2.50)确定，$\dot{\varepsilon}_{loss}$表因自发辐射导致的能量损失率：

$$\dot{\varepsilon}_{loss}=\int(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})\,\hbar w_p^{\sigma}(\boldsymbol{k})\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \quad (2.57)$$

当我们知道了各种具体情况下的加速率以及能量损失率$\dot{\varepsilon}_{loss}$,那么就可以通过方程(2.56)求出一种稳定的分布函数$df_\varepsilon/dt=0$，这种解对天体物理来说，具有非常重要的意义。这也是宇宙线物理学中的主要课题。有关湍动加速在天体物理中的应用,以及自洽求解稳定的分布函数,同时对这一章节所论述的各种过程所产生的电磁辐射等等,在〔6〕中都有不少的论述，在这里就不用赘述。

我们已经说过，横扩散系数$D_p{}^t$描述了弹性碰撞部分,由此可以引入粒子与湍动场的等效碰撞频率[3]

$$\nu_{eff}=D_p{}^t/p^2 \quad (2.58)$$

在非相对论情况下，粒子与朗缪尔湍动碰撞的等效碰频为

$$\nu_{eff}\approx\frac{\pi}{4}\omega_{pe}\frac{v_\varphi{}^l}{v}\ \frac{w^l}{nm_ev^2} \quad (2.59)$$

为了比较，我们把周知的库仑碰撞频率写为

$$\nu^{coul}\approx\frac{\pi}{4}\omega_{pe}\frac{3v_{Te}}{v}\ \frac{w_T{}^l}{nm_ev^2}L_c \quad (2.60)$$

其中L_c为库仑对数，约为10的量级。因此,在我们对发展了的湍动感兴趣的情况下，$w^l\gg w_T{}^l$($v_\varphi{}^l$总是大于$3v_{Te}$,否则朗缪尔波就要受到强朗道阻尼)，就有$\nu_{eff}>\nu^{coul}$。在这种情况下，湍动场与荷电粒子高频率地碰撞，就使粒子迅速地穿透磁场，引起磁场耗散。

因此，激发起来的湍动在加速粒子的同时，又可以通过与粒子的碰撞而引起磁场耗散。这两种表面上无关的效应都来自同一湍动场与荷电粒子之间的相互作用。在色球耀斑中，这两种效应都被观测到了[3]。

在等离子体天体物理中,还有一个重要课题,就是有质动力问题[13],[14]，即波所产生的应力问题。对于波包形的湍动场，我们用朗道的平面层方法，求得如下动量方程[15]

$$\rho\frac{DU}{Dt}=-\nabla\left(p+\frac{B^2}{8\pi}\right)+\nabla\cdot\frac{BB}{4\pi}-\nabla\cdot\overset{\rightrightarrows}{p_w}+F \tag{2.61}$$

其中$F_p=-\nabla\cdot\overset{\rightrightarrows}{p_w}$为波的有质动力。文中对六种波模求出了它们的表达式。方程(2.61)和传输方程(2.42)以及连续性方程、能量方程、状态方程组成封闭方程组：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho U)=0 \tag{2.62}$$

$$\rho\frac{DU}{Dt}=-\nabla\left(p+\frac{B^2}{8\pi}\right)+\nabla\cdot\frac{BB}{4\eta}-\nabla\cdot\vec{p}_w+F \tag{2.61}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho U^2+\frac{p}{\gamma-1}+\frac{B^2}{8\pi}+w\right)+\nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho U^2+\frac{\gamma_p}{\gamma-1}\right)U-\frac{(U\times B)}{4\pi}\times B\right.$$
$$\left.+w\,(U+v_{go})+U\cdot\overset{\rightrightarrows}{p_w}+G_1\right]=0 \tag{2.63}$$

$$p=p(\rho,T) \tag{2.64}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{w^\sigma}{\omega^{\sigma\prime}}\right)+\nabla\cdot\left(v_g^\sigma\frac{w^\sigma}{\omega^{\sigma\prime}}\right)=\gamma^\sigma\frac{w^\sigma}{\omega^{\sigma\prime}} \tag{2.42}$$

其中，$F=\rho g$——引力(或其它外力)，G表其它形式的能流；$\omega^{\sigma\prime}$表与U共动坐标中的频率，而$\vec{p}_w$只是w的函数。利用这一组方程，我们研究了光斑加热[15]、太阳风加速[16]和日冕加热[17]，得到的结果和观测相吻合。

自生磁场也是等离子体天体物理一个非常诱人的课题。在弱湍框架下，我们得到了等离激元的dynamo方程，求出了自生的poloidal场的表达式[18]。在强湍动那一部分，我们会得到有趣的新结果。

在这一部分末尾，我们想提及磁单极子问题。我们利用等离子体中的格林函数方法计算了磁单极子自发辐射和“电离”损失[19]。研究表明，在部分电离等离子体中，运动的磁单极子自发辐射的功率为(g为磁荷，$n(\omega)$—折射率)

$$p=\frac{g^2v}{c^2}\int_{v>\frac{c}{n(\omega)}}d\omega\;\omega\;n^2(\omega)\left(1-\frac{e^2}{v^2n^2(\omega)}\right) \tag{2.65}$$

它与荷电粒子的Tamm-Frank公式

$$p=\frac{e^2v}{c^2}\int_{v>c/n(\omega)}d\omega\;\omega\left(1-\frac{c^2}{v^2n^2(\omega)}\right) \tag{2.66}$$

相比，有质和量上的不同。这也许可以用于鉴别是否是磁单极子或重荷电粒子。同时，推导得到磁单极子的“电离”损失，它为

$$\frac{d\varepsilon}{dx}\approx10^{-24}n_e/T_e^{\frac{1}{2}}\qquad(\text{c.g.s.}) \tag{2.67}$$

由此，其能量损失的特征距离为

$$l_c\sim\tfrac{1}{2}Mv^2/d\varepsilon/dx\approx4\times10^{30}T_e^{\frac{1}{2}}/n_e\qquad(\text{c.g.s.}) \tag{2.68}$$

于是得到结论：象脉冲星这样的致密天体，应该较多地俘获宇宙中的磁单极子。

三、等离子体天体物理中的强湍动

在弱湍动理论中，朗缪尔波在荷电粒子上的感应散射

$$l+e \rightleftarrows l'+e',\quad l+i \rightleftarrows l'+i'$$

是一种非常重要的相互作用。在这个过程中，如果荷电粒子的分布是平衡分布，那么荷电粒子可能获得能量，或换言之，被加热。同时散射过程使朗缪尔波频率降低。这就是说，由热粒子引起的感应散射，使湍动波的能量沿小波数区转移，形成所谓朗缪尔波在 k 空间上的凝聚。

对于恒定的波源，由于朗缪尔波凝聚，在 k 空间上某点邻域，湍动波能量随时间不断增长，这在物理上是不能接受的。因而在弱湍动理论框架下，就导致出现朗缪尔波凝聚佯谬。实际上，在凝聚过程中，由于波能量的不断积累，湍动不再是弱的了，弱湍动理论的外推失效，代之而来的是一种很不同于弱湍动的物理图象。在此情况下会出现一种新的长波不稳定性，通常称之为调制不稳定 (modulational instability)。由调制不稳定性所控制的湍动就称之为强湍动。

当朗缪尔波能量变得越来越大时，它所产生的有质动力(§2.4)就显得很重要。平衡时，它与等离子体热压力相抗衡(无外磁场情况下)。如果发生一种使等离子体密度局部稀化的扰动，那么热压降低，同时朗缪尔波频率也降低：$\omega^l \approx \omega_{pe} \sim \sqrt{n_e}$，由(2.38b)

$$d\boldsymbol{k}/dt = -\operatorname{grad}\omega^l \approx -\operatorname{grad}\omega_{pe},$$

即朗缪尔波朝着 $(-\operatorname{grad}\omega_{pe})$ 方向折射因而进入此局部区域，故密度稀化区捕获了更强的朗缪尔波，波的有质动力与热压力不平衡，使等离子体更迅速地从此局部区域排出，引起密度进一步稀化。显然，这里就开始出现不稳定性。本节在引入控制强湍动的非线性方程之后，我们将对这种调制不稳定作定量的描述，接着论述它们在等离子体天体物理中的效应。

1. 强朗缪尔湍动的 Zakharov 方程

我们知道，在 1948 年 Burgers 提出如下方程

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}-\nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$$

来描述强湍流的运动，就定性的描写来说，这个方程确实较好地取代了极为复杂的 Navier-Stokes方程。在等离子体物理领域内，类似地人们也一直想寻找强湍动激元的非线性控制方程。直到 1972 年，这种方程果然由 Zakharov 找到了[20]，通常被称之为 Zakharov 方程。

从双流等离子体方程出发，

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_e}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_e\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_e=\left(\frac{e}{m_e}\right)\boldsymbol{E}+(e/m_e c)(\boldsymbol{v}_e\times\boldsymbol{B})-\frac{\gamma_e T_e}{m_e n_e}\nabla n_e \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_i\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_i=\left(\frac{e_i}{m_i}\right)\boldsymbol{E}+\frac{e_i}{m_i c}(\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B})-\frac{\gamma_i T_i}{m_i n_i}\nabla n_i \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t}+\operatorname{div}(n_e\boldsymbol{v}_e)=0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t}+\operatorname{div}(n_i\boldsymbol{v}_i)=0 \tag{3.4}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\ \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3.5}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B}=\frac{1}{c}\ \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}(en_e\boldsymbol{v}_e+e_in_i\boldsymbol{v}_i) \tag{3.6}$$

(其中 γ_e,γ_i 分别为电子、离子的比热比，其它符号有通常的意义)，我们可以明显区别两种时标：慢时标 $t_s\sim\omega_{pi}^{-1}$ 和快时标 $t_f\sim\omega_{pe}^{-1}$。电磁场与双流等离子体的相互作用，使与易流动的电子有关的场量(密度、速度)会出现两种时标的成分；而对大惯性离子，则一般只有慢时标成分。至于电磁场，为简单起见只假定磁场 $\boldsymbol{B}$ 仅有快时标成分(暗指外磁场 $\boldsymbol{B}_0=0$)，但电场却有两种时标成分。另一方面，我们感兴趣的只是在慢时标尺度上发展起来的不稳定性，自然认为在此尺度上平均后，快时标场量为零。在这种意义上，我们可以把快时标量看成为湍动量：它的相移特征时标 $\tau\sim t_f\ll t_s\sim t_0$，满足随机相近似(一、)。因此，我们有

$$n_i=n_{i,s},\ n_e=n_{e,s}+n_f{}^T,\ \boldsymbol{v}_e=\boldsymbol{v}_{e,s}+\boldsymbol{v}_{e,f}^T,\ \boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{v}_{i,s}\qquad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_s+\boldsymbol{E}_f{}^T,\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_f{}^T$$

并且对所有快时标量，$\langle A_f\rangle=0$，平均符号 $\langle\ \rangle$ 表示对慢时标(或随机相)而言的一种平均。同时，在慢时标尺度上，认为准中性条件满足

$$\langle n_ie_i+en_e\rangle=0 \tag{3.7}$$

对氢等离子体，它导致

$$n_{i,s}=n_{e,s}\equiv n_s \tag{3.8}$$

并且，我们仅对如下条件的等离子体运动感兴趣：

$$\boldsymbol{v}_{i,s}\approx\boldsymbol{v}_{e,s}\equiv\boldsymbol{v}_s \tag{3.9}$$

在这种情况下，只要满足如下条件

$$k<k_d,\quad \overline{w}_f\left(\sim\frac{1}{n_eT_e}\ \frac{E_f{}^2}{4\pi}\right)<1 \tag{3.10a}$$

$$\overline{w}_s\left(\sim-\frac{1}{n_eT_e}\ \frac{E_s{}^2}{4\pi}\right)<\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\ \equiv\mu^{\frac{1}{2}}, \tag{3.10b}$$

我们就容易得到[5]

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_s}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_s\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_s=\frac{e}{m_e}\ \boldsymbol{E}_s-\frac{\gamma_eT_e}{m_en_s}\nabla n_s-\frac{e^2}{4m_e{}^2\omega^2}\nabla\left|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right|^2 \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_s}{\partial t}+(\boldsymbol{v}_s\cdot\nabla)\boldsymbol{v}_s=-\frac{\gamma_eT_e+\gamma_iT_i}{m_e+m_i}\ \frac{\nabla n_s}{n_s}-\frac{e^2}{4m_e(m_i+m_e)\omega^2}\nabla\left|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right|^2 \tag{3.12}$$

以及

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}_f{}^T}{\partial t}\approx\frac{e}{m_e}\ \boldsymbol{E}_f{}^T-\frac{\gamma_eT_e}{4\pi en_sm_e}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_f{}^T) \tag{3.13}$$

其中 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 为高频(ω)场的时空包络：

$$\boldsymbol{E}_f{}^T=\frac{1}{2}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)e^{i\omega t}+\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)e^{-i\omega t}], \tag{3.14}$$

并且$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$是时空坐标的缓变函数。(3.11)式表示高频场对电子运动的影响，而(3.12)则表示离子运动方程。这种高频场对电子的作用力

$$\boldsymbol{f}_E=-\frac{e^2}{4m_e\omega^2}\nabla|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|^2 \tag{3.15}$$

常被称之为Miller力或有质动力。

由麦氏方程(3.6)，

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}_f{}^T=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}_f{}^T}{\partial t}+\frac{4\pi e}{c}(n_s\boldsymbol{v}_f{}^T+n_f{}^T\boldsymbol{v}_s+n_f{}^T\boldsymbol{v}_f{}^T-\langle n_f{}^T\boldsymbol{v}_f{}^T\rangle)$$

在满足条件(3.10a,b)情况下，右边括号中后三项可以略去，就有

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}_f{}^T\approx\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}_f{}^T}{\partial t}+\frac{4\pi e}{c}n_s\boldsymbol{v}_f{}^T$$

上式与(3.5)式快时标成分联合，得到〔并考虑到(3.13)〕

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_f{}^T}{\partial t^2}+c^2\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_f{}^T+\frac{4\pi e^2}{m_e}n_s\boldsymbol{E}_f{}^T-\gamma_e v_{Te}^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_f{}^T)=0 \tag{3.16}$$

对纵波模，从上式易得线性色散律$\omega^2=\omega_{pe}^2+\gamma_e k^2v_{Te}^2$，与已知朗缪尔波色散律相比，可知$\gamma_e=3$。现在令

$$n_s=n_0+\delta n_s \tag{3.17}$$

并把(3.16)变为时空包络$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$方程，在略去$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$的二次时间导数之后，得到($\omega\approx\omega_{pe}$)

$$2i\omega_{pe}\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r},t)+c^2\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)-3v_{Te}^2\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t))+\frac{\delta n_s}{n_0}\omega_{pe}^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{3.18}$$

再由(3.4)和(3.12)联合，略去相应于δn_s，$\boldsymbol{v}_s$而言的二阶项，易得[5]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\delta n_s}{n_0}\right)-c_s{}^2\nabla^2\left(\frac{\delta n_s}{n_0}\right)=\nabla^2\frac{|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|^2}{16\pi n_0m_i} \tag{3.19}$$

其中，在$T_e>T_i$时，$c_s{}^2\approx\frac{T_e}{m_e}$。方程(3.18)和(3.19)就是我们所推求的Zakharov方程。

应该指出，在Zakharov本人的论文中[20]，推导过程非常简略，几乎是直接给出结果，推求过程所采用的近似条件，不易看出；而在Thornhill等人的论文中[21]，在推求(3.18)、(3.19)过程中，有的地方交待不清楚〔例如他们的(2.12)式中，似乎少了同量级的一项($-e\boldsymbol{v}_s\delta n_f$)〕。

引入如下变换

$$\frac{2}{3}\mu^{\frac{1}{2}}\frac{\boldsymbol{r}}{\lambda_d}\longrightarrow\vec{\xi},\quad\frac{2}{3}\mu\omega_{pe}t\longrightarrow\tau,\quad\frac{\sqrt{3}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{8(\mu T_e\pi n_0)^{\frac{1}{2}}}\longrightarrow|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$

$$\frac{3}{4u}\frac{\delta n_s}{n_0}\longrightarrow n,\quad\alpha=\frac{c^2}{3v_{Te}},\quad\mu=m_e/m_i \tag{3.20}$$

(3.18)、(3.19)就化成如下无量纲方程

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}n-\nabla^2 n=\nabla^2|\boldsymbol{E}|^2 \tag{3.21}$$

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}\boldsymbol{E}+\alpha[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})]-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})+n\boldsymbol{E}=0 \tag{3.22}$$

2 守恒律、正“反”Soliton 和 Caviton

Zakharov 方程(3.21)、(3.22)具有许多有趣结果。我们从它们对应的拉氏密度

$$L=\frac{i}{2}[\boldsymbol{E}_\tau^*\cdot\boldsymbol{E})-(\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}_\tau)]-\alpha[(\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E}^*)]-(\nabla\cdot\boldsymbol{E})(\nabla\cdot\boldsymbol{E}^*)$$

$$+\frac{1}{2}[u_\tau-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*)]^2-\frac{1}{2}(\nabla u)(\nabla u) \tag{3.23}$$

出发(其中 u 满足 $n_\tau=\nabla^2 u$)，可以得到四个守恒量，即方程(3.21)、(3.22)的四个运动积分，它们分别是总“粒子”数、总能量、总动量和总角动量：[22]

$$N=\int|\boldsymbol{E}|^2 d\vec{\xi} \tag{3.24}$$

$$\varepsilon=\int\left[\alpha(\nabla\times\boldsymbol{E}^*)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})+|\nabla\cdot\boldsymbol{E}|^2+n|\boldsymbol{E}|^2+\frac{n^2}{2}+\frac{1}{2}(\nabla u)^2\right]d\vec{\xi} \tag{3.25}$$

$$\boldsymbol{p}=\int\left[-\frac{i}{2}(\boldsymbol{E}\nabla\cdot\boldsymbol{E}^*-\boldsymbol{E}^*\nabla\cdot\boldsymbol{E})-n\nabla u\right]d\vec{\xi}\equiv\int d\vec{\xi}\boldsymbol{P} \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{M}=\int d\vec{\xi}\{(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{P})+i(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}^*)\} \tag{3.27}$$

拉氏密度对于第一类规范变换具有不变性导致(3.24)守恒；对于时—空坐标平移的不变性导致(3.25)和(3.26)守恒；对于空间旋转具有不变性就导致(3.27)。非常有趣的是，(3.27)右边括号内第二项表示场自旋密度。

基于这些守恒律，我们便可以研究 Zakharov 方程所描述的非线性实体的一般运动。研究表明，$\varepsilon<0$ 的球对称运动将导致坍缩。由于坍缩，非线性实体内积聚的场变得很大，它不断地把等离子体粒子排出体外，形成一个中空的腔体，有时常把这种三维非线性实体称为 Caviton。利用标度变换也可证明[21]，Caviton 的坍缩与运动的球对称性无关。当然,所说的坍缩是有限制的。当坍缩时场强增大，但不能超过条件(3.10)所限定的值；另一方面，坍缩引起的密度稀化不能超过临界值 $|n_{cr}|=4\mu/3$，它对应 $|\delta n_s/n_0|=1$；其次坍缩也只能限定在亚声速运动阶段；最后，在坍缩的某个阶段，朗道阻尼应该变得重要，它就可能改变坍缩的图象。守恒律的推导及所述问题的详细讨论，亦也参见[5]。

然而，在一维情况下，图象大为不同，一维非线性实体是稳定的，它的能量定域在很小的空间范围内——所谓 Soliton。事实上，我们可以寻求一维 Zakharov 方程的行波解。假定等离子体密度扰动 n 以恒定速度u传播：$n=n(\xi-u\tau)$则由一维的(3.21)得

$$n=-\frac{1}{1-u^2}|E|^2 \tag{3.28}$$

把它代入一维的(3.22)(这时旋度项消失)，并令

$$\xi=\sqrt{2}\zeta,\quad \beta=\frac{1}{1-u^2} \tag{3.29}$$

获得如下非线性 Schrödinger 方程

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}\mathscr{E} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{E} - \beta|\mathscr{E}|^2\mathscr{E} \tag{3.30}$$

实际上可以把它看成是“准粒子”的 Schrödinger 方程：波函数为 $\mathscr{E}$，“准粒子”的自生势为 $\beta|\mathscr{E}|^2$。如果 $\beta>0$(即 $u<1$，亚声速运动)，则这种自生势具有与引力势一样的性质：它捕获准粒子(所谓自捕获)以形成一种稳定结构——soliton。不难用通常的积分方法，在没有给定初值分布情况下，求得(3.30)的解为[23]

$$\mathscr{E}(\xi,\tau) = \mathscr{E}_0\mathrm{sech}\left[\frac{\xi-u\tau}{\sqrt{2(1-u^2)}}\mathscr{E}_0\right]e^{i\phi} \tag{3.31}$$

$$n = -\frac{1}{1-u^2}\mathscr{E}_0^2\mathrm{sech}^2\left[\frac{\xi-u\tau}{\sqrt{2(1-u^2)}}\mathscr{E}_0\right] \tag{3.32}$$

$$\phi = \left[\frac{\mathscr{E}_0^2}{2(1-u^2)} - \frac{u^2}{4}\right]\tau + \frac{u}{2}\xi + \phi_0 \tag{3.33}$$

$$u<1 \quad (\beta>0) \tag{3.34}$$

而对于 $\beta<0$ ($u>1$，超声运动)的反 soliton 结构是：

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0[1-a^2\mathrm{sech}^2\sqrt{|\beta|/2}\,a\,\mathscr{E}_0(\xi-u\tau)]^{\frac{1}{2}}e^{i\Phi} \tag{3.35}$$

$$n = \frac{1}{u^2-1}\mathscr{E}_0^2\,[1-a^2\mathrm{sech}^2\sqrt{|\beta|/2}\,a\,\mathscr{E}_0(\xi-u\tau)] \tag{3.36}$$

$$u>1 \quad (\beta<0),\ \Phi = \phi_1 + \frac{u}{2}\left(\xi - \frac{u}{2}\tau\right),\ a^2\leqslant 1 \tag{3.37}$$

从上面可以看到，soliton 及反 soliton 的半宽分别为

$$d = \sqrt{2(1-u^2)}\,/\,\mathscr{E}_0, \tag{3.38}$$

$$d_{anti} = \sqrt{2(u^2-1)}\,/a\,\mathscr{E}_0 \tag{3.39}$$

两种 soliton 的运动速度 u 都是独立参数，这与非线性 Schrödinger 方程的性质有关：它在 Galilean变换下不变。这个结果很有趣：波包 soliton 的速度可在很宽的范围内取值，它作为“准粒子”，是非常合适的。对反 soliton，还有另外一个独立参数，即调制深度 a；在 $a=1$ 时，(3.35)及(3.36)取波包激波解的结构：

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\tanh[\sqrt{|\beta|/2}\,\mathscr{E}_0(\xi-u\tau)]e^{i\Phi} \tag{3.40}$$

$$n = \frac{1}{u^2-1}\mathscr{E}_0^2\tanh^2[\sqrt{|\beta|/2}\,\mathscr{E}_0(\xi-u\tau)] \tag{3.41}$$

(3.37) 中的 ϕ_1 在 $a=1$ 为 $\phi_1 = \frac{\mathscr{E}_0^2}{u^2-1}\tau + \phi_0$

把一维解代入(3.24)—(3.26)，得到相应的守恒量：

$$N = 2m \tag{3.42}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{5u^2-1}{6(1-u^2)^3}m^3, \tag{3.43}$$

$$p=mu+\frac{2u}{3(1-u^2)^3}m^3, \tag{3.44}$$

其中

$$m\equiv|E_0\sqrt{2(1-u^2)} \tag{3.45}$$

从上面可知，非线性 Schrödinger (NS) soliton 的总能量、总动量包括线性($\propto m$) 和非线性部分，而往往非线性部分是重要的(由于 $|E_0\gg1$)。

3 调制不稳定性

现在把 Zakharov 方程写成通常采用的形式，它不过是(3.21)、(3.22)的共轭方程(略去共轭符号，这当然无关紧要)：

$$i\frac{\partial|\boldsymbol{E}}{\partial\tau}-\alpha[\nabla\times(\nabla\times|\boldsymbol{E})]+\nabla(\nabla\cdot|\boldsymbol{E})-n|\boldsymbol{E}=0 \tag{3.46}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}n-\nabla^2n=\nabla^2(||\boldsymbol{E}|^2) \tag{3.47}$$

把场量分成

$$|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_{\rm I}+\delta\boldsymbol{E},n=n_{\rm I}+n_{\rm II} \tag{3.48}$$

考虑如下基态($\boldsymbol{E}_{\rm I},n_{\rm I}$)和扰动态($\delta\boldsymbol{E},n_{\rm II}$)：

$$\boldsymbol{E}_{\rm I}=\boldsymbol{E}_0\exp[i(\boldsymbol{k}_0\cdot\vec{\xi})-i\omega_0\tau],\omega_0=k_0^2,\quad \boldsymbol{k}_0\,/\!/\,\boldsymbol{E}_0,n_{\rm I}=0; \tag{3.49}$$

$$\delta\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_1\exp[i\boldsymbol{k}_1\cdot\vec{\xi}-i\omega_1\tau],\omega_1=\boldsymbol{k}_1^2,\boldsymbol{k}_1\,/\!/\,\boldsymbol{E}_1,n_{\rm II}=n\cos(\boldsymbol{K}\cdot\vec{\xi}-\Omega\tau),K=\Omega \tag{3.50}$$

并且要求

$$\boldsymbol{k}_0=\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{K},\quad \omega_0=\omega_1+\Omega \tag{3.51}$$

明显地，我们研究的是泵波 l_0 (基态)衰变：

$$l_0\longrightarrow l_1+s$$

把(3.48)代入(3.46)、(3.47)，线性化后，把(3.49)、(3.50)再代入，并令满足共振条件 (3.51)的扰动电场振幅 $\boldsymbol{E}_1$ 为

$$\boldsymbol{E}_1=E_1^0e^{-i\omega\tau} \tag{3.52}$$

则得到如下三次方程：

$$\omega^3+2\Omega\omega^2+K^2|E_0|^2=0 \tag{3.53}$$

如果 $\Omega\gg|\omega|$，则可略去 ω^3 项，易得这时的极大增率($\gamma=Im\omega$)，在恢复量纲后为

$$\frac{\gamma_{\max}}{\omega_{pe}}=\frac{1}{8}\frac{\mu^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{2k_0}{k_d}-\frac{2}{3}\sqrt{\mu}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{|E_0|^2}{n_0T_e}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.54}$$

不稳定条件 $\Omega\gg|\omega|$ 成为

$$k_0/k_d\gg\frac{\overline{w}_0}{16\sqrt{\mu}} \tag{3.55}$$

其中 $\overline{w}_0=|\boldsymbol{E}_0|^2/8\pi n_eT_e$

在 $\Omega\ll|\omega|$ 时，类似可得

$$\gamma_{\max}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}\mu^{\frac{1}{3}}\left(\frac{k_0}{k_d}-\frac{1}{3}\sqrt{\mu}\right)^{\frac{2}{3}}\overline{w}_0^{\frac{1}{3}}\omega_{pe}, \tag{3.56}$$

不稳定条件 $|\omega|\gg\Omega$ 变为

$$k_0/k_d\ll\frac{1}{8\sqrt{\mu}}\overline{w}_0 \tag{3.57}$$

注意，由于衰变过程的能量动量守恒律，必须

$$k_0/k_d>\frac{1}{3}\sqrt{\mu} \tag{3.58}$$

(3.57)和(3.56)对应于离子声扰动几乎纯粹增长，而(3.55)和(3.54)则对应于离子声扰动仅略微被增率所调制，因为我们有

$$(iE_1)_\tau\propto n$$

当然，也可以研究包括纵、横在内的一般扰动，代替(3.50)的是

$$\delta\boldsymbol{E}=\{(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2)\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\vec{\xi}-\omega\tau)]+(\boldsymbol{E}^+{}_1+\boldsymbol{E}^+{}_2)\exp[-i(\boldsymbol{k}\cdot\vec{\xi}-\omega\tau)]\}$$
$$\exp[i(\boldsymbol{k}_0\cdot\vec{\xi}-\omega_0\tau)] \tag{3.59}$$

$$n_{\rm II}=n\cos(\boldsymbol{k}\cdot\vec{\xi}-\omega\tau) \tag{3.60}$$

其中 $\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_1{}^+$ 为纵扰动，而 $\boldsymbol{E}_2$，$\boldsymbol{E}_2{}^+$ 为横扰动：

$$\boldsymbol{e}_1\parallel\boldsymbol{k}_+,\ \ e_1{}^+\parallel\boldsymbol{k}_-;\ \ \boldsymbol{e}_2\perp\boldsymbol{k}_+,\ \ \boldsymbol{e}_2{}^+\perp\boldsymbol{k}_- \tag{3.61}$$

$$\boldsymbol{k}_\pm=\boldsymbol{k}\pm\boldsymbol{k}_0,\ \ \omega_\pm=\omega\pm\omega_0 \tag{3.62}$$

我们不难得到[21](详细推演参见[5])：

1．$\boldsymbol{k}\parallel\boldsymbol{k}_0$

i) $k_0\ll k<\sqrt{2}|\boldsymbol{E}_0|$，$|\boldsymbol{E}_0|^2<1$时，有($\gamma=Im\omega$)

$$\gamma_{\max}=|\boldsymbol{E}_0|^2,\ \ (k)_{\max}=|\boldsymbol{E}_0| \tag{3.63}$$

ii) $k_0\ll k<\sqrt{2}|\boldsymbol{E}_0|$，$|\boldsymbol{E}_0|^2\gg1$ 时，有

$$\gamma_{\max}=\sqrt{2}|\boldsymbol{E}_0|,\ \ (k)_{\max}=\sqrt{2}|\boldsymbol{E}_0|^{\frac{1}{2}} \tag{3.64}$$

i)、ii)两种情况对应于纯虚根：$\omega=i\gamma$；$(k)_{\max}$ 表示对应于 $\gamma_{\max}$ 的 k 值；情况i) 相应静态极限：$(|\omega|/k)_{\max}=|\boldsymbol{E}_0|\ll1$，情况ii)则相应流体力学极限：$(|\omega|/k)_{\max}=|\boldsymbol{E}_0|^{\frac{1}{2}}>1$。

2．$\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{k}_0$

iii) $|\boldsymbol{k}_0|\ll|\boldsymbol{k}|<\sqrt{2}|\boldsymbol{E}_0|$，$|\boldsymbol{E}_0|^2<1$时，

$$\gamma_{\max}=|\boldsymbol{E}_0|^2,\ \ (k)_{\max}=\frac{|\boldsymbol{E}_0|}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \tag{3.65}$$

iv) $|\boldsymbol{k}_0|\ll|\boldsymbol{k}|<\sqrt{2}|\boldsymbol{E}_0|$，$|\boldsymbol{E}_0|^2\gg1$，

$$\gamma_{\max}=\sqrt{2}(|\boldsymbol{E}_0|^2/\alpha)^{\frac{1}{2}},\ \ \ (k)_{\max}=\sqrt{2}(|\boldsymbol{E}_0|^2/\alpha^2)^{\frac{1}{4}} \tag{3.66}$$

两者也都是纯虚数情况：$\omega=i\gamma$。

必须指出，对于有宽度 ($\Delta\omega$，Δk) 的波色，为不使谱宽影响上述不稳定性的分析，要求

$$\Delta\omega\ll\gamma_{\max},\ \ \Delta k\ll(k)_{\max} \tag{3.67}$$

这时，在(3.63)第二式回到量纲单位之后，

$(k)_{max}=\sqrt{\frac{2}{3}}k_d\overline{w}^{\frac{1}{2}}$，由(3.67)第二式得

$$\overline{w}>(\Delta k/k_d)^2 \tag{3.68}$$

在宽谱情况下，$\Delta k\sim k_0$ ($w\sim w_{k_0}\Delta k\sim w_{k_0}k_0$)，(3.68)可作为调制不稳定的能阈。

应该指出，所研究的调制不稳定性(尤其是 ($|\boldsymbol{E}_0|^2>1$ 或 $\overline{w}>\mu$ 的情况)非常重要，因为其增率几乎超过所有周知过程衰减率(例如离子声阻尼、朗道阻尼、电子一离子碰撞阻尼、等离激元合成过程的减率，等等)的数值。

4. 强湍激元的 Karpman 方程

研究如下形式的调制波

$$\Phi=\psi(\boldsymbol{r},t)\exp[i(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}-\omega_0 t)]$$

其中 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 为时一空缓变函数，一般可表示为

$$\Phi=a(\boldsymbol{r},t)\exp[i\theta(\boldsymbol{r},t)]$$

总可选择 $\boldsymbol{k}_0$ 方向为 x 轴方向，这时函数 θ 为

$$\theta(\boldsymbol{r},t)=k_0x-\omega_0t+\varphi(\boldsymbol{r},t)$$

在短波长近似下，

$$-\theta_t\equiv\omega=\omega_0-\varphi_t,\quad \nabla\theta\equiv\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_0+\nabla\varphi \tag{3.69}$$

把 $\omega=\omega(\boldsymbol{k})=\omega(k)$ (它是调制波的线性色散律)在 k_0 附近展开：

$$\omega=\omega(k_0)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_0(k-k_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)_0(k-k_0)^2$$

考虑到(31.69)，上式为

$$\omega-\omega(k_0)=\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_0[\varphi_x+(\nabla_\perp\varphi)^2/2k_0]+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}\right)_0\varphi_x^2 \tag{3.70}$$

为得到非线性方程，必须以非线性色散 $\omega'(k,a)$ 代替上面的 $\omega(k)$：

$$\omega'(k,a)=\omega(k)+\alpha a^2=\omega(k)+\alpha|\psi|^2 \tag{3.71}$$

现在把 Φ 展开成傅氏积分，

$$\psi_{\omega',k}=\Phi_{\omega',k}e^{i[(k-k_0)r-(\omega'-\omega_0)t]}$$

以此乘(3.70)的两边并对 $d\omega'd\boldsymbol{k}$ 积分，注意到 $\omega'-\omega_0\longrightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$，$\nabla\varphi=(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)\longrightarrow -i\nabla$，并利用(3.71)，就得到时空包络 $\psi(\boldsymbol{r},t)$ 的非线性方程：

$$i\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}+v_g\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}v_g'\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{v_g}{k_0}\nabla_\perp^2\psi-\alpha|\psi|^2\psi=0 \tag{3.72}$$

其中

$$v_g=\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_{k=k_0},\quad v_g'=\left(\frac{\partial v_g}{\partial k}\right)_{k=k_0} \tag{3.73}$$

称(3.72)为 Karpman 方程，利用它可以研究各种模式的调制波振幅的时空变化[24]。

可以证明[5]，只要 $\alpha v_g'<0$ 或者 $\alpha<0$ 时，(3.72) 方程会出现长波扰动不稳定。在一维

情况下，$\nabla_\perp{}^2\psi=0$，(3.72)成为

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\beta|\psi|^2\psi=0 \tag{3.74}$$

是标准的非线性 Schrödinger 方程，其中

$$\beta=-\alpha/v_g{}',\quad \tau=\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial k_0{}^2}\right)t,\quad \xi=x-\left(\frac{\partial\omega}{\partial k_0}\right)t \tag{3.75}$$

这种非线性方程具有周知的调制不稳定性[5]。对于 $\beta>0$ 时的长波扰动

$$K<K_c\equiv 2\sqrt{\beta|\psi_0|^2} \tag{3.76}$$

调制波是不稳定的，极大增率是(在 $K=\sqrt{2\beta|\psi_0|^2}$)

$$\gamma_{\max}=\beta|\psi_0|^2 \tag{3.77}$$

注意，非线性方程(3.72)仅适宜于纵波，即一个偏振方向情况。对于多于一个偏振矢以上的波模，方程(3.72)要作适当修改[5]。

与此类似，我们还可以建立一种非线性包络方程[25],[26],[27]。由麦氏方程

$$\left\{k^2\delta_{ij}-k_ik_j-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}(\omega,\boldsymbol{k})\right\}(E_k)_j=0$$

对纵波($\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}\neq0$)和横波($\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0$)分别有色散方程

$$\varepsilon^l(\omega,\boldsymbol{k})\boldsymbol{E}_k=0,\quad [\omega^2\varepsilon^t(\omega,\boldsymbol{k})-k^2c^2]\boldsymbol{E}_k=0$$

现在认为密度有一扰动 δn：$n=n_0+\delta n$，则

$$\varepsilon^l(\omega,\boldsymbol{k})\,|_{n=n_0}\boldsymbol{E}_k=-\left(\frac{\partial\varepsilon^l}{\partial n}\right)_{n_0}\delta n\boldsymbol{E}$$

$$[\omega^2\varepsilon^t(\omega,\boldsymbol{k})\,|_{n_0}-k^2c^2]\,\boldsymbol{E}_k=-\left(\omega^2\frac{\partial\varepsilon^t}{\partial n}\right)_{n_0}\delta n\boldsymbol{E}_k$$

对朗缪尔波和横等离子体波，

$$\varepsilon^l=1-(\omega_{pe}^2+3v_{Te}^2k^2)/\omega^2,\quad \varepsilon^t=1-\omega_{pe}^2/\omega^2$$

得到

$$(\omega^2-\omega_{pe}^2-3v_{Te}^2k^2)\,\boldsymbol{E}_k=\omega_{pe}^2\frac{\delta n}{n_0}\boldsymbol{E}_k \tag{3.78a}$$

$$(\omega^2-\omega_{pe}^2-k^2c^2)\,\boldsymbol{E}_k=\omega_{pe}^2\frac{\delta n}{n_0}\boldsymbol{E}_k \tag{3.78b}$$

把(3.78)变成时空包络 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)e^{-i\omega_{pe}t}=\int\boldsymbol{E}_ke^{-i\omega t+ikr}dk \tag{3.79}$$

的方程，在略去 $\partial^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)/\partial t^2$ 项之后，有

$$2i\omega_{pe}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+3v_{Te}^2\nabla^2\boldsymbol{E}=\frac{\delta n}{n_0}\omega_{pe}^2\boldsymbol{E}, \tag{3.80a}$$

$$2i\omega_{pe}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-c^2\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{\delta n}{n_0}\omega_{pe}^2\boldsymbol{E} \tag{3.80b}$$

如果把具有频率 ω_{pe} 的一般包络场(3.79)分成为纵场与横场之和：

$$\boldsymbol{E}^T(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}^l(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}^t(\boldsymbol{r},t) \tag{3.81}$$

$\boldsymbol{E}^l(\boldsymbol{r},t)$满足(3.80a)，$\boldsymbol{E}^t(\boldsymbol{r},t)$满足(3.80b)，则有

$$2i\omega_{pe}\boldsymbol{E}^T+3v_{Te}^2\nabla^2\boldsymbol{E}^T-c^2\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}^T-\frac{\delta n}{n_0}\omega_{pe}^2\boldsymbol{E}^T=0 \tag{3.82}$$

这就是(3.18)的共轭方程。至于有关 $\delta n/n_0$ 的第二个方程，则仍采用流体近似方程 (3.19)；在波包情况下，亦可采用有质动力方程(§2.4)[27]。在后面可以看到，通过线性色散建立非线性包络方程是研究等离子体天体物理中强湍动的一种简便方法。

在这小节末，我们顺便提及非线性 Schrödinger 方程(3.74)的给定初值的解。这已经由 Zakharov 解决了[28]。他们把 (3.74) 纳入 Lax 的逆散射理论[29]，由此证明了随着时间的演化，给定初值($t=0,\psi=\psi_0(\xi)$)的满足(3.74)的解 $\psi(\xi,\tau)$瓦解为N个单 soliton；并且(3.74)具有无限个守恒律（当然包括 (3.42) — (3.44)）；N 个 soliton 碰撞后，除位相和中心位置发生移动外，结构不变。逆散射法的详细求解过程和结果的讨论，请参见[5]。

5. 自生磁场

在三、1 节，基于流体力学近似，推出了强湍方程。众所周知，流体力学方程是动力论的矩方程，因而有些重要信息在平均中淹没。从动力论来推导 Zakharov 方程一定会包含更多一些的信息。但是这种推导是非常复杂，而且目前也只处理了纵波情况[30],[1]。详细的推演可参见[5]。

最近笔者仔细地处理了包括横波在内的情况。从动力论出发，展开到三级非线性流，经过复杂而又冗长的运算，得到包含低频磁场 $\boldsymbol{B}^S$ 在内的非线性场方程：[5]

$$\frac{2i}{\omega_{pe}}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{3v_{Te}^2}{\omega_{pe}^2}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t))-\frac{c^2}{\omega_{pe}^2}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$
$$=\frac{n'}{n_0}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{ie}{m_ec\omega_{pe}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{B}^s(\boldsymbol{r},t) \tag{3.83}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-v_s^2\nabla^2\right)n'(\boldsymbol{r},t)=\nabla^2\frac{|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|^2}{8\pi m_i} \tag{3.84}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-v_s^2\nabla\times\nabla\times\right]\boldsymbol{B}^s(\boldsymbol{r},t)=\frac{ec}{m_e\omega_{pe}^2}\nabla\times\nabla\times\left[\frac{\partial}{\partial t}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|^2\right] \tag{3.85}$$

其中 e 为电子电荷。由等离子体强湍动产生低频磁场，即自生磁场，是现代天体物理中一个很重要的问题，仔细研究(3.83)—(3.85)是我们今后的任务。

6. 双层(double layer)

自从阿尔文提出太阳耀斑的电流中断理论[31]以后，双层问题引起了不少的讨论[32]-[34]。简单地说，双层就是等离子体中维持高位降的一种局部区域结构。双层如何形成的问题，目前仅停留在定性描述上[34]：任何密度低落区意味着此区内电子会加速($\boldsymbol{j}=ne\boldsymbol{v}$，$n$ 小 v 大)，从而构成向外的电场$\boldsymbol{E}$，同时这电场也作用在离子上，使离子也排出区外，进一步使密度稀化。这种稀化不稳定性就导致形成双层。同时按阿尔文的意见[31]，这种密度稀化进一步发展时，会突然增大区内电阻，电流就要中断，这时就会发生电磁能的突然释放——爆发。因此，

有人认为[34]，双层在天体物理中有重要意义，它对太阳耀斑能量释放及荷电粒子加速都有贡献。

在双层理论中，已提出两个问题需要解决[33]：

(1) 在等离子体中双层是怎样形成的；

(2) 双层如何随时间演化？

我认为，强湍动等离子体调制不稳定性是形成双层的主要原因。因此，双层具有soliton结构，它可以在空间传播。对于慢流动电子(当然离子也如此)，也就是在静态极限下，我们从(3.11)及(3.2)，并考虑到准中性条件(3.8)，立即有($\omega=\omega_{pe}$)

$$\nabla\left[e\phi+\gamma_e T_e\frac{\delta n}{n_0}+\frac{e^2}{4m_e\omega_{pe}^2}|\boldsymbol{E}|^2\right]=0$$

$$\nabla\left[e\phi-\gamma_i T_i\frac{\delta n}{n_0}\right]=0$$

其中ϕ是能使电荷分离的低频位降：$\boldsymbol{E}_s=-\nabla\phi$，从上两式可得

$$\phi=\frac{\gamma_i T_i}{\gamma_e T_e+\gamma_i T_i}\ \frac{1}{|e|}\ \frac{|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|^2}{16\pi n_0} \tag{3.86}$$

把$|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|^2$化到(3.20)表示的无量纲单位，并利用(3.31)，有

$$\phi(\xi,\tau)=\frac{1}{|e|}\ \frac{\gamma_i T_i}{\gamma_e T_e+\gamma_i T_i}\ \frac{T_e}{16}\ \frac{8}{3}\mu\,|\boldsymbol{E}_0^2\mathrm{sech}^2\left(\frac{\xi-u\tau}{d}\right) \tag{3.87}$$

其中双层的厚度d由(3.38)决定。

由此可以看到，这种soliton双层和文献中所讨论的双层[33]很不一样。soliton双层实际上是双一双层。它的厚度d和soliton场强成反比，不象普通双层那样($d\propto\phi$)，这一点也许很重要。当场强变得足够大时，d就很小，这或许会引起强烈的“打火”，天体物理中的爆发现象似乎应与此有关。我认为，这个问题很值得研究。

7. soliton加速、辐射和爆发现象

天体中的爆发、辐射等重要现象，无不跟粒子的加速密切相关。由于soliton是空间定域的非线性实体，它又有流动性(任意速度u)以及“碰撞”后不改变结构，因此可以给出soliton的气体湍动模型：各种振幅的soliton在空间随机分布[35]。在此情况下，可把强湍动等离子体看作为强朗缪尔soliton与荷电粒子的集合，这时soliton对粒子的加速可用一维的扩散方程(参见(2.48))描述：

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial v}D(v)\frac{\partial f}{\partial v}$$

同时，与soliton场变化方程(2.29)相联合，在场为(3.31)情况下，用自模解的方法，Gorev等人找到f渐近表式[35],[36]：

$$f\sim 1/v^4, \tag{3.88}$$

因而，由于soliton的作用，分布函数出现了过热的快粒子尾巴。强湍动区产生快粒子是强湍动加速的一般性质，它不依赖于所采用的模型；可以说，由于调制相互作用使扰动尺度减小，以致能量被“泵”进共振的尾巴分布区，尾粒子的分布总是非麦氏分布[25]。三维caviton加

速电子也有类似的结果[35]。

通常认为天体中的射电爆发需要高功率能源，但若湍动等离子体受调制相互作用控制的话，弱源也能产生甚强爆发。事实上，发展了的调制不稳定性使湍动等离激元能量不断被捕获，当能量密度达到一定的能级时，这时强非线性与色散效应相互补偿而形成非线性三维caviton；caviton形成后就立即趋向于非对称坍缩，趋于形成盘状结构，同时它尺度缩小，场强增大，最终导致能量释放——爆发。Korolev 和 Petviashvili[37]从长波寻常模

$$\omega^2 \approx \omega_{pe}^2 + 3v_{Te}^2 k_z^2 + c^2 k_\perp^2 \tag{3.89}$$

出发，其中 z 方向为磁场方向，$k_z < \omega_{pe}/c$，用三、4 节中建立包络方程的方法，很容易得到非线性控制方程($E_z = E\exp(-i\omega_{pe}t)$)：

$$\frac{i}{\omega_{pe}}\frac{\partial E}{\partial t} + \left[\frac{3}{2}r_d^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{c^2}{2\omega_{pe}^2}\nabla_\perp^2\right]E = \frac{\delta n}{2n_0}E \tag{3.90}$$

另一个方程仍采用静态极限方程(见§3.4)：

$$\delta n = -|E|^2/16\pi T_e \tag{3.91}$$

两者联立就得到

$$E = A\ (32\pi n_0 T_e)^{\frac{1}{2}} f(\rho)\exp\left(\frac{1}{2}iA^2\omega_{pe}t\right) \tag{3.92}$$

$$\rho = \left[\frac{2}{3}\ k_{eff}^2 z^2 + 2\frac{\omega_{pe}^2}{c^2}(x^2+y^2)\right]^{\frac{1}{2}},\quad k_{eff} = \frac{A}{r_d} \tag{3.93}$$

而 $f(\rho)$ 满足

$$\frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ \rho^2\frac{\partial f}{\partial\rho} = f - f^3 \tag{3.94}$$

计算表明，(3.94)具有局域性 ($\rho \lesssim 1$) 的解，因此是一种 caviton。当 caviton 坍缩时，尺度缩小，有效波数增大，在 k_{eff} 达到 ω_{pe}/c 时，(3.90)失去正确性 ($k_z < \omega_{pe}/c$)，作为它的解—caviton 不再存在，也就是说，这时波不再被捕获，caviton 所蕴含的能量突然释放。基于这个观念，Korolev 等应用于 I 型射电爆，得到与观测相一致的结果[37]。

对磁场湮灭的耀斑模型，Pikel'ner 和 Kaplan 认为还存在二个困难[38]：在耀斑区并未观测到磁场强度的减小；模型要求耗散层一直保持非常薄(d<100cm)，但产生的热等离子体一定会使它大大加宽，故薄的耗散层很难维持。他们认为，也许应该考虑 caviton (尺度仅几个德拜半径)的作用 [38]。

地球极区的千米波辐射是一个非常有趣的现象。千米波辐射的中心问题是，要寻找一种高效率的转换机制，把极区电子束能量转化为千米波辐射能。线性转换机制已被排除 [26]。Istomin 及其合作者提出两回旋 soliton 合成为千米波辐射的非线性转换机制 [39]：

$$c + c \longrightarrow t$$

他们也先从回旋波色散律出发，建立回旋波非线性控制方程，然后得到 soliton 的解 E_{sol}。极区电子束激起静电回旋波，它的增率由(2.14)确定($\sigma = l$)，然后由 (2.29) 得到总 soliton 场能的变率

$$\frac{\partial w_{sol}}{\partial t}=\int \gamma_k w_k \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}$$

w_k 已由非线性控制方程所解出。当 $\partial w_{sol}/\partial t$ 趋于 0 时，表示能量不再泵进 soliton，这就得到一个稳定条件；最后考虑这种 soliton 非线性合成千米波辐射。

还应提及再入物理中的一个有趣现象。当 Apollo 着陆时会在电离层激起大振幅的 soliton波。Bakai 及其合作者指出[40]，这种 soliton 是再入后等离子体中一组非线性方程的解。

脉冲星辐射的主要问题是如何解释高亮度射电辐射（$P_{射电}\sim10^{27}$ 尔格/秒）。Karpman 及其合作者认为它是来自于相干的 soliton 曲率辐射[41]。他们认为，既然 soliton 是负的密度"隆起"物，应该会产生曲率辐射。他们把 soliton 看成一等效电偶极子，偶极距为 soliton 的线度 l_0，正负电荷由场决定：$q=\pm El_0^2$。然后利用电偶极子的曲率辐射公式计算 soliton 的辐射。在考虑了辐射相干之后，就得到高亮度的射电辐射。

Spangler 等人基于二流体近似推导出阿尔文波的非线性方程[42]，得到阿尔文 soliton 的解。在此基础上，他们从理论上分析了太阳风中的一些量的相关关系，和观测资料相符合[43]。

我们应该结束这篇略显冗长的评述。总之，等离子体湍动，特别是强湍动，由于存在强非热辐射和相对论粒子，在天体物理中应起着实质性的作用。

参 考 文 献

[1] Tsytovich, V. N., Theory of turbulent Plasma, (1977).
[2] Lifshitz, E. M. and Pitaevskii, L. P., Physical Kinetics, (1981).
[3] Tsytovich, V. N., Nonlinear Effects in Plasma, (1970).
[4] Melrose, D. B., Plasma Astrophysics, (1980).
[5] 李晓卿，湍动等离子体物理，北京师范大学出版社(已付印).
[6] 卡普兰，齐托维奇，等离子体天体物理(章振大，李晓卿译)，科学出版社，(1982年).
[7] 李晓卿，章振大，天体物理学报，**1** (1981), No.4, 301—310.
[8] Whitham, G. B., *J. Fluid Mech.*, **22** (1965), 273—283.
[9] Bretherton, F. P. and Garrett, C. J. R., *Proc. Roy. Soc.*, **A302** (1969), 529—554.
[10] Jacques, S.A., *Ap. J.*, **215** (1977), 942—951.
[11] Fermi, E., *Phys. Rev.*, **75** (1949), 1169.
[12] Gurevich, A. V., Eksper, Zh, *Teor. Fiz.*, **38** (1960), 1597.
[13] Pavlov, V. I., *Usp, Fiz. Nauk.*, **124** (1978), 343—349.
[14] Kono, M. et al., *Physics Rev. Lett.*, 45 (1980), No.2, 1629—1631.
[15] Li Xiao-qing and Song Mu-tao, *Solar Physics*, **75** (1982), 83—98.
[16] 章振大，黄佑然，李晓卿，天文学报，**23**(1982), No.2.
[17] Li Xiao-qing, Zhang Zhe-da, Zhang You-yi, *Solar Physics*, **91** (1984), 289—297.
[18] Li Xiao-qing and Song Guo-xuan, *Ap. Space Sci.*, **76** (1981), 13—21.
[19] 李晓卿，中国科学，(1984), No.3.
[20] Захаров, В. Е., *ЖЭТФ*, **62** (1972), 1745—1759.
[21] Thornhill, S. G. and ter Haar, D., *Physics Reports*, **43C** (1978), No.2, 43—99.
[22] Gibbons, J. et. al., *J. Plasma Physics*, **17** (1977), part 2, 153.
[23] A. 哈瑟加瓦，等离子体不稳定性和非线性效应，(王水译)，科学出版社.
[24] Карпман, В. И., Крушкаль, Е. М., *ЖЭТФ*, **55** (1968), 530—538.
[25] Rudakov, L. I. and Tsytovich V. N., *Physics Reports*, **40C** (1978), 1—73.

[26] ter Haar, D. and Tsytovich, V. N., *Physics Reports*, 73C (1981), 175.
[27] 李晓卿，南京大学学报(自然科学版)，(1983)，No.2, 461—474.
[28] Захаров, В. Е., Шабат, А. Б., *ЖЭТФ*, **61** (1971), 118—134.
[29] Lax, P. D., *Comments on Pure and Applied Math.*, **21** (1968), 467.
[30] Хакимов, Ф. Х., Цытович, В. Н., *ЖЭТФ*, **70** (1976), 1785.
[31] Alfvén, H. and Carlqvist, P., *Solar Physics*, **1** (1967), 220.
[32] Block, L. P., *Ap. Space Sci.*, 55 (1978), 59.
[33] Carlqvist, P., *Ap. Space Sci.*, **87** (1982), 21—39.
[34] Davey, K. R., *Ap. Space Sci.*, **95** (1983), 47—63.
[35] Gorev, V. V. et al., *Radiophys. Quant. Electron.*, **19** (1976), 486.
[36] Gorev, V. V. et. al., *Sov, Phys. JETP.*, **39** (1976), 332.
[37] Korolev, O. S. and Petviashvili, V. I., *Sov. J. Plasma Phys.*, **1** (1975), 241.
[38] Pikel'ner S. B. and Kaplan S. A., *Radiophys. Quant. Electron.*, **20** (1978), 904.
[39] Istomin, Ya. N. et al., *Sov. J. Plasma Physics.*, **4** (1978), 76.
[40] Bakai, A. S. et al., *Sov. J. Plasma Physics.*, **3** (1977), 323.
[41] Karpman, U. L. et al., *Physica Scripta*, **11** (1975), 271—274.
[42] Spangler, S. R. and Sheerin J. P., *J. Plasma Physics.*, (1981).
[43] Spangler, S. R. and Sheerin, J. P., *Ap. J.*, 257 (1982), 855—861.

（责任编辑　刘金铭）

Weak and Strong Turbulence in Plasma Astrophysics

Li Xiaoqing

(Purple Mountain Observatory, Academia Sinica)

Abstract

Weak and strong turbulence in plasma astrophysics are reviewed with emphasis on fundamental plasma interations.

Fundamental problems for weak turbulence are nonlinear interactions of wave-wave, wave-particle; the dynamic equations of interactions may be derived by semi-classical method. Important questions are discussed: transport equations of waves through weak inhomogeneous media, turbulent acceleration and magnetic dynamo.

Analytic treatments of Zakharov equations to control strong turbulent phenomena are mentioned. Some of interesting questions of astrophysics, for example, self-generation of magnetic field for cosmic bodies, double layer, soliton acceleration, radiations and bursts are discussed.