第8卷 第2期
1990年6月

天 文 学 进 展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol.8, No.2
Jun., 1990

天体力学中的数值积分方法

张捷　何妙福

（中国科学院上海天文台）

提　　要

本文综述了天体力学中所应用的数值积分方法及其结果的精度检验方法，并介绍了数种常用数值积分法的计算软件包。

一、引　　言

天体力学的数值积分方法就是应用常微分方程的数值积分求解天体的运动方程，即从已知天体坐标或轨道要素的初始值组出发，逐步递推计算出运动方程的右函数在若干组自变量上的值，最后得到天体在任意时刻的具体位置。它的特点是计算公式简单、通用，而且计算过程是多次重复进行，所得结果能达到很高精度。对于复杂的天体运动方程求解，例如小行星或彗星(尤其是轨道偏心率和交角较大者)在九大行星摄动下的精确运动，人造地球卫星在多种摄动因素影响下的精密定轨等这些较难用分析方法解决的问题，均广泛求助于数值方法。1910年，在预报哈雷彗星回归中首次使用的Cowell方法就沿用至今。数值积分方法是天体力学研究中一种重要手段，得到了十分广泛的应用。

二、重要的数值积分法

天体力学中的数值积分方法是在不断改进和发展的，但总括起来可分为两大群[1]：多步法和单步法；而单步法又可分成Runge-Kutta型，Taylor型和外推型三种。

1．多步法

(1) 对于一阶常微分方程组的初值问题：

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t),\quad x(t_0)=\xi \tag{1}$$

其中x和f都是矢量，令

$$t_n=t_0+nh,\quad f_n=f(x_n,\ t_n) \tag{2}$$

n为整数，h为步长，x_n表示$x(t_n)$的近似值。

于是求解方程(1)的线性多步法的一般形式为[2]：

1989年8月24日收到。

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{n+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j} \tag{3}$$

其中 α_j，$\beta_j(j=0,1,\cdots k)$为常数，且通常设 $\alpha_k=1$，$|\alpha_0|+|\beta_0|>0$。如果 $\beta_k=0$，该式称为显积分式或预估式；如果 $\beta_k\neq0$，该式称为隐积分或校正式。又如果(3)式所得近似解的局部截断误差等于 h^{p+1} 阶，则称此线性多步法是 p 阶的。显然，阶数标示了线性多步法的精度。

当在(3)式中取 $\alpha_{k-1}=-1$，$\alpha_j=0$，$j=1,2,\cdots k-2$ 时，便得到了Adams 型数值积分法。它由显式 Adams-Bashforth 公式和隐式Adams-Moulton公式组合而成，其阶数等于需估值的 f 的个数，而且隐式的截断误差虽与显式的截断误差同阶，但前者比后者少。

(2) 对于如下二阶常微分方程组的初值问题：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x,t),\quad x(t_0)=\xi,\quad \frac{dx(t_0)}{dt}=\eta \tag{4}$$

其中右函数 f 不含 dx/dt、其数值积分的线性多步法的一般形式为：

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{n+j}=h^2\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j} \tag{5}$$

通常也取 $\alpha_k=1$，$|\alpha_0|+|\beta_0|>0$。如果(5)式的局部截断误差是 h^{p+2} 阶的，则称(5)式为 p 阶线性多步法。

当在(5)式中取$\alpha_{k-1}=-2$，$\alpha_{k-2}=1$，$\alpha_j=0$，$j=1,2,\cdots k-3$ 时，便得到 Cowell 型数值积分法。它由显式 Stormer 公式和隐式 Cowell 公式组成，其阶数也等于需估值的 f 的个数，而且对于二阶以上的线性多步法，其隐式的局部截断误差也比显式的局部截断误差少。Merson[3] 曾给出最适合计算机运算的 Stormer 公式。

(3) 对于一般型二阶常微分方程组的初值问题：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(x,\ \frac{dx}{dt},\ t\right),\quad x(t_0)=\xi,\quad \frac{dx(t_0)}{dt}=\eta \tag{6}$$

其中右函数 f 中显含 dx/dt。其数值积分方法有两种：

(i) 把方程组(6)先化成一阶微分方程组，用 Adams 型数值积分法求解。

(ii) 一方面把(6) 看作$\frac{dx}{dt}$的一阶方程组，用 Adams 型公式计算$\frac{dx}{dt}$；另一方面把(6)看作 x 的二阶方程组，用 Cowell 型公式计算 x。这种联合使用两类公式求数值解的方法便称为Adams-Cowell 型方法。它比(i)法更有效。

同时在一般情形下，应用隐积分公式比应用显积分公式计算需化更多的计算时间，这是因为对应隐式，未知量 x_{n+k}在(3)式中是以隐函数形式出现的，x_{n+k} 的近似解必须通过迭代过程求得。可是，如上述，隐式都比显式精确，此外，隐式的稳定区也比显式的大。因此尽管隐式费时，仍常宁愿采用它求解，并可利用隐式与显式所求得两个近似解之间的差异来有效控制步长 h 和步数 k 的改变。

实际应用中常把显式和隐式联合起来使用，以显式得到的 x_{n+k} 近似解作为隐式迭代过程中所需要的初始值，因显式提供了比较精确的初值，可减少隐式迭代的次数。如此逐步求得微分方程组的数值解。这种线性多步数值积分的算法称为“预估-校正算法”或简称 PECE

算法[4]。Talbot[5]根据天体力学中讨论的运动方程的特点，即右函数可分解为主要和次要两个部分，提出了一种所谓“部分预估-校正算法”或 PECE* 算法。PECE 算法和 PECE*算法均是天体力学中普遍采用的算法。

除了上述经典方法外，还有不少改进的线性多步法。如 Feagin 和 Beaudet[4] 使用“回代改正(Back-Corrections)”技术，推广了 Stormer-Cowell 公式，提出了一类新的线性多步法。实例计算表明这种新多步积分法比经典的多步积分法省时，并提高了数值解的精度和稳定度。而 Krogh[6]则提出了一套变步长的线性多步法。此外，在上述这些线性多步数值积分法中，高阶的虽比低阶的精确，且运算时间并不增加，但阶数越高，其稳定性越差，因此高于 14 阶的经典多步法，很少使用。最近黄天衣和 Valtonen[7]在数值积分公式里引进高阶导数(注：上述经典多步法只需计算到二阶导数)，构成了一类新的数值积分法，称为多导多步法（简记为MDMS)或 Obrechkoff 方法[8,9]。经局部截断误差估计，可知 MDMS 积分法都比经典多步法的精度高，但是它们中间的大多数的稳定性差。他们两人最后给出了无论在精度还是稳定性方面都比经典公式为好的 MDMSI 和 MDMSⅡ 两种公式。

2. 单步法

(1) 一阶微分方程组(1)的单步数值积分法的普遍形式为[1,2]：

$$x_{n+1}-x_n=h\phi(t_n,\ x_n,\ h) \tag{7}$$

而常用的 Runge-Kutta 方法(简写为 RK)的一般公式可写成：

$$x_{n+1}-x_n=h\sum_{i=1}^{s} b_i f_i \tag{8$_1$}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} & f_1=f(x_n,\ t_n) \\ & f_i=f\left(x_n+h\sum_{i=1}^{i-1} a_{ij}f_j,\ t_n+c_ih\right),\ i=2,3,\cdots s \end{aligned}\right\} \tag{8$_2$}$$

参数 a_{ij}, b_i, c_i 待定，s 表示每积分一步必须计算的右函数次数。(8_1)式便称为 s 点 RK 公式。如果理论解 $x(t_{n+1})$和近似解 x_{n+1} 相差为 h^{p+1} 阶小量，则 p 为(8_1)的阶数，且若 $s<5$，$p=s$；若$s\geqslant5$，$p<s$。可见 4 点 4 阶 RK 公式较优，每步计算 4 次右函数值，可以达到 4 阶，因此被广泛使用。RK公式也有显式和隐式之分。p 阶 RK 方法的局部截断误差以下式估计：

$$T_{n+1}\approx(x_{n+1}-x^*_{n+1})/(2^{p+1}-1) \tag{9}$$

其中 x^*_{n+1} 为当 t_{n-1} 步点以 $2h$ 为步长再次计算$x(t_{n+1})$所得近似值。(9)式既可用来估计精度，又可根据所要求达到的精度，用来有效地选取步长。

Fehlberg[10] 提出了一种使用嵌套技术的 RK 法，这种RK法可以方便地给出局部截断误差，并用来估计下一步的新步长，以保证所需精度，称之为“嵌套 RK 法”或 RKF 法。Fehlberg 给出了 $p(\leqslant8)$阶和 $p+1$ 阶的RKF5(6)，6(7)，7(8)，8(9)四组公式。根据实践，他认为更高阶公式不再能提高效益。

(2) 对于二阶微分方程组 (4)，早在 1925 年，Nyström 便提出了一种 RK 型数值积分法，称为 RKN 法。它的一般形式为[11]：

$$\left.\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\dot{x}_n h+h^2\sum_{i=1}^{s}b_i f_i\\ \dot{x}_{n+1}-\dot{x}_n&=h\sum_{i=1}^{s}\dot{b}_i f_i\end{aligned}\right\}\qquad(10_1)$$

其中
$$\left.\begin{aligned}f_1&=f(x_n,\ t_n)\\ f_i&=f\left(x_n+\dot{x}_n c_i h+h^2\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}f_j,\ t_n+c_i h\right),\ i=2,3,\cdots s\end{aligned}\right\}\qquad(10_2)$$

且 $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$。Fehlberg[11] 也推出了嵌套 RKN 法（$p\leqslant 8$），称为 RKNF 法，同样可以进行误差估计和步长控制。

Dormand 和 Prince[12] 为使上述嵌套公式更能灵活应用，为能确定更可靠的步长和更有效地控制误差，给出了一些新的 RKD 公式。通过与 RKF 比较，表明 RKD 较优。而 Everhart[13] 则展开了另一类隐式 RK 和 RKN 公式。

3．Taylor 级数法

对一阶微分方程组(1)，Taylor 级数法具有如下简单形成[1]：

$$x_1=x_0+hx_0^{(1)}+\frac{h^2}{2!}x_0^{(2)}+\cdots+\frac{h^r}{r!}x_0^{(r)}\qquad(11)$$

这里 $x_0^{(i)}$ 是 x 对时间 t 的第 i 阶导数在 t_0 的值。此法也称“时间序列法”。虽然(11)式看上去很简单，但实际上计算其中的高阶导数却不是件容易事。各阶导数的分析表达式如下：

$$\left.\begin{aligned}x^{(1)}&=f\\ x^{(2)}&=f_t+f_x f\\ x^{(3)}&=f_{tt}+2f_{tx}f+f_{xx}f^2+f_x^2 f+f_x f_t\\ &\vdots\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

其中 f_x 和 f_t 表示 f 对 x 和 t 的偏导数，以此类推。

因此 Taylor 型数值法的使用，其关键问题是寻求能简便和快速计算高阶导数的方法，如递推公式。此递推公式因所解具体运动方程而异。Steffensen[14] 建立了对应限制性三体问题和一般三体问题的求高阶导数的递推公式。Broucke[15] 和 Black[16] 根据 Steffensen 的思想，给出了对应一般 n 体问题的递推公式。Moran, Roy, Black[17] 和 Emslie, Walker[18] 推出了限制性问题的其他形式的递推公式。

Grobner[19] 推出了把(1)式的解展开为 Lie 级数形式的积分公式。此法与 Toylor 级数法一样，须寻求高阶 Lie 导数的递推公式。Hanslmeier 和 Dvorak[20] 根据 Grobner 的想法推导出了对 n 体问题适用的高阶 Lie 导数的递推公式。

4．外推法

数值积分时所选取的步长 h 不同，得到的数值近似解也不一样，故可把数值解作成是 h 的函数。于是如果某固定点 $t+H$ 时的解可表示为如下渐近展开式[1]：

$$x(t+H,h)=x(t+H)+\sum_{i=1}^{m}\tau_i h^i+O(h^{m+1})\qquad(13)$$

上式是收敛的，当 $h\to 0$ 时，便得到 $x(t+H)$。它应是更精确的解。其中的系数 τ_i 可由 $x(t+H,h)$ 对应所选用的步长系列 $h=H,h_1,h_2,\cdots h_m(H>h_1>\cdots>h_m>0)$ 的数值消去，变换成如下形式展开式：

$$x(t+H)=\sum_{i=0}^{m}C_{im}x(t+H,\ h_i)+O(H^{m+1}) \tag{14}$$

Gragg[21] 和 Stetter[22] 探讨了(13)式存在的条件。而且如果一个数值方法能给出平方收敛的渐近展开式：

$$x(t+H,\ h)=x(t+H)+\sum_{i=0}^{m}\tau_i h^{2i}+O(h^{2(m+1)}) \tag{15}$$

则外推法求解的效率将会高得多。Gragg[23] 得出中点法就能给出(15)式，并进一步用改进了的中点法也给出了渐近展开如(15)式，且稳定性比原来中点法好。

外推法曾经历了一个曲折发展过程。Burlirsch 和 Stoer[24] 早期提出了一种外推法的计算格式，并编写了程序用于解一阶微分方程组。Stoer 把此外推算法与其他算法比较，认为外推法是个好方法。然而 Merson[3] 把它用于一个限制性三体问题的求解，与用Cowell-Stormer 方法所得结果比较，发现它比后一方法计算速度慢了 5 倍，由此他认为外推法完全不适用于天体力学。后来 Burlirsch 改进了他的程序。最近，福岛登纪夫[25]以两体问题的数值解把外推法与 RKF 和 Adams-Moulton 等方法进行了比较，他得出结论，认为外推法适用于要求高精度的天体力学问题的数值解。

三、精度检验方法

天体力学数值积分方法中误差的产生是不可避免的，因此在给出数值结果的同时必须给出这个结果所具有的精度。反之，当某项工作提出具体的精度要求时，必须选择适当的数值积分方法，根据局部截断误差来选定步长，使得数值解的结果达到指定的精度标准。所有这些都必须采用一定的方法来检验数值结果的精度。根据天体运动的具体特点，天体力学中通常采用的精度检验方法有以下几种[1,2]。

最常用的方法是利用积分守恒关系式。天体的运动方程存在一些首次积分如能量积分，运动方程的理论解应该准确地满足能量积分关系式，但是数值解存在误差，它就不能准确地满足。由初始条件 t_0 时刻的 $x(t_0)$ 和 $\dfrac{dx(t_0)}{dt}$ 算出总能量为 E_0，而由 t 时刻的数值解 x_t，$\dfrac{dx}{dt}$ 算出的总能量为 E，$E\neq E_0$，$E-E_0$ 则反映了数值解的误差。

在各种积分守恒关系式中，能量积分比其他首次积分对误差更敏感，因此通常用能量积分来检验数值结果的精度。

取代能量积分等的使用，Szebehely 和 Bettis[26] 以及黄天衣和 Innanen[27] 还建议使用积分不变关系式，作为精度检验标准。

用积分守恒或积分不变关系来检验精度是常用的方法，但近年来的一些研究[27,28] 表明

这种检验标准有时候是很不可靠的。事实上，数值解总有停留在积分流型上的趋向，垂直于流型方向的误差要比流型上的误差小得多，也就是说数值积分有保持积分常数的倾向。对于两体问题而言，轨道根数中除了平近点角M外，所有根数都是积分常数，这些根数的误差累积要比平近点角小得多，而能量积分常数只和半长径有关，它并不能体现沿迹误差，也就不是数值方法精度检验的好标准。对N体问题($N>2$)也是如此，总能量E仍然是一个积分，因此它的误差累积也比较小，但坐标、速度的误差比较大。

对于积分不变关系也有类似情况，不太可能找到一个积分不变关系可以用来很好地反映坐标和速度的误差。关于这一点，黄天衣和Innanen[27]指出：这种检验技术的应用在稳定和有序的区域是好的，但在不稳定的和随机的区域则不太理想。因此，在用积分守恒或积分不变关系来作为检验标准时，要根据具体运动方程和所研究问题的特性，采取一些修正措施，方可较可靠地反映数值解的精度。

另外一种常用的精度检验方法是检验解的倒转性。由t_0时刻向前数值积分到时刻t，再由t时刻往后数值积分到t_0时刻，和t_0出发时刻的值比较来判断误差的大小。

根据天体的具体情况，也可以把数值解和对天体的观测作比较，来确定数值积分结果的精度。还可以用尽量精确的方法，尽量小的步长，更高精度的计算（如运用尽可能长的字长的计算机)来积分出一条“标准轨道”，用此同数值解比较来讨论所用数值方法的精度。

还有一些如同可解问题比较、重复积分等精度检验方法，在实际工作中用的不多，就不一一赘述了。

四、常用数值积分法软件包

天体力学中数值积分方法需化费巨大的计算工作量，考虑到数值积分方法的特点，显然它最适合于电子计算机上运算，而现代电子计算机技术的广泛和有效的使用，也促进了天体力学数值积分方法研究的迅速发展。下面是几种常用的数值积分方法软件包。

1. ABFS——Lundberg[29]编制的定阶定步 Adams-Bashforth 公式的算法，适用于一阶常微分方程组的数值解。

2. DIFSYS——Burlirsch 和 Stoer[24]编制的一种变步长有理外推法，原先用 Algol 语言写成，后改进用 Fortran 语言编写。有两个程序 BS_1 和 BS_2 分别适用于一阶和二阶常微分方程组。

3. DVDQ——Krogh[30]编制的变阶变步长算法，可用于一阶和二阶常微分方程组的数值解。其扩充版本为 DIVA。

4. EPISODE——Hindmarsh 和 Byrne[31]编制的变阶变步长 Adams-Moulton 公式的算法，适用于一阶常微分方程组的数值解。

5. KSGFS——Lungberg[29]编制的定阶定步长 Cowell 型算法，适用于二阶常微分方程组的数值解。

6. NBODY——Aarseth[37]编制的 n 体问题程序，其中采用 Taylor 型级数算法求数值解。

7. ODE——Shampine 和 Gordon[33] 编制的变阶变步 Adams 型算法，适用于一阶常微分方程组求数值解。

8. RADAU——Everhart[34] 编制的一个迭代定阶变长 RKN 型单步法的程序，适用于二阶常微分方程组求数值解。

9. RK 78——Mckenzie 和 Sepehrnoori[35] 编制的 8 阶 RKF 型算法程序，利用一个嵌套 7 阶 RKF 型算法程序作为步长自动选择，适用于一阶常微分方程组求数值解。

10. RKF $p(p+1)(p\leqslant 8)$——Fehlberg[10] 编制的定阶变步长嵌套 RK 型算法程序系列，适用于一阶常微分方程组求数值解。

11. RKNF $p(p+1)(p\leqslant 8)$——Fehlberg[11] 编制的定阶变步长嵌套 RKN 型算法程序系列，适用于二阶常微分方程组求数值解。

12 Schubart & Stumpf 程序[36]——由 Schubart 和 Stumpf 编制的 Stormer-Cowell 型定阶定步长算法程序，适用于二阶常微分方程组求数值解。

五、应 用

选用哪种数值积分方法和软件包最为合适？这主要看三个判据：1. 运算速度的快慢，2. 精度和稳定度的高低，3. 使用便利与否。至于积分起始值的需要与多寡，步长变化实施的难易等，就当前处于电子计算机发达的时代而言，并不是重要因素。可是，即使单纯按照此三个判据也很难确定方法和软件孰优孰劣，因为这些判据与所讨论的具体问题的动力学特性和要求的精度密切相关。至少可以这么说，对于动力系统的有序运动的研究，如果积分的时间跨度与所讨论的具体动力系统的基本周期相比较不算太长，且所要求的精度不算太高，则上面介绍的各种数值积分法和软件包都可应用。一般情形下，没有哪个方法比其他方法会好上很多，而是各有优缺点。但如果积分时间跨度长且精度要求高，则使用多步法较好，可节省计算时间。此时，单步法只作为辅助手段使用，如为多步法提供起始值。

自 40 年代电子计算机出现后，经典线性多步法被广泛应用于大数量小行星和彗星的精密历表的常规计算。例如 50 年代，美国辛辛那提天文台，苏联理论天文研究所和西德海得堡天文计算研究所相继编制的小行星历表和彗星历表。经典多步法也被成功地应用于大行星的历表编算和运动研究。例如 50 年代，Brouwer，Eckert 和 Clemence 编算的五个外行星的 1653—2060 年数值历表为各国天文年历广为采用。1973 年 Cohen 等[37]和 1985 年木下宙等[38]进而分别数值积分了外行星在一百万年和五百万年内的运动；又如目前普遍使用的美国喷气推进实验室编算的著名 DE 序列计算机数值历表给出了九大行星和月球直到 2050 年的直角坐标的数值。Runge-Kutta 型单步法在人造卫星的实时和短期预报中有实用价值，而 Adams-Cowell 型方法则普遍应用于人造卫星的较长期预报和精密定轨中[29,6]。各种多步法、单步法和纯粹 Taylor 级数法、外推法及其相应软件系统，也被成功地应用于研究限制性三体问题[8,24]、多体和 N 体问题的数值解[14-18]。例如研究球状星团和星系里众多恒星运动的轨道[39]，N 体问题的数值模拟[32]等。在电子计算机上实施数值积分运算，还可望对天体力学问题的定性研究进行数值探索。

总之，计算机化的数值积分法在天体力学以至更广义的动力天文学领域研究中的应用越来越广泛且越来越重要了。

参　考　文　献

[1] Kinoshita H. and Nakai H., Numerical Intergration in Dynamical Astronomy, in Proceedings of IAU Colloquium No. 109, Gaithersburg, U. S. A., July, 1988.
[2] 黄天衣，《人造卫星数值方法》，南京大学天文系讲义.
[3] Merson, R. H., RAE Technical Report 74184.
[4] Feagin T. and Beaudet, P. R., *Celestial Mechanics*, 13 (1976), 111.
[5] Talbot, T. D., JPL Space Programs Summary 37-59, Vol. II (1978).
[6] Krogh, F. T., in Lecture Notes in Mathematics, 362 (1974), ed. by D. G. Bettis, Springer-Verlag, Belin.
[7] Tian-Yi Huang and Valtonen M., *Celestial Mechanics*, 42 (1988), 223.
[8] Lambert, J. D., Computational Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons, (1973).
[9] Lambert, J. D. and Mitchell, A. R., *ZAMP*, 13, 223.
[10] Fehlberg, E., NASA TR, R-287 (1968).
[11] Fehlberg, E., NASA TR, R-381 (1972).
[12] Dormand, J. R. and Prince, P. J., *Celestial Mechanics*, 18 (1978), 223.
[13] Everhart, E., *Celestial Mechanics*, 10 (1974), 35.
[14] Steffensen J. F., *Math. Fys. Medd. Dansk. Vid. Selskap.*, 31 (1957), No. 3.
[15] Broucke, R., *Celestial Mechanics*, 4 (1971), 110.
[16] Black W., *Celestial Mechanics*, 8 (1973), 357.
[17] Moran, P. E., Roy, A. E. *and* Black, W.,*Celestial Mechanics*, 7 (1973), 122;8 (1973), 405.
[18] Emslie, A. G. and Walker, I. W., *Celestial Mechanics*, 19 (1979), 147.
[19] Grobner, W., VEB Deutscher Verlar der Wissenschasten, Berlin (1967).
[20] Hanslmeier, A. and Dvorak, R., *Astronomy and Astrophysics*, 132 (1984), 203.
[21] Gragg, W., Repeated Extrapolation to the Limit in the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, Dorctoral Dissertation, University of California, Los Angels, (1963).
[22] Stetter, H. J., *Computing*, 5 (1970), 267.
[23] Gragg, W., *SINUM*, 2 (1965), 384.
[24] Burlirsch, R. and Stoer, J., *Num. Math.*, 8 (1966), 1.
[25] Fukushima, T., Tests of the Extrapolation Method for the Numerical Intergration of the Keplerian Motion, in Proceedings of IAU Colloquium No. 109, Gaithersburg, U. S. A., July, 1988.
[26] Szebehely, V. and Bettis,D. S.,Recent Developments of Intergrating the Gravitational Problem of N-Bodies, in Gravitational N-Body Program, ed. by Lecar, p. 136, D. Reidel, (1972).
[27] Tian-Yi Huang and Innanen, K. A., *Astron. J*, 88 (1983), 870.
[28] Kinoshita, H., *Publ. Astron. Soc. Japan*, 20 (1968), 1.
[29] Lundberg, J. B., IASOM TR81-1 (1981), the University of Texas at Austin.
[30] Krogh F. T., JPL Technical Utilization Document, No. cp-238, (1970).
[31] Hindmarsh, A. C. and Byrne, G. D., EPISODE, UCID-30112, Lawrence Livermore Laboratory, (1975).
[32] Aarseth, S. J., Numerical Experiments on the N-Body Problem, in Gravitational N-Body Problem, ed. by Lecar, p. 29, D. Reidel, (1972).
[33] Shampine, L. G. and Gordon, M. K., Computer Solutions of Ordinary Differential Equations, Freeman, San Francisco, (1975).
[34] Everhart, E., Listing and Exploration of Program RADAU, Physics/Astronomy Tech. Rep., the University of Denver, (1974).
[35] Mckenzie R. E. and Sepehrnoori K., IASOM TR 78-6 (1978), the University of Texas at Austin.
[36] Schubart, J. and Stumpf, P., Verof. Astron. Rechen-Inst., Heidelberg, Nr. 18, (1966).
[37] Cohen, C. J., Hubbard E. C. and Oesterwinter, C., *Astronomical Papers of the American Ephemeris*, 22 (1973),1.
[38] Kinoshita, H. and Nakai, H., *Celestial Mechanics*, 34 (1984), 203.
[39] Papp, K. A., Innanen, K. A. and Patrick, A. T., *Celestial Mechanics*, 21 (1980), 337.

（责任编辑　刘金铭）

Numerical Integration Methods in Celestial Mechanics

Zhang Jie He Miaofu

(Shanghai Observatory, Academia Sinica)

Abstract

This paper reviews various numerical integration methods applied in celestial mechanics. The methods of accuracy check in numerically integrated results have been introduced as well. Finally, some popular computer softwares of numerical integrator have been listed.