第10卷 第1期
1992年3月

天 文 学 进 展
PROGRESS IN ASTRONOMY

Vol.10, No.1
Mar., 1992

变质量天体运动

陈 黎
（北京师范大学天文系）

郑学塘
（华东工学院应用物理系）

提 要

本文主要介绍变质量二体问题和三体问题的研究情况，并就它们的应用提出了初步看法。

一、引 言

在讨论天体的运动中，通常把天体的质量看做常量。事实上，许多恒星(包括太阳)的质量都是在变化的。例如恒星通过星风、光辐射抛射物质，又通过吸积俘获吸收周围的物质。太阳每年以太阳风的方式损失 $2.4\times10^{-14}M_\odot$ 物质，而 WR 星、天鹅P型星、M型超巨星和O型主序星等每年质量损失可达 10^{-5}—$10^{-4}M_\odot$，特别是当恒星处于不稳定阶段，它的内部发生激烈变化时，例如激变变星在爆发时，会抛射大量的物质。其中再发新星每次爆发可抛射出 $10^{-6}M_\odot$ 的物质。超新星爆发所抛出的物质可达 1—$10M_\odot$。不仅恒星而且对于某些行星(最近观测表明木星的质量正在不断增加)、彗星和人造天体等，质量都有变化。因此讨论天体在质量发生变化时的运动情况成为一个重要研究课题，从60年代以来渐趋活跃。本文主要介绍变质量二体问题和三体问题的研究。

二、运动方程和二体问题

对于变质量天体运动，一般不采用牛顿运动方程的形式。因为在 $\frac{d}{dt}(M(t)\mathbf{v})=\mathbf{F}$ 中仅由标量 dM/dt 来描述质量变化，不足以反映逃逸质量的动量的影响。1897年，俄国力学家Meuzepckú 在研究火箭运动时，采用了下面的方程形式：

$$M(t)\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{F}+\dot{M}(t)(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \tag{1}$$

其中 $\mathbf{u}$ 为逃逸物质 dM 在逃逸时刻的绝对速度，$\mathbf{v}$ 为此刻 M 质心的绝对速度，$\mathbf{F}$ 为作用在 M 上的所有作用力。这样，逃逸物质运动方向对天体运动的影响就由(1)式右端第二项体现出来了。

由(1)式不难导出一般变质量二体问题的运动方程：

1990年3月3日收到。
1991年10月3日收到修改稿。

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -G\frac{M+m}{r_1^3}\mathbf{r}_1 + \frac{\dot{m}}{m}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) - \frac{\dot{M}}{M}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \tag{2}$$

其中M和m分别为中心体和行星的质量。$\mathbf{r}_1$为中心体M到行星m的矢径，$\mathbf{u}_1$，$\mathbf{v}_1$分别为dm和m在逃逸瞬间的绝对速度，$\mathbf{u}$，$\mathbf{v}$分别为dM和M相应的绝对速度。(2)式右端后两项分别反映了逃逸物质dm和dM的运动方向对天体运动的影响。通常天体质量变化有两种形式：

1. 以星风(呈均匀球对称)或光辐射形式抛出。这时抛射物质的相对速度和为0。我们称这种形式的质量变化为各向同性质量变化。

2. 天体从静止云中吸附物质，这时有$\mathbf{u}=0$或者$\mathbf{u}_1=0$。

特别当小天体的质量m远小于大天体质量M，即$m \ll M$时，则可认为中心体在惯性系中是静止的。也就是$\mathbf{v}=0$，$\mathbf{v}_1=\dot{\mathbf{r}}_1$

对于上述情形，我们得到不同的变质量二体问题及其方程，现将它们列于表1[2-5]

表 1　变质量二体问题

方程名称	质量变化方式	运动速度	运动方程
G-M Gylden-Meshcherskii	$M^{(1)}$　$m^{(1)}$	$\mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}_1-\mathbf{v}_1=0$	$\ddot{\mathbf{r}}=-G\frac{M+m}{r_1^3}\mathbf{r}_1$
Jean	$M^{(1)}m_0$，$M \gg m$	中心体静止，$\mathbf{u}-\mathbf{v}=0$	$\ddot{\mathbf{r}}_1=-G\frac{M}{r_1^3}\mathbf{r}_1$
Lapin	$M^{(1)}$，$m^{(2)}$ 或$M^{(2)}$，$m^{(1)}$	$\mathbf{u}-\mathbf{v}=0$，$\mathbf{u}_1=0$ 或　$\mathbf{u}=0$，$\mathbf{u}_1-\mathbf{v}_1=0$	$\ddot{\mathbf{r}}_1=-G\frac{M+m}{r_1^3}\mathbf{r}_1-\frac{\dot{m}}{m}\mathbf{v}_1$ $\ddot{\mathbf{r}}_1=-G\frac{M+m}{r_1^3}\mathbf{r}_1+\frac{\dot{m}}{M}\mathbf{v}$
G-O Gel'fgat-Omarov	$M \gg m$ $M^{(1)}$，$m^{(2)}$ 或 $M^{(2)}$，$m^{(1)}$	中心体静止的 Lapin 问题	$\ddot{\mathbf{r}}_1=-G\frac{M}{\mathbf{r}_1^3}\mathbf{r}_1-\frac{\dot{m}}{m}\dot{\mathbf{r}}_1$ $\ddot{\mathbf{r}}_1=-G\frac{M}{\mathbf{r}_1^3}\mathbf{r}$
Seeliger	M_0　$m(t)$	变质量行星绕常质量中心	$\ddot{\mathbf{r}}_1=-G\frac{M_0+m}{r_1^3}\mathbf{r}_1+\frac{\dot{m}}{m}(\mathbf{u}_1-\mathbf{v}_1)$
Fermi	M_0　$m(t)$ $M \gg m$	中心体静止的 Seeliger 问题	$\ddot{\mathbf{r}}_1=-G\frac{M_0}{r_1^3}\mathbf{r}_1+\frac{\dot{m}}{m}(\mathbf{u}_1-\dot{\mathbf{r}}_1)$
M-L-C Meshcherskii-Levi-Civita	M_0，$m^{(1)}$ $M \gg m$	中心体静止且为常质量 $\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1=0$	$\ddot{\mathbf{r}}_1=-G\frac{M_0}{r_1^3}\mathbf{r}_1$

注：表中质量M和m的上标"(1)"表示该天体为各向同性质量变化；上标"(2)"表示该天体从静止云中吸附物质；下标"0"表示该天体的质量为常数。

在表1中，G-M方程，Jean方程，M-L-C方程和G-O的第二个方程可统一写作：

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu(t)}{r^3}\mathbf{r} = 0 \tag{3}$$

当$\mu(t)$满足一定形式时(例如$\mu(t)=\frac{\mu_0}{a+\alpha t}$　或$\mu(t)=\mu_0/\sqrt{\alpha+\beta t+\gamma t^2}$，其中$\mu_0$、$a$、$\alpha$、$\beta$和$\gamma$均为常数)，(3)式是可积的。另外，我们可利用$d\tau=\sqrt{\mu(t)}dt$和Levi-Civita变换将(3)式正规化，即把(3)式变为无奇点的运动方程[6]。

由表1可知，人们已研究的变质量二体问题多为各向同性质量变化的情形。这是因为这种形式的质量变化有明确的数学表达式。事实上，各向同性质量变化等价于附加了一个沿天

体运动方向的力。Hadjidemetrion 给出了它的摄动函数[7]：

$$R=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln[M(t)]\,\mathbf{v}$$

由此可导出以轨道根数为变量的 G-M 问题的摄动方程。进一步的讨论表明，轨道根数 a 有长期变化，如果质量 $\mu(t)$不断减少，则 a 不断增加。e 和 ω 没有长期变化，只有周期变化[8]。

Verhulst[9]进一步研究了 G-M 问题在 e 和 E 构成的相平面上的稳定性问题。其结论是：系统在 e–E 相平面上有两个奇点，一个是中心，另一个是鞍点，且相应的驻定解分别为 Ляпунов 稳定和渐近不稳定的。

有的物理问题可转化为表 1 中的问题。例如 Polyakhova[10]利用 Meshcherskii 的坐标和时间变换

$$(x,\ y,\ z)=R(t)(\xi,\ \eta,\ \zeta),\ d\tau=[R(t)]^{-2}dt \tag{4}$$

将非摄动、不稳定的光引力二体问题转化为 G-M-J 问题。转化后的运动是一个稳定的受摄运动，受到一个推力和一个中心构型力的作用。

对于 Jean 问题，Minglibaev 和 Majlybaev[11]的研究表明：当质点绕中心体运动时，如果中心体的形状不变，仅仅是大小和质量发生变化(例如不断膨胀)，则角度轨道要素将会受到影响。

某些变质量二体问题可以用下面的方程表示：

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3}-a\dot{\mathbf{r}}-b\mathbf{r} \tag{5}$$

其中 μ、a 和 b 既可以是常数，又可以是 t 的函数。Минглиьев[12]提出以新的中间轨道运动

$$\ddot{\mathbf{r}}=-\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}+\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\mathbf{r}+\left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\mu}}{\mu}+\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]\mathbf{r} \tag{6}$$

做为变质量二体问题的最初近似。式中 $\gamma(t)$是 t 的任意非零函数。这时(6)式为可积系统。

由上述可知，变质量二体问题的研究多限于各向同性质量变化的情形。即便如此，质量函数 $\mu(t)$也仅在很特殊的情况下才能使运动方程化为分离变量的形式。虽然 Verhulst[13]等给出了处理非线性、非自治系统的变质量二体问题的一些办法，但对于一般形式的 $\mu(t)$还无法给出分析解。

至于质量变化不是均匀球对称的情形，讨论就更初步了。主要困难在于摄动函数难以给出。苏联的一些科学家期望以中间轨道做为突破口，目前他们正在做这方面的努力。

三、变质量三体运动

变质量三体运动的研究大体可分为两类：一是两个主星体质量变化，小天体为常质量；另一类是主星体为常质量，小天体质量有变化。由于三体问题的研究是基于二体问题之上的，故二体问题研究中的困难也带到三体问题里来了。到目前为止，所有变质量三体问题的

工作都仅限于各向同性质量变化的情形。我们先来看第一类：

最基本的限制性变质量三体问题的模型是：两主星体的运动为 G-M 问题，它们的运动方程可写为(3)式。这时，根据 $\mu(t)=\mu_1(t)+\mu_2(t)$ 的不同形式，可得下列结果[14-19]：

1．当 $\mu(t)$ 不加任何限制时，系统有两个三角特解 L_4 和 L_5。

2．取小主星体的初始质量 $\mu_1(0)$ 为1阶小量，且两个主星体质量的改变量不超过 $\mu_1(0)$，质量变化率不超过 $[\mu_1(0)]^2$，则可得到与一般圆型限制性三体问题类似的结论。

3．当 $\mu_1(t)/\mu_2(t)=$ 常数时，系统有5个特解 L_1—L_5。但若小天体不是球体时，这些解不存在。

4．当 $\mu_i(t)=\mu_{i0}\mu(t)$，$\mu(t)=at+b$ 时，系统有7个特解 L_1—L_5 及 $L\pm\infty$。

5．当 $\mu_i(t)=\mu_{i0}/\sqrt{\alpha t^2+2\beta t+\gamma}$ 时，运动称为 БЕКОВ 问题。这时根据 α,β,γ 的不同取值有两种结果：一种情形是系统有7个特解：L_1—L_5 及 L_6，L_7，其中 L_6，L_7 为两个共面解，对称于二主星体的旋转平面。且 L_1—L_7 关于任一参量稳定；另一种情形是，系统有11个特解（3个直线解，2个三角解及6个共面解）。

若考虑 БЕКОВ 的直线限制性三体问题，则除得到三个直线解外，还可得到一个空间特解 L_0——Lagrang 环[20]。

上面谈到的是第一类的情况。下面我们来看第二类的问题，即主星体为常质量，小天体为变质量。

Shrivastava，Singh 和 Ishwar 等讨论了小天体的质量变化为满足 Jean 定律 $\dot{m}=-\alpha m^n$ 的各向同性质量变化的圆型限制性三体问题[21-23]。特别当 $n=1$ 时，得到了一组特解：3个直线解和2个三角解。他们还研究了直线秤动点所在的区域及小天体在秤动点附近的运动，得出了参数 μ 的临界值 μ_c（仅依赖于 α）。当 $0\leqslant\mu\leqslant\mu_c$ 时，小天体在三角秤动点附近的运动是稳定的；当 $\mu_c<\mu\leqslant\frac{1}{2}$ 时，运动是不稳定的。当 $\mu=\mu_c$ 时运动是不稳定或条件稳定的。

对于上述问题的椭圆型限制性三体问题，他们也建立了运动方程[24]。

由此看来，变质量三体问题的研究没超出各向同性质量变化的范围，而且，$\mu(t)$ 也仅取了几种特殊的变化形式。对于一般形式的 $\mu(t)$ 还未开展什么讨论。而对非各向同性质量变化的情况，甚至未建立相应的运动方程，更不用说寻找积分或做定性分析了。这些，都给我们提出了新的课题。

四、应　　用

本文在引言中曾指出：自然界大多数天体的质量都在不断地变化着，因此讨论天体在质量发生变化时的运动情况是一个重要而又现实的问题。特别是近30年来由于观测技术的发展，观测精度的提高和新观测事实的不断出现，人们对变质量天体运动的研究更趋活跃。它正逐步形成为天体力学和变质量系统力学的一个新的分支——变质量天体力学。变质量天体运动研究有着广泛的应用前景。根据研究的对象大致可以分为三类：

1．**人造天体**　由于太阳和某些行星质量的变化会导致行星际飞船和人造行星、卫星的

轨道有微小而缓慢的变化。另外人造天体本身质量的变化也会改变它的运动轨道及其稳定性。利用变质量二体问题和变质量限制性三体问题可以来讨论这类问题[25]。

2. **太阳系** 由于太阳质量的变化会使行星轨道(包括半长径)有长期和周期变化，彗星运动到太阳附近时，在太阳风和太阳光压作用下抛射物质；流星在地球大气层中运动时，由于燃烧，质量不断减少，这样都会改变它们的运动轨道。利用变质量二体问题可以研究这类问题。

3. **双星和恒星系统** 不少双星系中，两个主星体通过星风抛射物质。这时可利用变质量二体问题和变质量限制性三体问题进行研究。研究表明：主星体的质量损失会改变双星系的结构，破坏它的稳定性[26]。对于恒星系统特别是当其中有些恒星处于爆发阶段时，大量的物质抛射会使其周围的天体运动轨道发生根本性的改变。这类问题需作更进一步的研究。

参 考 文 献

[1] Meshcherskii, I. V., *Astron. Nachr.*, 159 (1902), 229.
[2] Radzieveskii, V. V. and Gel' fgat, B. E., *Astron. Zh*, 34 (1957), 581.
[3] Omarov, T. B., *Astron. Zh.*, 41 (1964), 170.
[4] Kurysher, V. I. and Perov, N. I., *Astron. Zh.*, 58 (1981), 886.
[5] Razbitnaya, E. P., *Astron. Zh.*, 62 (1985), 1175.
[6] Guillaume, P., *Celest. Mech.*, 10 (1974), 141.
[7] Hadjidemetriou, J. D., *Icarus*, 2 (1963), 440.
[8] Hadjidemetriou, J. D., *Icarus*, 5 (1966), 34.
[9] Verhulst, F., *Bull. Astron. Inst. Neth.*, 20 (1969), 215.
[10] Polyakhova, E. N., *Sov. Astron.*, 33 (1989), 673.
[11] Minglibaev, M. D. and Majlybaev, A. T., *Astron. Tsirk.*, (1989), No. 1537, 7.
[12] Минглиьев, М. Д. and Омаров, Т. Б., *Nauka, Alma-Ata.*, 45 (1986), 3.
[13] Verhulst, F. and Eckhaus, W., *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 5 (1970), 617.
[14] Horedt, G. P., *Celest. Mech.*, 10 (1974), 319.
[15] Horedt, G. P., *Celest. Mech.*, 33 (1984), 363.
[16] Bekov, A. A., *Astron. Zh.*, 65 (1988), 202.
[17] Lukyanov, L. G., *Astron. Zh.*, 66 (1989), 202.
[18] Lukyanov, L. G., *Astron. Zh.*, 67 (1990), 167.
[19] Elshaboury, S. M., *Astrophys. Space. Sci.*, 174 (1990), 151.
[20] Bekov, A. A., *Astron. Zh.*, 68 (1991), 206.
[21] Shrivastava, A. K. and Ishwar, B., *Celest. Mech.*, 30 (1983), 323.
[22] Ishwar, B. and Singh, J., *Celest. Mech.*, 32 (1983), 297.
[23] Ishwar, B. and Singh, J., *Celest. Mech.*, 35 (1985), 201.
[24] Das, R. K., Shrivastava, A. K. and Ishwar, B., *Celest. Mech.*, 45 (1988), 387.
[25] 郑学塘，空间大地测量及定位应用学术年会论文集(1990)，p. 207.
[26] 陈 黎，郑学塘，天体物理学报，2 (1991)，149.

（责任编辑 舒似竹）

On the Motion of Celestial Bodies with Variable Masses

Chen Li
(Department of Astronomy, Beijing Normal University)
Zheng Xuetang
(Department of Applied Physics, East China Institute of Technology)

Abstract

The recent developments of two-body problem and three-body problem of variable mass are introduced in the paper. Moreover, the preliminary views on actual application are put forward.