

人造卫星运动中的轨道共振*

刘林 廖新浩 赵长印

(南京大学天文系)

提 要

本文采用受摄理想共振模型,对人造卫星运动中所发生的各类轨道共振作一具体分析,给出相应的共振特征及其演化性态,为摄动计算中考虑共振项的取舍提供理论依据。

一、问题的提出

关于人造卫星有摄星历表的计算,无论是用分析方法还是数值方法,都要了解各种力学(摄动)因素对卫星轨道影响的特征,以便建立起合理的动力模型,使其恰当地包含应考虑的因素。在用分析方法构造摄动解(级数解)时,会遇到小分母问题,它对应摄动(天)体的某种固有运动周期 T' 与受摄天体的运动周期 T (或某一轨道根数的变化周期)之间的通约情况,即 $T'/T = p/q$ (p, q 为正整数),或同一摄动因素引起两个轨道根数变化周期之间的通约情况。级数解的周期项伴有 $1/(qn - pn')$ 这种因子,其中 n 和 n' 各为周期 T 和 T' 对应的角频率(或角速度),对于通约情况,即有 $qn - pn' \approx 0$,这就出现了小分母。由于小分母的存在,导致相应周期项的振幅变大,这类似于强迫振动的共振现象。因此,人们将上述通约情况对应的力学现象称为轨道共振(Orbital Resonance)。但是,这种共振是否意味着某一轨道根数的变化幅度愈来愈大?了解这一问题的实质,不仅是分析方法的需要,对数值方法同样有意义,它是建立合理的动力模型时必须搞清的问题之一。研究表明,轨道共振现象与强迫振动中的共振现象有很大的差别,当接近通约时,相应周期项的振幅确实增大,但增大到某一程度时(对应一种临界状态),性质发生变化,相应的振幅反而逐渐减小,到某一状态时,振幅为零,出现“平衡”态(也叫平衡点或称动点)。与这一特殊状态对应的区域称为轨道共振区域,以后简称共振区域,在一定近似条件下,共振区域内的运动状态与一个数学摆对应的现象类似。上述现象就是轨道共振的主要特征。

人造卫星运动中的共振现象主要有下面几种类型:

1. 卫星运动与地球引力位非旋转对称项(田谐项)之间发生的轨道共振,主要有 24^h 地球同步卫星与 $J_{2,2}$ 项的 $1/1$ 共振, 12^h GPS 卫星与 $J_{3,2}$ 项的 $2/1$ 共振等;
2. 地球引力位主要带谐项(J_2 项)引起的拱线与升交点方向变化之间的 $1/1$ 共振;

* 国家自然科学基金资助项目。

1990年10月30日收到。

3. 太阳同步卫星(如我国的风云号气象卫星)运动中升交点变化与太阳运动之间的 1/1 共振;

4. 卫星轨道面的变化与日、月轨道面变化(对地球赤道面)之间的 1/1 共振。

关于第一种共振现象, 对应的动力模型是一种特殊的限制性三体问题, 中心天体是作为均匀球体的地球, 而摄动天体就是地球非旋转对称部分, 每一田谐项 $J_{n,m}$ ($n \geq 2$, $m = 1, 2, \dots, n$) 即相当于一个摄动体, 它的特殊之处是“固定”在地球上, 绕地球的运动周期与地球自转周期相同。通约情况的产生, 即卫星运动周期与摄动体的运动周期(即地球自转周期)成简单整数比。24^h 卫星对应 1/1, 12^h 卫星对应 2/1, \dots 。通约项的判据为^[1]

$$\frac{\bar{n}}{n'} = \frac{p}{q} = \frac{m}{s} \quad s = 1, 2, \dots \quad (1)$$

其中 $\bar{n} = 2\pi/T$, $n' = 2\pi/T'$, m 是田谐项 $J_{n,m}$ 的第二个下标。由此判据可知: 所有的田谐项 $J_{n,m}$ ($n \geq 2$, $m = 1, 2, \dots, n$) 都会使 24^h 地球同步卫星轨道摄动变化中出现通约项。对于 12^h 卫星, $p/q = 2/1$, 因此, 所有 $J_{n,2k}$ ($n \geq 2$, $k = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) 这类田谐项都会引起通约项。

但对于 24^h 卫星, 主要共振源是 $J_{2,2}$ 项, 而对于 12^h 卫星, 主要共振源则为 $J_{3,2}$, 它们是相应通约项不伴随小因子 e^l ($l = 1, 2, \dots$, e 即轨道偏心率) 的最低阶田谐项。上述因子 $(qn - pn')$ 出现在相应周期项的分母中, 从而形成小分母问题。

关于第二种共振现象, 即众所周知的临界倾角问题。在 J_2 项摄动下, 卫星轨道的拱线相对升交点方向的转动角速度为

$$\dot{\omega} = (\dot{\omega}) - \cos i \dot{\Omega} = \frac{3J_2}{2p^2} n \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \quad (2)$$

其中 $(\dot{\omega})$ 是相对空间固定方向的绝对变化速度, $p = a(1 - e^2)$, $n = a^{-3/2}$, a, i 各为轨道半长径和倾角。通约项的产生源于 $\dot{\omega} = 0$, 即 $(\dot{\omega}) / \cos i \dot{\Omega} = 1/1$, 相应的倾角 $i = i_c = 63^\circ 26'$ 或 $116^\circ 34'$, 而 $\dot{\omega}$ 将出现在所有轨道根数摄动变化的长周期项分母中, 从而形成小分母问题。

关于第三种共振现象, 所谓太阳同步卫星, 是指卫星轨道面的旋转与太阳运动(地球自转的反映)同步, 即 $\dot{\Omega} \approx 1^\circ/d$ 。在太阳对卫星轨道的摄动项中, 存在以 $(\Omega - L')$ 为幅角的周期项^[1], L' 是太阳的平黄经。因此, 上述同步要求即对应 $\dot{\Omega} - n' = 0$ 或 $\dot{\Omega}/n' = 1/1$, 这里的 n' 即太阳平黄经变化率。 $(\dot{\Omega} - n')$ 这一因子将出现在相应周期项的分母中, 从而引起小分母问题。

最后一种共振现象也是出现在日、月摄动中, 相应摄动项中有以 $(\Omega - \Omega')$ 为幅角的周期项, Ω' 是日、月轨道面升交点的经度, 对于月球, $\dot{\Omega}' \approx -0.53^\circ/d$, 当卫星升交点经度的变率 $\dot{\Omega}$ 接近该值时 ($i \leq 90^\circ$ 的近地卫星和 24^h 地球同步卫星均可发生此情况), 即 $\dot{\Omega}/\dot{\Omega}' \approx 1/1$, 此时出现 $(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}')$ 这种形式的小分母。

由于上述小分母问题, 按常用方法构造摄动解时要出现奇点, 但在运动方程的右函数中并无这类奇点。显然, 这是构造级数解的方法问题, 若改变方法, 就可消除它。但是, 这类轨道共振现象的特征是什么, 相应的轨道变化与非共振情况有无重大差别, 变化的幅度增大到何种程度, \dots , 都是需要了解的。如果直接考查运动方程, 那是无法回答上述问题的, 因

为方程过于复杂,用目前的数学工具还无法讨论它。关于 $\dot{\omega} = 0$ 对应的临界倾角问题和 24^h 地球同步卫星的通约问题,文献[2]—[4]曾分别用近似分析方法和定性方法讨论过,并分别给出了类似的结论,而另外一些工作主要是考虑共振项的计算问题。本文是在文献[3]和[4]的基础上,采用一种受摄理想共振模型^[5],将上述各种共振现象统一起来作一综述,并阐明其中的几个重要问题。

二、受摄理想共振的数学模型

上述几种轨道共振问题可分为两类,第一和第二种各为其典型代表。下面就这两种情况来介绍受摄理想共振的数学模型,由此得出的各种结论同样可用于解释第三和第四种共振现象的有关问题。

首先讨论 24^h 地球同步卫星与 $J_{2,2}$ 项之间的 1/1 共振情况。引进下述变量^[11]:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{L} &= \sqrt{a} & \tilde{l} &= M + \omega + \Omega - \theta_{2,2} \\ \tilde{G} &= G - \tilde{L} = \sqrt{a(1-e^2)} - \tilde{L} & \tilde{g} &= \omega \\ \tilde{H} &= H - \tilde{L} = \sqrt{a(1-e^2)} \cos i - \tilde{L} & \tilde{h} &= \Omega \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 $\theta_{2,2} = (\theta_{2,2})_0 + n'(t-t_0)$, $(\theta_{2,2})_0 = \text{const}$, n' 是恒星时变率。这是一组正则共轭变量,相应的 Hamilton 函数为

$$F = \left(\frac{1}{2\tilde{L}^2} + n' \tilde{L} \right) + R \quad (4)$$

R 是摄动函数。同时考虑 J_2 项和 $J_{2,2}$ 项摄动,在地心赤道坐标系中,通过变换^[1,3-5],消除 F 中的一般周期项,得

$$F_{ir} = \left(\frac{1}{2\tilde{L}^2} + n' \tilde{L} \right) + R_c + \frac{3(-J_{2,2})}{4\tilde{L}^6} (1+\theta)^2 \cos 2\tilde{l} \quad (5)$$

其中 $\theta = \cos i = (\tilde{H} + \tilde{L})/(\tilde{G} + \tilde{L})$, R_c 是长期项^[11]。关于 12^h 卫星与 $J_{3,2}$ 项之间的 2/1 共振,需同时考虑 J_2 项和 $J_{3,2}$ 项摄动,相应的变量(3)应改为

$$\left. \begin{aligned} \tilde{L} &= \sqrt{a} & \tilde{l} &= M + \omega + 2\Omega - 2\theta_{3,2} \\ \tilde{G} &= \sqrt{a(1-e^2)} - \tilde{L} & \tilde{g} &= \omega \\ \tilde{H} &= \sqrt{a(1-e^2)} \cos i - 2\tilde{L} & \tilde{h} &= \Omega \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中 $\theta_{3,2} = (\theta_{3,2})_0 + n'(t-t_0)$, $(\theta_{3,2})_0 = \text{const}$, 同样可得

$$F_{ir} = \left(\frac{1}{2\tilde{L}^2} + 2n' \tilde{L} \right) + R_c + \frac{15(-J_{3,2})}{8\tilde{L}^8} \sin i (1 - 2\cos i - 3\cos^2 i) \sin \tilde{l} \quad (7)$$

这里 $\cos i = (\tilde{H} + 2\tilde{L})/(\tilde{G} + \tilde{L})$, R_c 与上相同。

对于上述两种情况,原 Hamilton 系统的 F 可表示为

$$\left. \begin{aligned} F &= F_{ir} + \Delta F \\ \Delta F &= R - (R_c + R_r) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

此即受摄理想共振的数学模型,其中 F_{ir} 对应的问题即理想共振(Ideal Resonance)问题^[3,4],而实际共振问题被分解成两个部分:理想共振和摄动部分。由(5)式和(7)式可知, F_{ir} 不显

含 t , 也不含 \tilde{g} 和 \tilde{h} , 因此存在三个积分:

$$F_{ir} = h, \quad \tilde{G} = \tilde{G}_0, \quad \tilde{H} = \tilde{H}_0 \quad (9)$$

显然, 理想共振系统实际上对应一个自由度 (\tilde{L}, \tilde{l}) 系统, 它是可积的。故系统(8)中的 F_{ir} 就相当于受摄二体问题中的二体问题, 相应的共振的主要特征可以由 F_{ir} 系统反映出来。实际上 \tilde{l} 是卫星与地球的“对称轴”之间的一个会合经度, 轨道共振的基本特征就是 \tilde{l} 的变化呈现如下形式

$$\tilde{l} = \tilde{l}_c + \alpha(t) \quad (10)$$

其中 $\tilde{l}_c = \text{const}$, $\alpha(t)$ 是一“周期”量。因此 \tilde{l} 是反映轨道共振特征的一个重要参数。

现在讨论临界角问题。通常地球引力位中的 J_2, J_3, J_4 三项都是同时考虑的, 但 J_3 项与临界角无关, 因此只需考虑 J_2 和 J_4 项。前面已指出, 临界角问题是由于轨道拱线转动与节线转动(确切地说是该转动的“投影” $\cos i \dot{\Omega}$) 之间的 1/1 通约引起的, 那么 ω 就相当于前面的会合经度 \tilde{l} , 为此引进 Delaunay 变量:

$$\left. \begin{aligned} L &= \sqrt{a} & l &= M \\ G &= \sqrt{a(1-e^2)} & g &= \omega \\ H &= \sqrt{a(1-e^2)} \cos i & h &= \Omega \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

同样用变换方法可给出

$$\left. \begin{aligned} F_{ir} &= R_c + R_r \\ R_r &= \frac{3J_2^2}{64L^3G^7} \left[(1-16\theta^2+15\theta^4) + 5 \left(\frac{J_4}{J_2^2} \right) (1-8\theta^2+7\theta^4) \right] e^2 \cos 2g \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中 R_c 是长期项^[1], $\theta = \cos i = H/G$, $e^2 = 1 - G^2/L^2$ 。 F_{ir} 同样不显含 t 和 l , h , 亦存在三个积分:

$$F_{ir} = h, \quad L = L_0, \quad H = H_0 \quad (13)$$

原系统也简化成一个自由度 (G, g) 问题, 这里已略去零阶项 $1/2L^2$, 因它对讨论 G 和 g 的变化无贡献。于是原问题又可写成形如(8)式的受摄形式。

采用上述模型, 轨道共振问题将归结为两个内容, 一是仔细分析理想共振的各种特征, 另一个重要的也是最困难的问题是考虑摄动部分 ΔF 后, 理想共振的特征会发生什么样的变化? 它是否能反映轨道共振的基本特征?

三、理想共振的主要结果

上述两类情况的 F_{ir} 可表示为同一形式:

$$F(y, x) = B(y) + 2A(y) \sin^2 x \quad (14)$$

其中右端第二项即主要通约项, 并有

$$A(y) > 0, \quad A(y)/|B(y)| = 0(\epsilon) \quad (15)$$

这里出现的小参数 ϵ 是 Hamilton 函数中通约项相对主项的大小, y, x 即共振变量。与(5), (7)和(12)式相比, 有如下对应关系:

对于 24^h 地球同步卫星的 1/1 共振情况, 有

$$y = \tilde{L}, \quad x = \tilde{l} - \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

对于 12^h 卫星的 2/1 共振情况, 有

$$y = -2\tilde{L}, \quad x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \tilde{l}\right) \quad (17)$$

对于临界角问题的 1/1 共振情况, 有

$$y = G, \quad x = g - \frac{\pi}{2} \quad (18)$$

系统(14)对应的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial F}{\partial x} = P(y, x) = 2A \sin 2x \\ \dot{x} &= \frac{\partial F}{\partial y} = Q(y, x) = -B' - 2A' \sin^2 x \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中 B' 和 A' 分别为 $B(y)$ 和 $A(y)$ 对 y 的导数, 而 $B' \approx 0$ 即对应共振态。在共振态下, 当满足一定条件时, 方程(19)存在平衡解:

$$y = y_0, \quad x = x_0 \quad (20)$$

y_0 和 x_0 满足 $P(y_0, x_0) = 0, Q(y_0, x_0) = 0$ 。显然, $x_0 = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, \dots$, 由于周期性, 只需讨论 $x_0 = 0$ 和 $\pi/2$ 。

由于系统(14)存在“能量积分”:

$$F(y, x) = h \quad (21)$$

因此, 由 Dirichlet 定理^[8]可知, 下列判别式

$$\Delta = ad - bc \quad (22)$$

的符号完全确定平衡解的性质。其中

$$a = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0, \quad b = \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0, \quad c = \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_0, \quad d = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_0 \quad (23)$$

下标“0”表示在平衡点(y_0, x_0)处取值。

计算结果表明, 对于 24^h 地球同步卫星, $\tilde{l}_c = \pi/2, 3\pi/2$ 对应中心点, $\tilde{l}_s = 0, \pi$ 对应鞍点; 对于 12^h 卫星, $\tilde{l}_c = \pi/2$ 对应中心, $\tilde{l}_s = 3\pi/2$ 对应鞍点; 对于临界角问题, $\omega_c = \pi/2, 3\pi/2$ 对应中心, $\omega_s = 0, \pi$ 对应鞍点。在相平面上, 中心点附近轨线分布的状态(闭轨线, 见图 1), 表明 \tilde{l} 和 ω 的变化受到限制, 即卫星的会合经度(对 24^h 卫星就是相对地面固定点的经度, 对 12^h 卫星稍有不同)或拱线在“平衡”位置附近摆动。这一现象称为天平动(Libration), 闭轨线分布的区域就称为天平动区域, 即图 1 中通过鞍点的虚线(临界线)包围的区域。在此区域内, 角动量 \tilde{L} (即 \sqrt{a}) 或 G (即面积速度 $\sqrt{a(1-e^2)}$) 的振幅有限, 而不是“无限”增大, 此即共振的基本特征。在天平动区域外, \tilde{l} 或 ω 的变化不受任何限制, 是循环的; 而角动量 \tilde{L} 或 G 变化的最大幅度 $\Delta\tilde{L}$ 或 ΔG (即图 1 中的 Δy) 就称为共振带的宽度, 它一方面表明了中心点附近闭轨线分布的“邻域”这一定性概念的具体尺度, 同时又表明了通约情况下, 相应周期项的振幅增大是有“极限”的, 可以证明它的量级为 $O(\epsilon^{1/2})$ 。

具体估计式为^[10]

$$\Delta y = \sqrt{4A/B''} = 0(\epsilon^{1/2}) \quad (24)$$

其中 A, B'' 在中心点处取值, 有

$$\left. \begin{aligned} B(y_c) = 0(1), \quad B''(y_c) = 0(1) \\ A(y_c) = 0(\epsilon), \quad A'(y_c) = 0(\epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

上述共振带的宽度表明, 当 y 值接近通约 ($B' \approx 0$) 的程度达 $\epsilon^{1/2}$ 这一量级时, 轨道共振将会出现“异常”现象, 即可能由正常的周期运动进入天平动的摆动状态。因此,

$B' = 0(\epsilon^{1/2})$ 或 $\Delta y = y - y_c = 0(\epsilon^{1/2})$ 是表达通约特征的一个重要判据。它一方面表明, 在通约情况下, 相应周期项振幅增大的范围, 即只能由 ϵ 量级增大到 $\epsilon^{1/2}$ 的量级; 另一方面由共振态性质的转化, 证实了在用变换方法按小参数 ϵ 的幂构造级数解时, 当 $|B'| = \delta, \delta > \epsilon^{1/2}$ 时方法仍然有效, 而当 $\delta < \epsilon^{1/2}$ 时方法即失效的力学背景。

在天平动区域外, 当通约情况出现时, 相应周期项的周期也在变长, 而“进入”天平动区域后, 趋向中心点时, 振幅减小, 相应的共振周期也随之变小, 但到达一定程度时, 这一周期又几乎不变, 即与振幅无关, 与数学摆类似。只要将方程(19)在中心点附近进行线性化, 即可导出^[10]

$$T_r = \frac{2\pi}{\sqrt{4AB''}} \quad (26)$$

其中 A, B'' 在中心点 (y_c, x_c) 处取值。

四、数值验证

下面列出理想共振的数值结果, 它可以证实上一段理论分析的正确性, 而且对于有关问题的考虑也有参考价值。

1. 24^h 地球同步卫星的有关结果

初值条件为 $e_0 = 0.02, i_0 = 1^\circ.0 \approx 0.02, \tilde{l}_0 = 90^\circ$ 。取不同的周期 T (或半长径 a) 时, 给出描绘共振特征的三个量: $\Delta a, \Delta \tilde{l}$ 和 T_r , 它们在表 1 中列出的结果分别表示 a, \tilde{l} 在平衡点 (a_0, \tilde{l}_0) 附近的变化范围, T_r 是共振周期。

由表 1 中的数据可知共振带的宽度:

$$\begin{aligned} \Delta a &= 34 \text{ km} & \Delta a/a &= 0.8 \times 10^{-3} \\ \Delta T &= 1^m 44^s & \Delta T/T &= 1.2 \times 10^{-3} \\ \Delta y &= \Delta \tilde{l} & &= 1.04 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

当 i_0 改为 $0^\circ.5$ 时, 表 1 中的结果几乎不变。该问题对应的 ϵ 的量级为 10^{-6} , 因此, 上述结果与理论分析完全相符。天平动区域内的振动情况, 由共振参数 a 和 \tilde{l} 的变化规律表达得很清楚, 而共振周期 T_r 由大变小, 接近中心点时 (即深振区), T_r 几乎不变, 当 \tilde{l} 的振幅在 20° 以内时, $T_r \approx 2.3 \text{ yr}$, 具体情况见表 2。表 2 中的 $\Delta \tilde{l}$ 表示振幅。

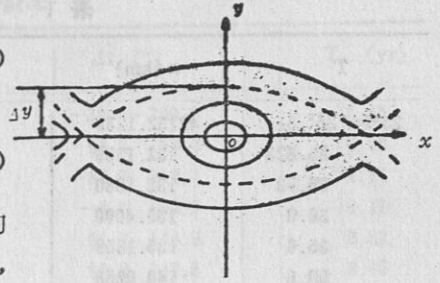


图 1 相平面上的轨线分布

表 1 24^h 地球同步卫星的 1/1 共振情况

T	a (km)	Δa (km)	$\Delta \tilde{i}$ (°)	T_r (yr)
23 ^h 54 ^m 25 ^s .8	42132.1283		循环	
25.823	132.1359	42132.1-42200.0	0.2-179.8	10.08
25.92	132.1680	132.2 200.0	2.5 177.5	6.50
30.0	133.4990	133.5 198.7	16.3 163.7	3.87
35.0	135.1308	135.1 197.0	24.3 155.7	3.36
50.0	140.0258	140.2 192.1	39.9 140.1	2.79
55 05.0	144.9206	144.9 187.2	51.5 128.5	2.55
20.0	149.8150	149.8 182.3	61.4 118.6	2.41
35.0	154.7092	154.7 177.4	70.5 109.5	2.33
50.0	159.6031	159.6 172.5	79.0 110.0	2.28
56 05.0	164.4967	164.5 167.6	87.3 92.7	2.26
23 56 09.82	42166.0680	几乎不变	90.0- 90.0	2.26
23 56 10.0	42166.1278	几乎不变	89.9- 90.1	2.26
56 15.0	167.7589	164.4 167.8	87.1 92.9	2.26
30.0	172.6520	159.5 172.7	78.8 101.2	2.27
45.0	177.5448	154.6 177.5	70.2 109.7	2.33
57 00.0	182.4374	149.7 182.4	61.2 118.8	2.41
15.0	187.3297	144.8 187.3	51.2 128.8	2.55
30.0	192.2217	139.9 192.2	39.6 140.4	2.79
45.0	197.1134	135.1 197.1	23.9 156.1	3.38
50.0	198.7439	133.4 198.7	15.8 164.2	3.91
53.85	199.9994	132.2 200.0	2.5 177.5	6.50
53.95	200.0157	132.1 200.0	0.2-179.8	10.36
57 54.0	42200.0483		循环	

表 2 24^h 地球同步卫星深振区的共振周期

$\Delta \tilde{i}$ (°)	0.017	0.084	0.169	0.338	0.844	1.688	3.377	8.469	17.129
T_r (yr)	2.2608	2.2608	2.2608	2.2608	2.2608	2.2608	2.2628	2.2731	2.3121

2. 12^h 卫星的有关结果

就用 GPS 卫星作为计算的背景, 初始条件为 $e_0 = 0.01$, $i_0 = 55^\circ$ 。计算结果列于表 3 和表 4。

从表 3 中看出, 共振带的宽度为

$$\Delta a = 6 \text{ km}, \quad \Delta a/a = 2.18 \times 10^{-4}$$

$$\Delta T = 14^{\text{s}}.1, \quad \Delta T/T = 3.27 \times 10^{-4}$$

$$\Delta \tilde{L} = \frac{1}{2} \Delta y = 2.23 \times 10^{-4}$$

该问题对应的 ε 的量级为 0.6×10^{-7} , $\varepsilon^{1/2} = 2.45 \times 10^{-4}$ 。因此, 上述结果同样符合理论分析。显然, 共振带的宽度比 24^h 卫星对应的宽度窄得多, 但 GPS 卫星正好“落”在深振区, 非常靠近中心点。天平动区域内的振动情况也很清楚, 当 \tilde{i} 的振幅在 20° 以内时, $T_r \approx 8.4$

表 3 12^h 卫星的 2/1 共振情况

T	a (km)	Δa (km)	$\Delta \tilde{l}$ ($^{\circ}$)	T_r (yr)
11 ^h 57 ^m 44 ^s .28	26554.4790	26554.5 - 26566.1	-86.8 - 266.8	26.46
44 .50	554.5695	54.6 66.0	-69.5 249.5	16.60
46 .00	555.1861	55.2 65.4	-32.7 212.7	11.74
48 .00	556.0082	56.0 64.5	-4.8 184.8	10.18
52 .00	557.6525	57.7 62.9	36.2 143.8	8.82
55 .00	558.8857	58.9 61.7	62.2 117.8	8.46
11 57 58 .38	26560.2750	不 变	90.0 90.0	
11 57 58 .68	26560.4000	60.2 60.4	87.6 92.4	8.34
58 02 .00	561.7629	58.8 61.8	60.3 119.7	8.48
05 .00	562.9960	57.6 63.0	34.1 145.9	8.88
09 .00	564.6400	55.9 64.6	-7.6 187.6	10.17
11 .00	565.4620	55.1 65.5	-36.9 216.9	11.99
12 .25	565.9758	54.6 66.0	-69.0 249.0	16.50
11 58 12 .48	26566.0703	26554.5 - 26566.1	-86.5 - 266.5	25.84

表 4 12^h 卫星深振区的共振周期

$\Delta \tilde{l}$ ($^{\circ}$)	0.099	0.198	0.988	1.976	2.965	5.932	19.864
T_r (yr)	8.3395	8.3395	8.3395	8.3395	8.3395	8.3450	8.4025

yr, 具体情况见表 4。

3. 临界角问题的有关结果

计算结果与上述情况类似, 同样符合理论分析, 文献[4]中有部分结果, 这里不再一一列出。其中 e_0 取 0.1 时, 反映共振宽度的 $\Delta i = 0^{\circ}.04 = 0.7 \times 10^{-3}$, e_0 取 0.18 时, $\Delta i = 0^{\circ}.18 = 1.4 \times 10^{-3}$ 。由于通约项伴随 e^2 因子, 相应的 ε 的量级较小, 即使对于近地卫星 ($a \approx 1$), e_0 取 0.2, ε 的量级也只有 10^{-6} , 即 $e^{1/2} = 10^{-3}$, 而略去的短周期项的振幅就是这一量级, 因此, 对于实际运动而言, 共振效应太弱。

上述各类情况的结果表明, 在理想共振模型中, 共振的特征是十分明显的, 但若考虑(8)式中摄动项 ΔF 或其他摄动因素后, 这些特征是否还能保持? 这是一个很重要的问题。如果能保持, 那么这种共振运动是有意义的, 否则就无实际意义, 和非通约情况相当。

五、共振运动的实际情况

对于理想共振模型, 中心点附近轨线分布的拓扑结构, 一般是不稳定的, 即考虑摄动项后, 中心点附近的闭轨线要“解体”。但在实际问题中, 人们关心的并不是这一点, 而是考虑下述问题: 在理想共振模型基础上加入摄动项 ΔF (或包括更多的摄动因素) 后, 又回到 3 个自由度的动力系统, 相平面 (\tilde{L}, l) 或 (G, g) 上闭轨线 $\varphi(y, x) = c$ 的拓扑结构变或不变, 意义不大, 而天平动现象是否还存在却很重要, 即会合经度 \tilde{l} 和 ω 是呈摆动状态还是变为正

常的循环状态? 相应的角动量 \tilde{L} (或 a) 和 G (或用 i 表达) 的变化是否仍为振幅的量级不超过 $e^{1/2}$ 的长周期变化? 亦即共振的主要特征是否能保持, 由此, 从天平动特征这一角度引出了关于轨道共振结构稳定性的一种提法^[5]。如果能保持有关参数的摆动状态, 就有实际意义, 相应的运动确实有别于非共振运动, 而不仅仅是一个单纯的构造级数解的数学方法问题。

由于考虑 ΔF (或再增加其它摄动因素) 后, 系统太复杂, 要严格回答上述问题, 目前还不可能, 但可用近似分析方法和数值探索的办法来解决。对于 ΔF 中的一般周期项的影响, 只要其振幅明显比 $[e^{1/2}]$ 小, 则不改变 \tilde{L} 和 ω 的摆动等性质, 这在文献[11]中有过详细的讨论。对于人造卫星运动的大气阻力这种耗散因素, 只要它相对 J_2 项为高阶小量, 也不影响共振的拓扑结构。对于上述完整的动力系统, 采用数值探索的方法, 考查长时间间隔共振态的演化, 可以证实在某些情况下, 理想共振反映的主要特征, 在实际运动中是可以保持的。

对于临界角问题, 由于本身的共振效应太弱, 考虑 ΔF 后, 天平动现象完全消失, 因此, 拱线摆动现象实际上是不会出现的。

对于 24^h 卫星和 12^h 卫星的共振情况则不然, 它们的共振特征在不同程度上被保持下来。下面用数值结果来表明这一点。计算中 ΔF 的内容增多, 除完整地考虑 $J_{n,m}$ ($n=2,3,4$, $m=0,1,\dots,n$) 项的摄动外, 还考虑了另一主要摄动因素: 日、月引力影响(日、月轨道处理成不变椭圆)。计算结果分别列于表 5 和表 6。表中所列数值是 5—10 个共振周期的结果, 这样长的时间间隔已能说明问题。

表 5 24^h 卫星的轨道变化

T	a (km)	Δa (km)	$\Delta \tilde{i}$ (°)	T_r (yr)
$23^h 54^m 20^s . 0$	42130.2355		循 环	
22 . 0	130.8882	42130.7—42200.7	12.6—156.5	3.93
25 . 823	132.1359	131.6 199.3	21.8 151.6	3.30
30 . 0	133.4990	133.0 198.1	28.3 147.0	3.01
35 . 0	135.1308	134.7 196.2	34.3 142.2	2.79
50 . 0	140.0258	139.6 191.4	47.7 131.0	2.45
55 05 . 0	144.9206	144.5 186.6	58.1 121.6	2.27
20 . 0	149.8150	149.5 181.9	67.0 113.2	2.16
35 . 0	154.7092	154.3 177.0	75.3 105.2	2.10
50 . 0	159.6031	159.3 172.1	83.0 97.6	2.07
23 56 04 . 0	42164.1704	42163.6—42167.6	89.9 90.8	2.00
10 . 0	166.1278	161.7 168.9	87.5 93.4	2.06
15 . 0	167.7589	160.5 170.5	85.0 95.7	2.06
30 . 0	172.6520	155.7 175.4	77.3 103.0	2.09
45 . 0	177.5448	150.7 180.6	69.2 111.1	2.15
57 00 . 0	182.4374	145.8 185.5	60.5 119.4	2.24
15 . 0	187.3297	140.9 190.3	50.6 128.5	2.39
30 . 0	192.2217	136.2 194.9	38.3 139.3	2.67
45 . 0	197.1134	131.1 199.9	17.8 154.5	3.57
47 . 0	197.7656	130.7 200.4	11.8 157.0	3.97
50 . 0	198.7439		循 环	

表 6 12^h 卫星的轨道变化

T	a (km)	Δa (km)	$\Delta \tilde{i}$ ($^{\circ}$)	T , (yr)
11 ^h 57 ^m 48 ^s .00	26556.0082	26552.7-26567.9	-59.1 - 260.1	13.39
58 .68	560.4000	55.8 64.1	-12.9 127.3	10.08
58 00 .00	560.9409	57.2 62.9	56.4 117.0	8.81
02 .00	561.7629	57.3 62.8	53.4 113.6	9.90
09 .00	564.6400	54.0 66.3	-12.1 189.9	9.87
11 58 12 .48	26566.0703	52.9 67.7	-60.6 235.0	12.64

上述计算中, 初值 e_0 和 i_0 的取法与前面理想共振模型中的取法相同。对 24^h 卫星, 有几组的间隔增长到 10 个共振周期以上, 特别是 $T = 23^h 56^m 45^s$ 这一组, 间隔达 45 个共振周期, 结果仍无明显变化; 而 i_0 由 $1^{\circ}.0$ 改为 $0^{\circ}.5$ 时, 结果也几乎不变。

表 5 中的结果表明, 除中心点的位置及整个共振带稍为向“上”移动外, 天平动特征完全保持, 而且共振带的宽度以及 Δa 和 $\Delta \tilde{i}$ 的具体范围都几乎与理想共振的结果相同, 共振周期的长度仅有较小的变化。这说明, 24^h 地球同步卫星的共振结构是相当稳定的, 这对延长通讯卫星的工作寿命是有利的, 在无动力控制下, 它也不会远离“平衡”点而发生“循环”式的轨道漂移。在演化过程中轨道偏心率变化不大, 有 $e = 0.0198 - 0.0213$; 关于倾角, 日、月摄动的长周期项使得 i 的变化范围达 $0^{\circ}.8 - 15^{\circ}.8$, “变率”约为 $0^{\circ}.8/\text{yr}$ 。

关于 12^h 卫星, 由表 6 的结果可以看出, 共振特征也是保持的, 但由于原理想共振效应稍弱, 摄动影响较大, 因此, 实际运动的共振带宽度稍有缩小, Δa , $\Delta \tilde{i}$ 的具体范围和共振周期 T , 与理想共振的结果有些差别。在轨道演化中, i 的变化不大, 其范围是 $53^{\circ}.2 - 55^{\circ}.3$, 这与 24^h 地球同步卫星的情况不同, 其原因是两种卫星的轨道倾角 i 的受摄情况不同。

上述所有结果表明, 理想共振的性质, 确实反映了实际共振运动的基本特征, 而当摄动影响不大时, 在长期演化过程中, 共振特征也是能够保持的。而轨道共振特征正是通约情况引起小分母问题的力学背景。

参 考 文 献

- [1] 刘 林, 人造地球卫星轨道力学, 高等教育出版社, (1991).
- [2] Hori, G., *A. J.*, 65 (1960), 291.
- [3] Garfinkel, B., *A. J.*, 71 (1966), 657.
- [4] Liu Lin and Innanen, K. A., *Chin. Astron. Astrophys.*, 10 (1986), 245.
- [5] Liu Lin and Liao Xin-hao, *Chin. Astron. Astrophys.*, 13 (1989), 408.
- [6] Brouwer, D., *A. J.*, 64 (1959), 378.
- [7] Hori, G., *Publ. Astron. Soc. Japan*, 18 (1966), 287.
- [8] Deprit, A., *Celest. Mech.*, 1 (1969), 12.
- [9] Siegel, C. L. and Moser, J. K., *Lectures on Celestial Mechanics*, (1971).
- [10] 赵长印, 刘 林, *天文学报*, 32 (1991).
- [11] Liu, L. and Innanen, K. A., *A. J.*, 90 (1985), 887.

The Orbital Resonances on the Motions of Artificial Satellites

Liu Lin Liao Xinhao Zhao Zhangyin
(Department of Astronomy, Nanjing University)

Abstract

Based on the models of the perturbed ideal resonance in this paper, all kinds of the orbital resonances on the motions of artificial satellites are analyzed carefully, the characteristics of the corresponding orbital resonances and its evolutionary properties are given, which provide a theoretical foundation for accepting or rejecting resonance terms in perturbing calculations.

参 考 文 献

- [1] Liu Lin, Liao Xinhao and Zhao Zhangyin, *Acta Astronautica*, (1987).
- [2] Hill, G. A. J. *SIAM*, 1969, 241.
- [3] Günzel, B. A. J. *SIAM*, 1971, 107.
- [4] Liu Lin and Liao Xinhao, *Acta Astronautica*, 19 (1986), 248.
- [5] Liu Lin and Liao Xinhao, *Acta Astronautica*, 17 (1988), 408.
- [6] Brouwer, D. A. J. *SIAM*, 1968, 217.
- [7] Hill, G. *SIAM*, 1969, 241.
- [8] Duggin, A. *SIAM*, 1971, 107.
- [9] Duggin, C. J. and Marsden, J. E. *SIAM*, 1971, 107.
- [10] Liu Lin, Liao Xinhao and Zhao Zhangyin, *Acta Astronautica*, 17 (1988), 408.
- [11] Liu Lin and Liao Xinhao, *Acta Astronautica*, 17 (1988), 408.