第 14 卷　第 1 期
1996 年 3 月
天　文　学　进　展
PROGRESS IN ASTRONOMY
Vol.14,　No.1
Mar., 1996

中国古历定朔推步综述

李　勇
(南京大学天文系　南京　210008)
张　培　瑜
(中国科学院紫金山天文台　南京　210008)

摘　要

"朔"简言之表日月黄经相等，先民对其认识经历了一个从平朔到定朔的过程。通过研读古历，文中分析并归纳了不同时期中国古历日制度的基本元素之一 —— 朔的两种推步方法："积年法"和"《授时历》法"，其中包括平朔、日躔、月离、及定朔的推步方法等；得出了由各历的基本历数直接推出的中国古历定朔计算的一般公式；同时亦给出了《授时历》的推朔法和部分算例。

关键词　天文学史

1　引　言

"朔"表日月同经，先人将日、月黄道经度相同的时刻称为朔。它是中国古历中的基本元素之一，当属阴历成分，首见于《诗经》："十月之交，朔日辛卯，日有食之，亦孔之丑"。"朔"字的出现最初或许与日食有关，随后并演变为表示日月同经的日期。由于朔是观察不到任何月面的一种天象，人们对它的认识需要一个过程，这点在现今甲骨和金文中均未发现该字亦可明鉴；随后古人将月首从"朏"(新月初见) 改为朔。这样才可用日、月交食对历法进行校正和检测。鉴于朔的不可见，必须推求，故"朔"的出现标志着推步历法的诞生。

由于人们对包括日月运动等天文现象的长期观测，发现依照平均朔望月周期来推算朔日 —— 平朔的方法，从而编排的历谱，时常与日、月食的实测结果有一定差异，已不能满足人们对太阳、月亮轨道运动不均匀性认识的要求。为了提高推步精度，古人对平朔进行日、月运动不均匀性的改正，试图得到真实的朔 ——"定朔"。用定朔进行编历工作，这不仅对提高编历精度本身，而且对于古日、月食的推算精度的提高也具重大意义。

中国早期古历"合朔"的推步通常是根据某个给定的合朔时刻，以此作为历法的起点 —— 上元，然后再叠加平均朔望月周期，得到的各月朔日称为"平朔"。平朔实际上并非真正合朔，它仅反映了日月的平均运动。平朔准确与否取决于历法起点及平均朔望月周期的准确程度，它们标志着当时的实测水平。由于定朔才是真正的合朔，而月球绕地球转动的速度是不均匀

1995 年 1 月 2 日收到

的，它的速度变化周期称为近点月；同时太阳周年视运动的速度亦是不均匀的，它的速度变化周期称为近点年。显然，定朔的推算与日月运行速度有关。

中国古代民用历法根据气、朔变化，一般可分为三个时期：春秋、战国到隋末唐初的平气、平朔 [1−2]；隋末到明末的平气、定朔 [3−6]；清代以后的定气、定朔。同时历史上曾出现过平朔、定朔之争。早在后汉刘洪的《乾象历》(AD 223) 就已经考虑用“月亮改正”对平朔进行修正，到刘宋何承天撰《元嘉历》(AD 445)，曾经主张废平朔而用定朔，最后不得已仍采用平朔。现可考的最先采用定朔的当数隋之《皇极历》，这是我国历法史上的一次大改革。

《授时历》是中国古代自创而且行用时间最长、精度最高的一部历法，是古历的集大成者 [7]，见于《元史历志》，郭守敬等人所作。它用定朔、平气注历，彻底抛弃了积年推步法，所给年长有长期变化，更加注重实测。

目前，对定朔问题的研究仅限于隋唐的几部历法，如《麟德历》[4]、《大衍历》[5]、《宣明历》等 [6]。就《授时历》的定朔计算，尚有待于深入 [8]。

平朔推步本不玄奥，隋唐之前，中国古历的编排皆沿用平朔。根据是否使用上元积年，本文中将古历中朔的推步分为“积年法”和“《授时历》法”两种，它们都是通过实测数据进行推步的，历法的精度在某种程度上反映了当时的实测水平。

2　《授时历》前的定朔推步 —— 积年法

2.1　关于平朔推步

在《授时历》以前，平朔大多采用“积年法”推算。这种方法是在实测朔望月长、年长和某个合朔时刻的基础上，由上元积年算法排出历谱 [1−2]。

由于中国是用干支纪日的，则：

天正经朔干支 (冬至所在月平朔干支)= 冬至干支 − 冬至月龄

这是求解平朔的基本公式，其中“冬至月龄”表示冬至时刻距所在月平朔的积日数。

根据《授时历议》，“昔人立法必推求往古生数之始，谓之‘演纪上元’。当斯之际，日月五星同度，如合璧连珠然。”此上元之旨。历元：古历中推算的起点。上元积年：从上元到编历年份的年数叫作积年，通称上元积年。李谦曾在《历议》中给出了诸历到历元 —— 至元十八年 (AD 1281) 的积年数。

本文中定义求余函数 $\mathrm{mod}(X,Y)=X-\mathrm{INT}(X/Y)\times Y$，其中 $\mathrm{INT}(Z)$ 表示对 Z 取整，$\mathrm{mod}(X,Y)$ 表示 X 除以 Y 所得余数 ($Y\neq 0$)；定义函数 $\mathrm{MOD}(X,Y)$：

(1) 当 $\mathrm{mod}(X,Y)\geq 0$ 时，$\mathrm{MOD}(X,Y)=\mathrm{mod}(X,Y)$；

(2) 当 $\mathrm{mod}(X,Y)<0$ 时，$\mathrm{MOD}(X,Y)=\mathrm{mod}(X,Y)+Y$。

设所求年距上元 N 年，回归年长为 A 日，朔望月长为 B 日，根据上元满足的条件：合朔、冬至、夜半、且为甲子日，即所谓“朔旦夜半冬至甲子”。则：所求年天正经朔为：

天正经朔干支 $=\mathrm{MOD}((N\times A),60)-\mathrm{MOD}((N\times A),B)$

其值取整后即为干支序号 (取甲子 $=0$)，小数部分表合朔时刻；$\mathrm{MOD}((N\times A),B)$ 为冬至月龄；$\mathrm{MOD}((N\times A),60)$ 为冬至干支；不及减者加 60 即可。

确定了天正经朔和冬至干支后，只要分别叠加朔望月长 B 和气长 $A/24$，就可分别得到

次朔 (平朔) 和次气 (平气) 的干支。即：

$$各朔干支 = \mathrm{MOD}((N \times A - \mathrm{MOD}((N \times A), B) + n \times B), 60) \quad (1)$$

$$各气干支 = \mathrm{MOD}((N \times A + n \times A/24), 60) \quad (2)$$

其中 n 为非负整数； $n=0$ 表天正经朔干支和冬至干支，取甲子干支 $=0$ 。

2.2 关于“日躔”、“月离”推步 —— 躔离表法

就定朔计算而言，历经所载之“日躔”、“月离”，其目的就是求解太阳改正和月亮改正。自隋之《皇极》至元之《授时》前，历经几皆用表述太阳及月亮运动的日躔表和月离表 (与今天的 Newcomb 太阳表和 Brown 月亮表相似) 进行局部拟合 —— 内插得到的，本文中称之为“躔离表法”；而《授时历》的改正则是在此基础上完全采用公式进行计算的。

显然，当日、月位于近地点时视运动最快；远地点则反之。

根据躔离表，现代可很方便地分别将引数改为入冬至点的积日数 t 和入近点月的积日数 t' ，并运用数据处理方法求解，诸如用最小二乘法进行多项式拟合等，即可直接建立太阳改正 $T(t)$ 与 t 和月亮改正 $S(t')$ 与 t' 的关系。

2.2.1 关于太阳改正

通过历经给出的“日躔表”，并运用内插法得出太阳改正，其公式的一般表达式为：

$$T = T_0 + t \times \Delta_1/l_1 + t \times (\Delta_1/l_1 - \Delta_2/l_2) \times (l_1 - t)/(l_1 + l_2) \quad (3)$$

其中： t 表此时 (朔) 所入前一个定气的日数 (含小数) ； T_0 表前一个定气的“朓朒积 (数) ”； Δ_1 、 Δ_2 ； l_1 、 l_2 分别表此时 (朔) 前之定气及后之定气的“损益率”和长度。定气长 $l=$ 平气长 + 盈缩分 $= A/24+$ 盈缩分，除 t 以外，该数据均可从“日躔表”中查得 (由于各历对表中各组数据的称谓不一，本文中从《大衍历》、《宣明历》) 。

为方便计算，忽略微量后上式可简化成：

$$T = T_0 + t \times \Delta_1/l_1 \quad (4)$$

该式与 (3) 式的最大偏差不超过 1 分钟。

(3) 式是由线性拟合得出的。定义函数 $f(t) = at + b$ ， a 、 b 为待定系数，令：
$F(t) = \int f(t)\mathrm{d}t$ ，已知： $F(l_1) = \Delta_1$ ， $F(l_1 + l_2) = \Delta_1 + \Delta_2$ ，求出：

$$a = 2(\Delta_2/l_2 - \Delta_1/l_1)/(l_1 + l_2)$$

$$b = \Delta_1/l_1 - l_1(\Delta_2/l_2 - \Delta_1/l_1)/(l_1 + l_2)$$

代入 $F(t)$ ， $F(t) + T_0$ 即为 (3) 式。

运用“日躔表”进行计算时须注意：(1) 表中各历所给出的太阳运动盈缩情况与实际并不一定符合，有的甚至有较大的差异 (如《麟德历》)； (2) 各组数据的意义和相互关系：盈缩分 = 定气 − 平气、先后数 $= \sum$ 盈缩分、损益率 = − 盈缩分 / 月日平行度、朓朒积 (数)= $\sum$ 损益率，而其中：“ $\sum$ ”表累加，《大衍历》、《宣明历》的“月日平行度” = 小周 / 章月 $= 13^\circ.36835/$ 日； (3) 各数据的单位、分母和符号，盈缩分和先后数的单位为日 (数据的单位为日分，实际计算时要换算为日) 、损益率和朓朒积 (数) 的单位为度。《大衍历》数据的

分母均为通法 3040 ；《宣明历》中盈缩分和先后数的分母为刻法 84 ，损益率和朓朒数分母为统法 8400 。因历经“日躔表”中符号时有错乱，今可根据其运动快慢定出：太阳盈时运动快，节气短，故盈缩分为“ − ”，先后数由 Σ 盈缩分得出，损益率表太阳改正故为“ + ”，朓朒积 (数) 由 $\sum$ 损益率得出；太阳缩时则反之。

实际计算一般采用简化公式 (4) ，但仍不方便，因为引数 t 表此时 (朔) 的入气日，故只有先确定该定气为何气，才能得出 T_0 、 Δ_1 、 Δ_2 ； l_1 、 l_2 ，且公式所引入的参量太多，符号不易掌握。 (4) 式可变为：

$$T(t)=T(i)+(t-t(i))(T(i+1)-T(i))/(t(i+1)-t(i)) \tag{5}$$

式中： t 表该朔入冬至时刻的积日数，且 $t\le A$ ； $t(i)$ 表交第 i 个节气的时刻， $t(1)=0$ 为冬至时刻，第 i 个节气长： $l_i=t(i+1)-t(i)$ ； $T(i)$ 为朓朒积 (数) ，且第 i 个节气的损益率： $\Delta_i=T(i+1)-T(i)$ ； i 表示日躔表中各节气的排列次序，且：

$$t\in[t(i)\quad t(i+1)],\qquad t(i)=(i-1)\times A/24+\text{先后数}(i)$$

注意：式中各量均用日为单位，及先后数的符号。

由于日躔表中的太阳改正基本符合三角函数变化规律，故在一定精度要求下可用三角函数拟合：

例如，对于《大衍历》可得出其太阳改正的拟合公式为：

$$T(t)=551/3040\sin(360^\circ t/A)=0.1813\sin(0^\circ.98564t)$$

其中：年长 $A=1110343/3040$ 日； t 为从冬至 (古历年首) 起算的积日数，且 $t\le A$ 。其改正与日躔表的最大偏差为 23.8 分钟。

对于《宣明历》，则：

$$T(t)=1526/8400\sin(360^\circ t/A)=0.1817\sin(0^\circ.98564t)$$

其中： $A=3068055/8400$ 日。其改正的最大偏差为 15.4 分钟。

2.2.2　关于月亮改正

通过历经给出的“月离表”，并运用内插法得出月亮改正，其公式的一般表达式为：

$$S=S_n+s\times(3\delta_n-\delta_{n+1})/2-s^2\times(\delta_n-\delta_{n+1})/2 \tag{6}$$

其中： s 为入历日 (近点月) 的小数部分 (n 为其整数部分) ； S_n 为入近点月 (远、近地点) 后第 n 日的“朓朒积”； δ_n 、 δ_{n+1} 为第 n 、 $n+1$ 日的“损益率”。除 s 外，该数据均可在“月离表”中查得 (由于各历对表中各组数据的称谓不一，本文中从《大衍历》、《宣明历》) 。

该式亦由线性拟合得出。定义函数 $f(t)=at+b$ ，其中 a 、 b 为待定系数，令：

$F(t)=\int f(t)\mathrm{d}t$,　已知：$F(1)=\delta_n$,　$F(2)=\delta_n+\delta_{n+1}$ ，求出：

$$a=\delta_{n+1}-\delta_n\qquad b=(3\delta_n-\delta_{n+1})/2$$

代入 $F(t)$ ， $F(t)+S_n$ 即为 (6) 式。

运用“月离表”进行计算时须注意：(1) 各历的近点月月首取法不一 (如《麟德历》取近地点，而《大衍历》、《宣明历》却取远地点)，但各历基本掌握月亮在近地点运动最快、远地点反之的规律 (据此可确定近点月入近地点还是远地点)；(2) 在节点 (包括极值点和零点) 所在日，表中“损益率”时常给出初、末两值，计算时 δ 值应取其和；(3) 各组数据的分母及相互关系 (如《大衍历》中：“转日”表入近点月天数；“转分” = 月亮每天实行度数 × 转法 (76)；“列衰”为相邻两日转分之差；“转积度” $=\sum$ 转分 / 转法；“损益率” $\propto$(正比于)(月实行 - 月平行)；“朓朒积” $=\sum$ 损益率。在《宣明历》中：“历日”表入近点月天数；“历分” = 月亮每天实行度 × 刻法 (84)；“积度” = Σ 历分 / 刻法；“损益率” =(月实行分 - 月平行分)/ 月日平行分，其中月平行分 = 月平行度 × 刻法 $= 13.36835 \times 84 = 1123$；“朓朒积” $=\sum$ 损益率。《大衍历》数据分母均取通法 3040；《宣明历》则均取统法 8400；(4) 由于表中历日始于“ 1 日”，采用的是“落地算法”，故 δ_n (S_n) 和 δ_{n+1} 则取 INT(入历日)+1 日和 INT(入历日)+2 日的读数；(5) 给出的各数据的符号。同上，表中符号亦有错乱。实际计算时可用下法定出：月行慢时，计算月亮改正时需增加，月方复及日，故此时的损益率为正，朓朒积符号则由 $\sum$ 损益率给出；月行快时反之。

为方便计算，可将所求朔时之月亮改正的引数改为入近点月积日数 t'，且 $t' \leq B'$；据 $\delta_n = S_{n+1} - S_n$，将损益率换为符号容易判别的朓朒积，则月亮改正为：

$$
\begin{aligned}
S(t') \;=\;& S(\mathrm{INT}(t')+1) \\
&+(4S(\mathrm{INT}(t')+2) - 3S(\mathrm{INT}(t')+1) - S(\mathrm{INT}(t')+3)) \times (t' - \mathrm{INT}(t'))/2 \\
&-(2S(\mathrm{INT}(t')+2) - S(\mathrm{INT}(t')+1) - S(\mathrm{INT}(t')+3)) \\
&\times (t' - \mathrm{INT}(t'))^2/2
\end{aligned} \tag{7}
$$

其中：$S(i)$ 表示月离表中第 i 日的朓朒积 (注意其分母)。若拟合是线性的，则公式可进一步简化：

$$
S(t') = S(\mathrm{INT}(t')+1) + (S(\mathrm{INT}(t')+2) - S(\mathrm{INT}(t')+1)) \times (t' - \mathrm{INT}(t')) \tag{8}
$$

该式和 (7) 式相差最大约 14 分钟。

2.3 关于定朔推步法

隋唐历法始见定朔计算，本文中将《授时历》前的定朔计算一般公式归纳为：

$$
\begin{aligned}
\text{定朔} \;=\;& \text{平朔} + \text{太阳改正} + \text{月亮改正} = \text{平朔} + T(t) + S(t') \\
=\;& \mathrm{MOD}((N \times A - \mathrm{MOD}((N \times A), B) + n \times B), 60) \\
&+T(\mathrm{MOD}((A + n \times B - \mathrm{MOD}((N \times A), B)), A)) \\
&+S(\mathrm{MOD}((N \times A + n \times B - \mathrm{MOD}((N \times A), B)), B'))
\end{aligned} \tag{9}
$$

其中：N、A、B、B'、n 分别表示已知的积年数、年长、朔望月长、近点月长和所求的第 n 个朔。t 表示该朔入冬至点的积日数，且 $t \leq A$；t' 表示该朔入近点月的积日数，且 $t' \leq B'$。

因为：当 $n = 0$ 时，则：

$$
\begin{aligned}
t(0) &= A - \text{冬至月龄} = A - \mathrm{MOD}((N \times A), B) \\
t'(0) &= \text{冬至近点月月龄} - \text{冬至月龄} \\
&= \mathrm{MOD}((N \times A), B') - \mathrm{MOD}((N \times A), B)
\end{aligned}
$$

所以：

$$\begin{aligned} t &= \mathrm{MOD}((t(0)+N\times B),A) \\ &= \mathrm{MOD}((A+n\times B-\mathrm{MOD}((N\times A),B)),A) \\ t' &= \mathrm{MOD}((t'(0)+N\times B),B') \\ &= \mathrm{MOD}((N\times A+n\times B-\mathrm{MOD}((N\times A),B)),B') \end{aligned}$$

(5) 、(7) 、(9) 式构成了“积年法”求定朔的一般公式。

3　《授时历》定朔推步法

3.1　关于平朔推步

《授时历》不用积年日法，“所用之数，一本诸天，比之他历积年日法，推演附会，出于人为者，为得自然”。以至元辛巳 (1281 年) 为元。实测了气应 (历元年前冬至干支) 、闰应 (历元年前冬至月龄) 、经朔。《授时历》的历元天正经朔干支 (即为 1280 年冬至月朔干支) 由实测得出：

经朔干支 = 气应 − 闰应

求次朔干支只要在经朔上累加朔策 (朔望月长) 即可，甚为简单。

就《授时历》平朔的推法，据经文可得：

通积 = 中积 + 气应 = ± 距算 × 岁实 ′+ 气应 = $\pm N\times A'$+ 气应

其中：“距算”为历元至所求年的年数 (相当于积年 N) ；下算将来取正号，上推往古取负号；岁实’ = 岁实 ±INT(距算 /100)/ 日周，即：

$$A'=A\pm\mathrm{INT}(N/100)/10000$$

此时上推往古取正号，下算将来取负号。

则：冬至干支 = 冬至日分 / 日周 = MOD(通积， 60)

因为：闰积 = 中积 + 闰应 = $\pm N\times A'$+ 闰应，则：

闰余 (冬至月龄)= MOD(闰积，朔实)= MOD(闰积， B) ，故：

$$\begin{aligned} \text{各朔干支} &= \mathrm{MOD}((\text{天正经朔}+n\times B),60) \\ &= \mathrm{MOD}((\text{通积}-\mathrm{MOD}(\text{闰积},B)+n\times B),60) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \text{各气干支} &= \mathrm{MOD}((\text{冬至干支}+n\times A'/24),60) \\ &= \mathrm{MOD}((\pm N\times A'+\text{气应})+n\times A'/24),60) \end{aligned} \tag{11}$$

若不及减者，则加纪法，公式中甲子的干支取为 0 ；其中 $n=0$ 表天正经朔干支和冬至干支，无中气之月称为闰前月，这样就排出了历谱。

数据如下：岁实 $A=365.2425$ ；朔实 $B=29.530593$ ；日周 = 10000 分 (即 1 日的分数) ；旬周 = 60 ；纪法 = 60 ；气应 = 55.0600 ；闰应 = 20.2050(经文中“闰应”为 20.1850 ，这里为实际采用值) 。其单位均为日。

3.2　太阳改正模型 —— 盈缩差

《授时历》将太阳运动分为盈历和缩历两部分，冬至到夏至称为盈历，太阳入盈历时运动快，此时：太阳位置 = 平均位置 + 盈缩差；夏至到冬至称为缩历，太阳入缩历时运行慢，

此时：太阳位置 = 平均位置 − 盈缩差。欲求太阳改正时，先求出该时刻太阳位于盈缩历中的位置，再根据给定的太阳在盈缩历中运动快慢的定量结果，从而得出太阳改正。

根据《历经》，令：初末限 $= C$， $T(t) =$ 盈缩差，则：

$T(t) = \pm$(定差 − (立差 × 初末限 + 平差) × 初末限)× 初末限 / 亿

当入盈初缩末时：

$$T(t) = \pm M(C) = \pm(5133200 - (31 \times C + 24600) \times C) \times C/10^8$$

当入缩初盈末时：

$$T(t) = \pm N(C) = \pm(4870600 - (27 \times C + 22100) \times C) \times C/10^8$$

(式中盈缩差的单位为度；入盈历时取正号，入缩历时取负号。)

各朔入冬至时刻的积日数：

$$t = \mathrm{MOD}((A' - \text{闰余} + n \times B), A') \tag{12}$$

其中： n 为非负整数， $n = 0$ 表所求历元天正经朔入冬至积日数。

盈初缩末限 =88.909225 日；缩初盈末限 =93.712025 日，则：

(1) $t \in [0 \quad 88.909225]$， 入盈初：$C = t; T(t) = M(C)$ (13)

(2) $t \in [88.909225 \quad A'/2]$， 入盈末：$C = A'/2 - t; T(t) = N(C)$ (14)

(3) $t \in [A'/2 \quad A'/2 + 93.712025]$， 入缩初：$C = t - A'/2; T(t) = -N(C)$ (15)

(4) $t \in [A'/2 + 93.712025 \quad A']$， 入缩末：$C = A' - t; T(t) = -M(C)$ (16)

根据《授时历》：太阳的盈缩差类似于一个正弦函数。在一个周期 (回归年) 内，两至点无盈缩，其位置即为平均位置；在盈历初末相交时，盈缩差达最大，即此刻太阳运行最快；在缩历初末相交时，盈缩差达最小，即此刻太阳运行最慢；其振幅为 2.40 度。

3.3 月亮改正模型 —— 迟疾差

《授时历》将近点月一分为二：近地点到远地点称为疾历；远地点到近地点称为迟历。《历经》给出了月亮在迟疾历中运行快慢的定量结果，讨论月亮改正时，先求出该时刻月亮位于近点月中何位置，从而进行改正。

根据《历经》，令：初末限 $= D$， $S(t') =$ 迟疾差，则：

$$\begin{aligned} S(t') &= \pm(\text{定差} - (\text{立差} \times \text{初末限} + \text{平差}) \times \text{初末限}) \times \text{初末限} / \text{亿} \\ &= \pm P(D) = \pm(11110000 - (325 \times D + 28100) \times D) \times D/10^8 \end{aligned}$$

迟疾差单位为度。入迟历取正号；入疾历取负号。

各朔入转日及分 (即入近点月的日数)：

$$t' = \mathrm{MOD}((\text{中积} + \text{转应} - \text{闰余} + n \times B), \text{转终}) \tag{17}$$

其中 n 为非零整数， $n = 0$，为天正经朔入转日及分。《历经》中的“转应”为 13.1904(计算时的实际采用值为 13.0205)；

近点月长 (转终)： $B' = 27.5546$ 。上述数据均以日为单位。 据经文：初限 = 84，则：

(1) $t' \in [0 \quad 6.8880]$，即： $t'/0.0820 < 84$，称为入疾初，

初限： $D = t'/0.0820$ ；则： $S(t') = -P(D)$ (18)

(2) $t' \in [6.8880 \quad 13.7773]$ ，称为入疾末，末限： $D = (B'/2 - t')/0.0820$ ；

则： $S(t') = -P(D)$ (19)

(3) $t' \in [13.7773 \quad 20.6653]$ ，即： $(t' - B'/2)/0.0820 < 84$ ，称为入迟初，

初限： $D = (t' - B'/2)/0.0820$ ；则： $S(t') = P(D)$ (20)

(4) $t' \in [20.6653 \quad 27.5546]$ ，称为入迟末，末限： $D = (B' - t')/0.0820$ ；

则： $S(t') = P(D)$ (21)

根据《授时历》：月亮的迟疾差改正在近点月周期内，亦类似于一个三角函数，它在近点月始末及中点均为零，即此刻它们的迟疾差为零，月亮处于平均位置；入疾历后月亮越走越慢，经 6.7007 日，迟疾差逐渐达到极小，然后又逐渐回落；到转中 13.7773 日入疾末，迟疾差又开始减小， 20.8539 日再一次达到极小，然后再逐渐回到零；入迟历则反之。与盈缩差不同的是 (1)：太阳入冬至后运行加快，入夏至后反之；月亮入近点月首 (近地点) 运行减慢，入月中 (远地点) 后反之。 (2)：交初末时，迟疾差并未达到极值，且在一个周期内能够两次达到极大和极小； (3)：其极值为 5.43 度。

3.4　定朔推步

《授时历》所建立的太阳和月亮运动模型和今天仍有一定的偏差。

根据《历经》：

$$\begin{aligned} \text{定朔} &= \text{经朔} + \text{加减差} \\ &= \text{经朔} + 820 \times (\text{盈缩差} + \text{迟疾差})/(10000 \times \text{入迟疾限下行度}) \end{aligned}$$

定朔单位为日。

《授时历》未给出“入迟疾限下行度”的数值和算法。“加减差”和“盈缩差 + 迟疾差”的区别在于将其单位从“度”改为“日”。

因为： 1 限 =0.0820 日，月每日平行度 = $13^\circ.36875$ ，故，月每限平行度 = $1^\circ.0962$ 。令： $V(t')$ = 月每限迟疾行度，今据《大统历》（《明史历志》）经文给出的递推法可得出：

$$\begin{aligned} V(t') &= \text{月每限平行度} \pm \text{该限损益分} = 1^\circ.0962 \pm Q(g) \\ &= 1^\circ.0962 \pm (0^\circ.11081575 - 0^\circ.0005815g - 0^\circ.00000975g \times (g-1)) \end{aligned}$$

(注： g 的单位为限数；入疾历取“ + ”号、入迟历取“ − ”号； 81−86 限的行度异常。)

该朔所入限数为： $t'/0.0820$ ，据经文可得出：

(1) $t' \in [0 \quad 6.6420]$ ，即入疾历 $0 - 81$ 限： $g = t'/0.0820$ ，则：

$V(t') = 1^\circ.0962 + Q(g)$ (22)

(2) $t' \in [6.6420 \quad 7.0520]$ ，即入疾历 $81 - 86$ 限： $V(t') = 1^\circ.0962$ (23)

(3) $t' \in [7.0520 \quad 20.4193]$ ，即入疾历 $86 - 168$ 限和迟历 $0 - 81$ 限：

$g = ABS(13.7773 - t')/0.0820$ ，其中： $ABS(X)$ 表示 X 的绝对值，则：

$V(t') = 1^\circ.0962 - Q(g)$ (24)

(4) $t' \in [20.4193 \quad 20.8293]$ ，即入迟历 $81 - 86$ 限： $V(t') = 1^\circ.0962$ (25)

(5) $t' \in [20.8293 \quad 27.5546]$ ，即入迟历 $86 - 168$ 限：

$g = (27.5546 - t')/0.0820$，则： $V(t') = 1^\circ.0962 + Q(g)$ (26)

则：定朔 = 经朔 + 加减差

= 经朔 $+0.0820 \times (T(t) + S(t'))/V(t')$ (27)

“入迟疾限下行度”数据亦可由邢云路的《古今律历考》卷 45 查找，其引数为所入迟疾历的初限 (将末限化为初限， 168− 末限 = 初限)，但注意其中疾 (迟) 历的 168 限值应和迟 (疾) 历的初限值相同，因此查表时在迟、疾历的 86 − 168 限中应将引数加 1 。

(10) 、 (13)—(16) 、 (18)—(27) 式构成了“《授时历》法”推定朔的一般公式。

3.5 《授时历》定朔算例 (始于 1300 年年前冬至月朔)

已知：距算 $N = 1300 - 1281 = 19$，年长 $A = A' = 365.2425$，月长 $B = 29.530593$，近点月长 $B' = 27.5546$，气应 $= 55.0600$，闰应 $= 20.2050$，转应 $= 13.0205$，甲子干支 $= 0$， n 为非负整数。则：

$$1300\text{年年前冬至干支} = \mathrm{MOD}(19 \times 365.2425 + 55.06, 60) = 34.6675$$

$$\text{该冬至月龄} = \mathrm{MOD}(19 \times 365.2425 + 20.2050, 29.530593) = 20.1231$$

$$\text{该天正经朔干支} = 34.6675 - 20.1231 = 14.5444$$

$$\text{各经朔干支} = \mathrm{MOD}(14.5444 + 29.530593 \times n, 60)$$

$$\text{各朔入冬至积日数}t = \mathrm{MOD}(365.2425 - 20.1231 + 29.530593 \times n, 365.2425)$$

$$\text{各朔入近点月积日数}t' = \mathrm{MOD}(19 \times 365.2425 + 13.0205 - 20.1231 + 29.530593 \times n, 27.5546)$$

其中 n 为所求各朔距 1300 年年前天正经朔 (实为 1299 年冬至月朔，即 n 等于 0) 的月数。

由下表可知：《授时历》定朔计算的最大误差约为 1 小时；其绝对值的平均误差约为 24.9 分钟。由于今算值采用的是东经 120 度的地方平时 —— “北京时”，而《授时历》所用的是元大都 —— 约东经 116.5 度 (今北京) 的地方时，它们之间相差约 14 分钟，扣除该影响后，其绝对值的平均误差约为 18.7 分钟。

表 1 “《授时历》法”推步 28 个定朔的结果及精度

(始于 AD 1300 年前冬至月朔)

经朔	t	$T(t)$	t'	$S(t')$	$V(t')$	加减差	定朔	差值
14.5444	345.1194	−0.9308	16.3003	+3.0577	1.0122	+0.1723	14.7167	−22.0
44.0750	9.4075	+0.4609	18.2763	+4.7129	1.0461	+0.4056	44.4806	+15.1
13.6056	38.9381	+1.6075	20.2523	+5.4206	1.0913	+0.5281	14.1337	+8.5
43.1362	68.4687	+2.2619	22.2283	+5.1402	1.1287	+0.5378	43.6740	−8.4
12.6668	97.9993	+2.3754	24.2043	+3.8458	1.1674	+0.4372	13.1040	−26.2

(续表 1)

经朔	t	$T(t)$	t'	$S(t')$	$V(t')$	加减差	定朔	差值
42.1974	127.5299	+1.9674	26.1803	+1.7678	1.1947	+0.2564	42.4538	−23.5
11.7280	157.0605	+1.0961	0.6017	−0.7988	1.2023	+0.0203	11.7483	−16.4
41.2586	186.5911	−0.1899	2.5777	−3.1138	1.1794	−0.2297	41.0289	−20.4
10.7891	216.1216	−1.3735	4.5536	−4.7465	1.1452	−0.4382	10.3509	−23.7
40.3197	245.6522	−2.1244	6.5296	−5.4241	1.0997	−0.5629	39.7568	−31.2
9.8503	275.1828	−2.4007	8.5056	−5.1176	1.0624	−0.5803	9.2700	−50.2
39.3809	304.7134	−2.1370	10.4816	−3.8004	1.0241	−0.4754	38.9055	−65.1
8.9115	334.2440	−1.3456	12.4576	−1.7017	0.9971	−0.2506	8.6609	−55.3
38.4421	363.7746	−0.0748	14.4336	+0.8695	0.9906	+0.0658	38.5079	−1.6
7.9727	28.0627	+1.2399	16.4096	+3.1694	1.0138	+0.3566	8.3393	+24.2
37.5033	57.5933	+2.0812	18.3856	+4.7793	1.0483	+0.5366	38.0399	−2.5
7.0339	87.1239	+2.4000	20.3616	+5.4266	1.0942	+0.5865	7.6204	−32.6
36.5645	116.6545	+2.1738	22.3376	+5.0940	1.1312	+0.5268	37.0913	−22.5
6.0951	146.1851	+1.4682	24.3136	+3.7515	1.1692	+0.3661	6.4612	−1.9
35.6257	175.7157	+0.3257	26.2896	+1.6351	1.1959	+0.1344	35.7601	+2.5
5.1563	205.2463	−0.9857	0.7110	−0.9401	1.2013	−0.1315	5.0248	−26.3
34.6869	234.7769	−1.9008	2.6870	−3.2245	1.1778	−0.3568	34.3301	−38.7
4.2174	264.3074	−2.3568	4.6629	−4.8114	1.1430	−0.5143	3.7031	−44.5
33.7480	293.8380	−2.2982	6.6389	−5.4282	1.0968	−0.5776	33.1704	−45.6
3.2786	323.3686	−1.6954	8.6149	−5.0697	1.0600	−0.5233	2.7553	−41.4
32.8092	352.8992	−0.5955	10.5909	−3.7022	1.0223	−0.3447	32.4645	−34.1
2.3398	17.1873	+0.8080	12.5669	−1.5683	0.9959	−0.0626	2.2772	−12.8
31.8704	46.7179	+1.8296	14.5429	+1.0102	0.9916	+0.2348	32.1052	+0.5

注：“差值”表示《授时历》定朔计算值和今算值 [9] 之差，单位为分钟。

4　结　　语

平朔推步原则上只要像《授时历》那样，实测一个朔日作为起点，然后再叠加朔望月长即可。对此中国历史上却存在两种推步方法，自汉刘歆的《三统历》引出上元，后世竟相效仿。寻找理想的上元就成了天文学家的枷锁。《授时历》废之，合乎天道，还之于本来面目。比较“积年法”和“《授时历》法”，它们的差异在于：(1) 历法起算点不同：前者用上元，也就不存在上推往古问题，公式显得简单，但其中隐含了推算上元的繁复以及编排历谱时惊人的计算量；后者废上元，以某一历元为起点，这样须上推下求；(2) 年长 A 的差异：前者用定值；后者的年长存在一个长期变化，其目的在于使该历能够延用万世；(3) 对于月亮、太阳改正的求解，前者用躔离表进行内插，而后者直接用公式计算；且《授时历》中盈缩差和迟疾差的单位为度，它是将周天的度数分为 365.2575, 1 度相当于今天的 $0^\circ.9856$ 。

在具体编排历谱时还存在置闰和进朔等问题。根据无中气之月为闰前月这一闰法可得，

若：　天正经朔闰余 (即冬至月龄)+ 该年闰日 $\geq$ 月长

即：　冬至月龄 $\geq 13B - A$

则该年有闰；对于临界位置的判别从定朔；$(13B - A)$《授时历》称之为闰准。

因为每月闰日为：$(A/12 - B)$

若： $$冬至月闰余 +k \times (A/12 - B) \geq B$$
其中： k 为从冬至月起数的月数。该式成立时称 k 为闰前月，而：

$$k = \mathrm{INT}((B - 冬至月闰余)/(A/12 - B)) + 1$$

李淳风在《麟德历》中始用进朔之法，后世循之。谓：朔日小余在日法四分之三已上者，虚进一日。

对于推定弦望，只要在定朔的推步公式中将 $(n \times B)$ 改为：$(n \times B + B/4)$ 、$(n \times B + B/2)$ 和 $(n \times B + 3B/4)$ ，就可分别得到定上弦、望、和下弦的推步公式。

参 考 文 献

[1] 刘金沂，赵澄秋．中国古代天文学史略．石家庄：河北科学技术出版社， 1990. 83
[2] 张培瑜，卢 央，徐振韬．南京大学学报 (哲学社会科学), 1985, 4: 64
[3] 中国天文学史整理研究小组．中国天文学史．北京：科学出版社， 1981. 101
[4] 刘金沂，赵澄秋．中国天文学史文集 (第三集). 北京：科学出版社， 1984. 38
[5] 张培瑜，卢央，刘桂霞．中国天文学史文集 (第四集). 北京：科学出版社， 1986. 77
[6] 张培瑜，王桂芬，陈月英，吕秀华．紫金山天文台台刊， 1992, 2: 121
[7] 钱宝琮．天文学报， 1956, 2: 193
[8] 钱宝琮．历史研究， 1960, 3: 35
[9] 张培瑜．三千五百年历日天象．郑州：河南教育出版社， 1990. 790

(责任编辑 刘金铭)

A Review on the Calculating Methods of the Real New Moon in the Chinese Ancient Calendars

Li Yong

(*Astronomy Department of Nanjing University, Nanjing 210008*)

Zhang Peiyu

(*Purple Mountain Observatory, The Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210008*)

Abstract

"Shuo" (the new moon), one of the fundamental elements of the Chinese ancient calendars, was known first as the mean one and then clearly as the real one. By studying these calendars, this paper analyses and induces two kinds of the calculating method of "Shuo" in different times (so-called "Ji Nian Method" and "Shou Shi Calendar Method") including the methods for computation of the mean new moon, the motions of the Sun and the Moon, the real new moon and etc. Using the basic data of each calendars, this paper also obtains straightly the general formulae of the calculation of the real new moon and gives some examples of Shou Shi Calender Method.

Key words history of astronomy