第5卷 第3期　天 文 学 进 展　Vol.5, No.3
1987年7—9月　PROGRESS IN ASTRONOMY　July—Sep., 1987

前沿

新的不确定的天体力学

——在空间动力学和天体力学国际讨论会上的主要演说

Victor Szebehely
(美国德克萨斯大学奥斯丁分校)

提　　要

本文讨论了天体力学的不确定的特性，并探讨了它同稳定性研究的关系。当初始条件的不确定、未知的动力学影响以及不可积性同动力系统固有的不稳定性联接在一起时就产生了不确定性，结果，轨迹的集合就代替了单一轨迹，可靠的长期预报变成了不切实际的期望。确定性的问题成为使用经典的或数学的动力学模型的课堂练习，同时所有实际的问题却表现出不确定性来，而拉普拉斯的精神就不再适用了。本文首先定义了所使用的概念，列举了几个例子以说明不确定性的原因；然后讨论了与确定性有联系的稳定性。接着又探讨了不确定性的作用和几个重要的时间尺度。动力学系统的积分和变换的存在看来对确定性是有利的，但事实上它们仅仅延迟了剧烈变动的趋势。

定　　义

确定性这一概念通常出现在哲学中，在物理学中其相应的表达即为可预报性。本文讨论的是专门的领域，故确定性可定义为：若已知一个封闭系统在给定初始时刻用于描述系统各种状态的变量的值，就可以预报这些变量在任何时刻的值，那么这一系统被认为是确定性的。

用数学形式来表示，令q_i表示描述系统的变量，t_0是初始时刻，t代表任何其他时刻。如果$q_i(t)$能够从$q_i(t_0)$的值所推得，那么系统就是确定性的。在动力学和天体力学中，变量q_i代表系统在相空间的位置，运动方程可写为：

$$\dot{q}_i = F(q_j, t, \alpha_k) \tag{1}$$

此处q_i上的一点表示对时间的求导：

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \tag{2}$$

函数F_i代表物理定律，t是时间，q_i是描述系统的变量，α_k是有关的物理参数（通常它们是不依赖于时间的）。$i, j = 1(1)n, k = 1(1)m$ 即这些下标是从1开始，并以1为间隔递增到n或m的整数。因此，我们考虑右边依赖于所有的q_j、α_k和时间的n个一阶微分方程。在动力系统中，n为偶数（即$n = 2N$）。在天体力学中，以方程(1)形式给出的n个方程通常是哈密顿运动方程，其中前N个变量代表构形空间，后N个变量代表动量空间。

给定初始条件$q_i(t_0)=\beta_i$，解或者说预报的结果以$q_i(t,\beta_j)$表示。

在经典力学中皆知的这个极其简单的方法，当考虑实际问题时却产生了一些弊病，我们现在列出这些困难，并分析一下结果。

不确定性的理由

(1)首先考虑“给定初始条件”这一表述。数学家在讲授大学微分方程的课程时使用了这种表述，经典力学则毫无问题地采纳了它。物理学家、天文学家和工程师们对这种术语的反应是询问“谁给定，具有何种精度?”事实上，初始条件通常是测量或观测的结果，它的建立却又经常带有某种粗略估计的不确定性。在天文学和天体力学中，所“给定”的初始条件如对于行星说来就是过去状态的观测结果，这些观测结果的精度极大地依赖于观测的范围和所观测的行星的周期。对于冥王星而言，观测仅能反映它绕日轨道的五分之一弱(因为它是1930年发现的，并且它的半长轴近于40个天文单位)。

因此，现实问题中的初始条件并不是“给定”的，而是估计的，对于以方程(1)表示的动力学系统的初始条件变成了$\beta_j\pm\varepsilon_j$。在相空间里，我们谈论不确定的范围。在这个范围之外，将会出现许多轨迹，每一条轨迹均带有不同的初始条件。因此，关于系统未来状态的预报并不限定为单一的轨迹，而是许多轨迹的一个集合。除非系统如通常那样是不稳定的，否则这个轨迹集合将秩序井然地构成一束。下面来讨论不稳定性的影响以及它与不可靠性和不确定性的关系。

“给定”初始条件的分析可以归结为如下的表述：这种情况仅发生在不切实际的简化考察之中，而实际上的情况需要考虑到初始条件是带有某种不可靠性的。

(2)现在来考虑一下以函数F_i形式出现在方程(1)里的物理定律。自亚里士多德以来，自然科学和天体力学经历了几次显著的变革，最重要的变化则是同哥白尼、伽利略、牛顿、爱因斯坦等人联系在一起的。F_i随时间的演变是沿着使得分析表达式更加困难，但同时却更加符合实际的方向。即使最复杂的场的表达式是近似的，它们都带有未知的不确定性，这是今天已被普遍接受的一个事实。一个十分清楚的例子就是在卫星动力学中所建立的“真正”的地球重力场。从观测和勒让德多项式的近似中得到的较高阶的重力场系数J_{ij}常表现为发散，且同卫星轨道有关。所以，我们关于出现在函数F_i中的场的知识是相当有限的。

(3)一个有关联的问题是方程(1)中物理参数α_k的不可靠性。从前面关于系数J_{ij}的不可靠性的讨论中可知：当某组物理定律被采用后，涉及到这些定律表达式中的数值就成了问题。在稳定性研究中，这通称为结构稳定性，我们将在后面讨论。

(4)我们现在已触及到了方程(1)的解的问题。天体力学微分方程可积性的庞加莱定理(1892)表明：除了特别的情况外，$n\geqslant3$体的引力问题是不可积的。他的意思是除了能量、角动量和质心积分外，不存在其他解析的、全局有效的积分。描述n体问题的微分方程的阶数是$2an$，其中n是参与物体的个数，a是问题的维数，即$a=2$或3。质心的积分个数是$2a$，相应的角动量积分个数是a，还有一个能量积分，总的积分数是$3a+1$，而系统却是$2an$阶的。依靠消去时间而引进一个特殊变量，三维三体问题可减少为$2an-3a-3=6$。庞加莱

定理表明：原来的 $2an=18$ 阶系统通常不能减少为低于 6 阶的系统。事实上，后面将提到对于限制性三体问题存在一个相应的定理，说明它仅有一个全局有效的积分称为 Jacobi 积分。所以，表达限制性问题的 $2a$ 阶微分方程系统的减少停止在$2a-2$，因为除了 Jacobi积分外，使用它还可消去时间。

不可积的结果是：通常没有解析方法可用来得到对于任意初始条件在任意时刻均有效的解(Hagihara, 1970, Poincaré, 1892, 和 Whittaker, 1904)。

(5)这便引导我们依靠数值积分去求解。由于数值积分过程中所得到的精度位数必定是有限的，所以用这种方法得到的轨迹有未知的误差。这种情况由于数值的和动力学的不稳定性的合并变得更为严重，所得结果与其说代表原来的动力学问题，还不如说代表所使用的计算机。通常有五种方法可用来检验数值积分的结果：改变所使用的数值积分方法的阶数，改变时间步长，使用上面提到的积分，正规化，时间反演。由于前两种方法仅仅减小而不能消除误差的传播，故我们将详细地探讨后三种方法。

若方程以简化形式来表示，那么就不能使用积分来检验结果。若使用原来的 $6n$ 阶运动方程系统，则积分计算的检验将是有用的，但效果是有限的。当一个积分如能量积分沿着一条由数值法建立起来的轨迹取一个常数值时，那么我们可以推论出这条轨迹是否位于相空间里能量等于常数的曲面上。使用几个积分我们可以找出轨迹是否位于这些积分曲面的相交处。因为问题不是可积的，故轨迹也不能由这些曲面的交界来确定。当积分为常数的要求得到满足时，对于正确轨迹的必要而非充分的条件就可以建立起来。

正规化技术(Levi-Civita, 1903, Sundman, 1912)消除了两体碰撞的本性奇点，但它的主要优点在于提高了在密切接近时的精度。在实际的行星问题里，如此密切接近是不会发生的，但是在恒星动力学问题中，正规化技术已非常有效地被使用于减少由于数值积分所引起的误差。后面将更为详细地讨论正规化技术。

由于当时间的方向变化时轨迹具有不同的动力学稳定特性，时间反演方法作为数值积分结果的一种检验很少使用。在$t\to+\infty$方向 e^t的指数误差传播，同在$t\to-\infty$方向 e^t 的强稳定性的比较，表明了这一点。

结论是，关于数值积分，我们可以陈述如下：适当的技术可能会推迟轨迹意义的丧失，但对于长时间积分来说，其结果迟早将是计算机的描述而不是动力学的描述。

例　　子

在本节中，我们特别提出了 4 个例子。首先列举一个十分简单的线性系统，并且已由 Max Born(1969)证实了它的不确定状态的出现；接着讨论大家非常熟悉的接近分界线的非线性摆问题；第三个例子是天体力学的一个可积的非线性问题即两体问题；接着讨论了天体力学中最简单的不可积问题——圆型限制性三体问题。

(1)在第一个例子中，我们建议研究最简单的理想化的(和不存在的)课堂问题，它是以下述运动微分方程式来描述的：

$$\ddot{x}=0 \tag{3}$$

一个物体不受外力影响沿着一条直线运动，并且在终点($x=0$ 或 $x=l$)处不损失能量地被弹性反射。

其解是 $\dot{x}=v_0$ 和 $x=v_0t+x_0$，其中 v_0 和 x_0 是 $t=0$ 时的初始条件。在所“给定”的初始条件中有某些不可靠性，那么在解中的误差就是

$$\Delta x=\Delta x_0+t\cdot\Delta v_0 \tag{4}$$

其中 Δx_0 和 Δv_0 是初始条件的误差。若 $\Delta v_0=0$(初速无误差)，那么 $\Delta x=\Delta x_0$，则物体的位置能够在 $0\leqslant x\leqslant l$ 区间中带着 Δx_0 的不可靠程度来确定。若 $\Delta v_0\neq0$，在位置上的不可靠性 Δx 将随时间增长，并且在 $t_c=\frac{l}{\Delta v_0}$ 时，我们有 $\Delta x\geqslant l$，也就是说物体可以位于所允许的运动区域中的任何地方，并且它的位置是不能确定的。注意到在 $\Delta v_0\to0$ 时临界时间 $t_c\to\infty$，故知仅仅在初速是无误差地“给定”时，运动才是可确定的。

(2) 我们仅简短地提及一下第二个例子，因为在讨论非线性动力学的教科书中，它是最普遍的例题。这个例子是最简单的非线性可积动力系统——摆。当摆的振荡振幅增大时，摆达到分界线，并且在其能量更高时，运动变为圆周运动。摆的定性状态在接近分界线时对初始条件的变化显得极其敏感，并且运动再次变为不可确定的。

(3) 天体力学中最简单的可积问题是两体问题，其解析表达式为：

$$\ddot{x}_i=-\frac{x_i\mu}{(x_ix_i)^{3/2}} \tag{5}$$

其中 x_i 是两体间的位矢，μ 是引力常数乘以两个物体的质量之和，能量积分以下面形式给出：

$$\dot{x}_i\dot{x}_i=\frac{2\mu}{(x_ix_i)^{1/2}}+C \tag{6}$$

这个问题的解(原则上)可以写为：

$$x_i=F_i(\mu,x_j{}^0,\dot{x}_j{}^0,t) \tag{7}$$

注意到这个简单的可积的非线性动力系统并没有一个是时间函数的封闭形式的显解。当引进其他独立变量(如所熟知的近点角)时，解就可以表示为这些近点角的封闭形式的显函数，但由开普勒方程可知没有把近点角表示为时间的封闭形式的显函数的分析表达式存在。由于近点角可视为正规化变量，上述问题将在变换一节中更为详细地讨论。

我们在此处论证一下由于初始条件和物理参数的不可靠性所引起日地两体问题的不确定状态。

按照开普勒定律 $a^3n^2=\mu$，其中 a 为半长轴，n 是地球绕日轨道的平均运动。这里我们指出：这个问题的两体模型忽略了许多其他影响(其他行星的摄动，相对论性效应等)。因此，我们的问题实际上是复杂得多的。所有这些忽略掉的复杂性增添了地球位置测定的不可靠性。事实上，我们是假定了一个理想化的两体问题，并且企图从所“给定”的 a 和 μ 值计算平均运动 n 或轨道周期 $T=\frac{2\pi}{n}$。按照国际天文学联合会最近的文献(1977)，恰当的值应是：

$$a=(1.49597870\pm2\times10^{-8})\times10^{11}\mathrm{m}$$
$$\mu=(1.327128276\pm5\times10^{-8})\times10^{20}\mathrm{m^3/s^2} \quad (8)$$

故 $\Delta a=4{,}000\mathrm{m}$，$\Delta\mu=10^{13}\mathrm{m^3/s^2}$。

地球绕日的旋转周期现在可由 $T=2\pi a^{3/2}\mu^{-1/2}$推出。

用这种方法，我们得到$T=1$年±1.23秒或者在 10^7 次旋转期间内得到了等于1年的不可靠程度。换句话说，若不去使用观测来改正地球的位置的话，在 10^7 年后，它的位置可以在它的轨道上的任何地方。

(4) 我们的最后一个例子是同天体力学中最简单的不可积问题联系在一起的。被称之为限制性三体问题的理想化模型(Szebehely，1967)在天体力学和空间动力学中有许多应用。两个物体即主星(m_1 和 m_2)绕它们的质心作圆周运动形成了一个两体问题。在它们与时间有关的力场中，放置了质量为 $m_3\ll(m_1, m_2)$的第三体。因为假定 m_3 不会影响(m_1, m_2)系统的运动但反受其影响，故这样的三体问题称为限制性的。这种三体问题如同一般的无限制的三体问题一样，按照庞加莱定理是不可积的，并且它仅有一个称之为 Jacobi 的全局有效的积分。在这个问题中有五个力的平衡点，若第三个小质量的质点位于这些点中任一个上，它将停留在那里，除非有某种外部摄动力干扰了这个平衡。事实上，这五个点是限制性三体问题的仅有的严格解。运动方程通常在一个无量纲的旋转的(会合的)坐标系里表示。为了说明问题，我们进一步限制第三体仅在两个主星体的运动平面上运动。若第三体的坐标是 x 和 y，我们有如下形式的运动方程：

$$\ddot{x}-2\dot{y}=\frac{\partial\Omega}{\partial x} \quad (9)$$

$$\ddot{y}+2\dot{x}=\frac{\partial\Omega}{2y}$$

与之相连的 Jacobi 积分可写为：

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=2\Omega-C \quad (10)$$

此处函数 Ω 如下给出：

$$\Omega=\frac{1}{2}(1-\mu)r_1^2+\mu r_2^2+\frac{1-\mu}{r_1}+\frac{\mu}{r_2} \quad (11)$$

其中 $r_1=[(x-\mu)^2+y^2]^{1/2}$，$r_2=[(x-\mu+1)^2+y^2]^{1/2}$
是距主星体的距离，$\mu=m_2/(m_1+m_2)$，$m_2\leqslant m_1$，C 为积分常数。

五个秤动点中的两个位于三角形的顶点，坐标为$L_{4,5}(\mu-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$，其他三个秤动点位于 x 轴上。当$0<\mu<(1/2)(1-\sqrt{69}/9)$时，共线点是不稳定的，而三角秤动点则是稳定的。

作为特例我们考虑在 $L_{4,5}$ 点邻近的运动。首先可看到这些点的坐标依赖于仅从观测近似得知的质量参数 μ 的值。此外，这些点的 y 坐标是由无理数表示的。所以放置一体于 $L_{4,5}$ 点上的物理意义是不明确的，并且 $L_{4,5}$ 的位置也仅仅是近似的。如果把相对速度为零的物体放在或接近于三角秤动点，它们将会摆动。但随着初始条件误差的增大，摆动变成了圆周运动。这种状态在脱罗央小行星群(接近日一木三角秤动点)和位于地一月三角秤动

点处的太空站上有着重要的应用。

当在相空间中对 $x_0=\mu-1/2$，$y_0=\pm\sqrt{3}/2$，$\dot{x}_0=\dot{y}_0=0$ 取误差限制时，我们发现沿着 r_1方向对 Δq 极其敏感(R.Mckenzie和V.Szebehely，1981)以及沿与 r_1 垂直的方向对 Δp也极其敏感(V.Szebehely 和L.Premukumar，1982)。这里的Δq 为在构形空间中偏离 $L_{4,5}$的长度，而 Δp 是在速度空间中对零点的相应的偏离。由于在相空间中用来测量偏离的起点的特性，依靠数值积分来区分摆动和圆周运动是十分困难的。实际上，存在好几个摆动的孤立岛，并且在相空间中可以建立出现混合运动（摆动和圆周运动）的区域。这些轨迹的定性状态显示出极强的不确定性趋势，如果不确定的情况可能发生的话，则它们的分类通常将会变得困难。更详细的情况，请参阅 Szebehely(1983)的文章。

稳定性和确定性

前面已说过，由于在充分长的时间后，轨迹的集合将会显示出混沌现象，故动力系统的不稳定性会强化不确定性(Prigogine，1980 和 1984)。我们并不一定需要上述与两体问题有关的例子中所显示的轨道的指数的不稳定性。即使当初始条件或物理参数的变化从本质上引起轨道形状的变化时，预报也已变为不可能。

为了在不稳定性和不确定性状态之间建立一种关系，我们必须了解文献中(如 Szebehely，1984)通常被采用的超过五十种的稳定性定义。在这一点上我们所感兴趣的一个基本方法即是已被庞加莱(1892)和 Ляпунов(1892)所采用的方法。

如果解 $y(t)$同摄动解 $x(t)$的关系满足下列条件，解 $y(t)$就称为稳定的：给定 ε，则必存在一个 δ，其关系为

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &\cdot \varepsilon\\ |x(t_0)-y(t_0)| &\cdot \delta\end{aligned}\tag{12}$$

则运动是稳定的。这里 δ表示初始条件的变化，ε 是原始解与摄动解的偏离。注意到这里的变化和偏离均相对于同一时刻，因而我们谈论的是由 Ляпунов 提出的表示动力学状态的等时对应。当变化和偏离是量度如庞加莱所提议的正交距离时，这一定义也同样可以被使用，它通常被用来表示轨道或几何稳定性。上述关于地球运动的不确定性的例子对应于等时偏离，这种偏离不久就可能会变成两倍于地球绕日轨道的半长轴之大。事实上，几何形状变化非常少，$\Delta a/a\doteq 3\times 10^{-6}\%$，但是沿着轨道，状态变得不确定了。

在研究初始条件变化的影响时，我们经常论及直接稳定性。当考虑到运动方程(或所涉及到的物理常数)的变化时，我们就会论及结构稳定性。就前面所提出的例子而言，我们直接注意到了地球的两体运动和在地—月空间的秤动。在这些例子中（如同在大多数实际的问题里一样），导致了系统不确定的两种不稳定性均会发生。事实上，假如选择了适当的稳定性定义，我们就可以推论出：不确定性就是不稳定性的结果（Ford，1983）。庞加莱和Hadmard 的关于“小的不是简单的”和“小的起因可以导致大的影响”的想法就是将不稳定性同不确定性联接在一起了（Brillouin，1964，Chirikov，1979，Kadanov，1983，和Mark，1983）。

积分和变换

在这一节中，主要考虑不平常的问题如现存的动力系统积分的使用是如何影响到确定性的以及变量的变换是否可以改变各种系统的不确定特性。我们从一个可以表明所涉及到的许多问题的例子开始。再一次来考虑两体问题，这次是以一个二维的复变量表示(Levi-Civita, 1903 和 V. Szebehely, 1967)，运动方程是：

$$\ddot{z} = -\frac{z}{|z|^3} - C \tag{13}$$

其中复位矢 z 表示两个物体的相对位置，物理参数现在已被并入无量纲的时间和位置坐标中。能量方程是：

$$|\dot{z}|^2 = \frac{2}{|z|} - C \tag{14}$$

按照 Levi-Civita 我们引进一个同时作用于独立和非独立变量的正规化变换：

$$z = w^2 \quad 和 \quad ds = \frac{dt}{4|z|} \tag{15}$$

w 和 s 是对应于 z 和 t 的新变量，变换后的方程变为：

$$w'' + 4Cw = 0 \tag{16}$$

其中 $w'' = \frac{d^2w}{ds^2}$，C 是上面所示的能量常数。

注意到：原来的非线性方程已变成一个线性方程，并且在 $z=0$ 处的原始奇点也已消除。在变换后的方程式的推导中，除了变换，还使用了能量积分，这一步就消除了出现在变换后的方程中的二次项，但却将能量常数带进了变换后的运动方程中。所以，当在变换后的方程中研究初始条件变化的影响时，能量常数的出现限制了等能变化的研究。这就是为什么线性的变换方程表现出稳定性的原因所在。如果研究不同能量的轨迹，我们在简谐振子中发现频率变化，并且可再次观察到 Ляпунов 不稳定性。若不使用能量方程去得到变换方程，那么所产生的以(w, s)变量所表示的非线性方程会显示出不稳定性，但无奇点出现，至少从分析的观点来看是这样的。在解变换方程之后，同样应当注意到结果必须变换为原来的变量，这就是说在得到 $w = w(s)$后，$z(t)$的关系式应当使用 $z = w^2$ 来建立，并且

$$t = \int 4|w|^2 ds \tag{17}$$

这个方程同开普勒方程是恒等的，它把原来的独立变量 t 表示为新变量 s 的一个超越函数。其逆关系式 $s = s(t)$ 必须依靠迭代或用一个级数展开来得到。因此，上面所描述的正规化变换是用变换开普勒方程并寻找 $s = s(t)$ 关系式的问题来代替解带有一个奇点的非线性微分方程的问题。

所以，正规化变换将能延迟但不能防止确定解的丧失，对于其他变换和积分的使用，也具有同样的情况。

结 论

按照拉普拉斯精神（庞加莱更愿将它称为拉普拉斯幻想）的特性，注意到它必须严格地知道所有的初始条件，必须知道所有影响运动的物理定律，必须能够用公式表示出运动方程。在这些完成之后，它必须最好以封闭形式表出不可积的微分方程的显解，并且精确地预报当 $t\to\infty$ 时系统的将来状态。我们的学生通过课堂上和教科书中的例子研究经典的或数学的动力学模型是需要这样一个过程的。他们是宿命论堡垒占领者——亚里士多德、德布罗意、爱因斯坦、伽利略、拉普拉斯、牛顿、普朗克、薛定谔等人——的好伙伴。另一方面，不确定性动力学的信仰者们则必须同玻尔、玻恩、布里渊、Hadamard、海森伯、泡利、庞加莱等人一起成为“统计狂”俱乐部的成员（如爱因斯坦所称）。

看来，期望两种观点的统一是有可能实现的，因为依靠以更加现实的方式修正确定性观点，我们可以得到不确定性的动力学的模型。我们能够论及以科学的信念将牛顿的确定性提高到教义水平的拉普拉斯，但同时我们又必须知晓庞加莱关于不可积系统的论断。“统计狂”已越来越穿透入宿命论的堡垒，并且随着时间的增长，我们的动力系统变得越来越疏忽了有问题的初始条件。科学的初始条件可能安放在亚里士多德手中，他拒绝试验是否一个大石块真的比小石块更快地碰到地面。预测物理学、动力学、稳定性研究或天体力学的未来是不可能的，因为我们不知道精确的初始条件，不知道定律，并且由于过程既不是线性的，也不是可积的，又不是稳定的，而首先是不可确定的。

致 谢

若没有与同事们的商讨，没有我的研究助手的帮助，这篇论文是不可能作出的。深切感谢国家科学基金会和德克萨斯大学 R.B.Curran 工程学讲座教授的财政资助。外国货币计划的合同支持也保证了这篇文章在印度国际讨论会上提出。衷心感谢德里大学 K.Bhathagar 教授的邀请。

参考文献（略）

张捷译 何妙福校

New Nondeterministic Celestial Mechanics

Keynote address at the International Workshop on Space and Celestial Mechanics (November 14, 1985)

Victor Szebehely

(University of Texas at Austin)