

天文常数中的相对论问题

陶 金 河^{1,2} 黄 天 衣¹

(1 南京大学天文系 南京 210093)

(2 中国科学技术大学天体物理中心 合肥 230026)

摘 要

现代天文观测技术的日新月异、广义相对论的 1PN 近似方法在天体力学和天体测量中的广泛应用,使得有必要在 1PN 框架中严格而细致地重新审查天文常数系统。在相对论框架里,太阳系天体的质量应当定义为 BD 质量,它们的相对变化不超过 10^{-19} , 可视为守恒量;引力势满足的方程不再是 Poisson 方程而与坐标规范的选择有关,引力势也不再能用传统的球谐函数展开。应当选定一种规范,并且以 BD 多极矩作为天文常数。黄赤交角已有很高的精度,因而有必要给出相对论黄道的协议定义。大地水准面的相对论定义更是有待今后研究的一个重要问题。相对论框架里与时间和长度单位有关的天文常数已有清晰的定义,对其应有准确的理解以防止错误应用。

关键词 相对论 — 参考系 — 天文常数

分类号: P126

1 引 言

目前天文上使用的 IAU 天文常数系统 (1976) 是建立在牛顿力学的框架之上的,它包括 19 个常数和九大行星的质量倒数^[1]。同时,国际地球自转服务 (IERS) 也定期提供天文常数的当代最佳估计值^[2~4]。此外, JPL 的 DE/LE 数值历表系列也给出相关的天文常数的最新数值^[5]。

通常将天文常数分为三类: (1) 定义常数,是用定义规定的最基本的常数。它是精确的,没有误差。(2) 基础常数,是直接采用天文观测资料或由物理实验确定的常数。它的精度取决于观测或实验的精度。(3) 导出常数,是根据定义常数、基础常数和所采用的理论体系计算出来的常数。天文常数的精度不但与天文观测的精度有关,还与采用的基本理论框架有关。经典的天体测量和天体力学理论都是以牛顿力学为基础的,但现代高精度的天文观测结果与理论上的预期值之间存在微小的偏差,只有广义相对论的理论预言才与实测结果在高精度下相符。

国家自然科学基金资助项目

1998-04-08 收到

1915 年广义相对论问世之后, 由于数学上的困难(张量形式和非线性), 它在理论研究和实际应用两方面都受到限制。为了将其应用于天体力学, Einstein、Droste、de Sitter 和 Lorentz 等人提出了后牛顿(PN)近似的方法^[6~9], 用来计算相对论效应。后牛顿天体力学早期的发展相当缓慢, 原因在于当时天文观测精度不高, 理论上又缺乏简单、有效的数学手段。60 年代相对论性引力理论的大量涌现, 促使 Nordtvedt 和 Will 等人提出参数化后牛顿(PPN)方法^[10], 用来检验这些引力理论。迄今为止, 所有的实验都表明, 在一阶后牛顿(以下简称 1PN)近似下广义相对论是与实验结果符合得最好的理论。1972 年 Brumberg 的《相对论天体力学》一书的俄文版^[11]问世, 标志着一个新学科分支的诞生。1983 年 Murray 首次将广义相对论引进天体测量学中^[12]。尽管他只用了球对称场近似, 但在现阶段这种近似是简单而有用的。从 1991 年到 1994 年, Damour、Soffel 和 Xu(须重明)提出了一个严格而又自治的一阶后牛顿(1PN)天体力学新体系(DSX 体系)^[13~16]。DSX 体系处理具任意形状和结构的 N 个天体的后牛顿天体力学, 它引入了适当的坐标系使度规可以用一个标量势和一个矢量势来表示并使引力场方程线性化, 它给出了 N 体质心坐标系和个别天体质心坐标系之间的完整的转换关系。在 DSX 体系中, 引力势的展开式和坐标系的转换关系都用天体的可观测量 BD 多极矩来表示。对 DSX 体系的深入研究以及它的广泛应用将会有力地推动相对论天体力学和天文参考系的进一步发展和完善。

在 1PN 近似下建立一个自治而完整的天文常数系统是当前一个重要的研究课题。从 1991 年开始 IAU 建立的天文标准工作组就一直把建立新的天文常数系统和确认最佳的天文常数作为主要任务之一, 但除了各种相对论时间尺度已讨论得比较清楚之外, 这方面的进展并不大。在 IAU 第 23 届大会上, 在以 Brumberg 为首的关于天体力学和天体测量中的相对论问题的工作组提交的报告^[17]中揭示了当前在实际工作中相对论应用的众多混乱之处。第 23 届大会上决定会后成立以 Soffel 为首的工作小组(以下简称 WG/RCMA)继续从事相对论应用的研究。小组提出的课题之一就是天文常数系统^[18]。最近在天文常数和参考系方面的新进展可参见 Bretaganon 等人^[17]、Brumberg 等人^[19]、Fukushima^[20]和 Klioner^[21~23]的工作。

本文试图综述和讨论天文常数在 1PN 近似下的定义及其相关的一些问题。DSX 体系在这里扮演着重要的角色。对存在的问题和今后有待研究的课题也进行了讨论。本文的讨论是相当初步和不完整的, 不少地方仅提出了问题而未能给出答案。

2 天体的质量

在牛顿力学中天体的质量是其惯性的量度。如果天体与其周围环境无物质交换, 天体的质量是常数。狭义相对论中质量和能量等价, 上面说的物质交换就应当包括能量的交换。同时天体的质量不仅由它包含的粒子数来决定, 也包括粒子间的结合能。按照广义相对论, 天体之间相互的引力作用使得一个天体的引力能不守恒, 可以推断只有孤立的天体或天体系统才有可能定义守恒的质量。然而, 即使是一个孤立的天体, 如果它的形状不规则且有自转, 其引力变化的信息也会以引力波的形式传播, 而引力波要带走能量。可见只有球对称的 Schwarzschild 场的引力源才能有一个守恒的质量。

引力波带走的能量是一个高阶的小量。在 1PN 近似下对一个孤立的天体或天体系统就有可能定义一个 1PN 守恒的质量。Landau 和 Lifshitz^[24]、Fock^[25]、Arnowitt 等人^[26]、

Will^[10] 和 Soffel^[27] 都曾给出相互等价的孤立系统的 1PN 守恒质量的定义, 称为 ADM 质量。对于非孤立的天体和天体系统, DSX 体系^[13] 使用一种 1PN 守恒的质量——BD 质量^[28]。它是 ADM 质量在非孤立系统下的推广, 在孤立情况下与 ADM 质量相同。在由 N 个任意组成和形状、弱自引力、旋转、可变形的物体构成的系统中, 物体 A 的 BD 质量 M_A 定义为:

$$M_A(T) \equiv \int_A \left[\Sigma(T, \mathbf{X}) - X^\alpha \dot{\Sigma}^\alpha(T, \mathbf{X})/c^2 \right] d^3X + O(4) \quad (1)$$

其中 T 和 \mathbf{X} 是 A 的体元在天体且处局部坐标系中的时空坐标, Σ 和 $\dot{\Sigma}^\alpha$ 可看成是天体 A 的质量密度和质量流密度, $O(4)$ 表示 c^{-4} 量级及更小的量。 M_A 随时间的演化方程是

$$\dot{M}_A(T) \equiv dM_A/dT = -c^{-2} \sum_{l \geq 2} \frac{1}{l!} \left[(l+1)M_L^A \dot{G}_L^A + lM_L^A G_L^A \right] + O(4) \quad (2)$$

这里 M_L^A 是天体 A 的质量多极矩, 而 G_L^A 是其他天体对 A 作用的引力电潮汐矩, 各量的准确含义请查阅文献 [13]。由上式可见, 若 A 是孤立的, G_L^A 为零, A 的 BD 质量 1PN 守恒。

太阳和行星不是孤立的天体。但方程 (2) 右端出现的是天体 A 的四极矩以上的多极矩, 量级相当于表示天体形状的 J_2 值或更小, 引力潮汐矩在太阳系里也是小量。简单的计算表明地球 BD 质量的相对变化不超过 10^{-20} , 木星不超过 10^{-19} , 太阳不超过 10^{-22} (假定太阳的 J_2 值为 2.47×10^{-5}), 都是 2PN 级的小量。因此, 在符合目前观测精度的 1PN 近似下, 太阳和行星的 BD 质量可视为常数, 与 ADM 质量的概念等价。当前行星质量的最准确值是 DE/LE 历表给出的。而在构造 DE/LE 历表时, 已经用了参数化的后牛顿 (PPN) 理论框架。在 PPN 中, 由于引入 2 个待定参数 γ 和 β 而与广义相对论有微小的差别。此外, 历表所用的理论模型也没有严格满足 1PN 近似。在当前精度下应当采用什么样的度规还有待研究。但现在列出的行星质量倒数所对应的质量已不能说还是牛顿质量。我们认为 DSX 体系是完整的 1PN 理论, 采用 BD 质量有助于理论形式的优美和计算的简化, 太阳系天体的质量应当定义为其 BD 质量。

仔细审视 (1) 式, 就会发现 BD 质量可能与坐标系的选择有关, 而习用的牛顿质量是天体本身的物理性质, 与坐标系的选择无关。在广义相对论中, 通常把依赖坐标系的量称为坐标量, 而把不依赖于坐标系的量称为固有量。文献 [29] 曾设想天文常数应当是固有量, 现在看来是行不通的。BD 质量依赖坐标系选择的程度还有待研究。从 Schwarzschild 质量与坐标系选择无关来看, BD 质量对坐标系的依赖程度应当是微弱的。

长久以来, 天文学家只能得到行星质量在天文单位系统中的值, 而它们在 SI 单位下的值则是不准确的。在航天时代到来以及 SLR、LLR 出现之后, 这一情况已经改变。JPL 在建立 DE/LE 历表时用的就是 SI 单位。然而, 所测得的质量参数仍然只是牛顿引力常数 G 和天体质量 M 的乘积 GM 而不是 M 。 G 在 SI 单位系中的数值^[30] $(6672.59 \pm 0.854) \times 10^{-14}$ 是地面物理实验测定的, 有效位数仍然很少。众所周知, G 值的不精确不会影响精密轨道和天文参考系的工作。

3 天体的引力场

在 IAU 1976 天文常数系统中, 表示天体引力场的常数除了天体的质量外, 只有地球的力

学形状因子 J_2 。然而,精密历表和参考系工作中需要太阳系天体引力场的全部参数,它们都属于天文常数的范畴。在牛顿力学中,天体的引力场可用天体引力势的球谐展开式的各阶系数来表示(以下简称为球谐系数)。在 1PN 天体力学中,情况要复杂得多。有两个问题要予以重点说明:一是天体的引力场要用一个标量势 W 和一个矢量势 $W_a (a = 1, 2, 3)$ 才能完整地表示;另一是无论选择什么样的坐标, W 和 W_a 中至少有一个不满足 Poisson 方程,因而不能用球谐函数展开,如果硬行展开的话,球谐系数将不是常数而与场点的位置有关。

在目前的人造卫星轨道理论和数据处理中,实际上只考虑了 Schwarzschild 场的相对论摄动,即标量势中的单极矩(质量)部分。矢量势来自地球的自转,它引起的相对论摄动(Lense-Thirring 效应)要比标量势的效应小得多。文献 [31] 从这一事实出发,试图解决以上问题。

地球物理学家和天文学家习惯把引力势用球谐函数展开,然而物理学家在理论工作中却常常使用对称无迹(STF)的质量多极矩展开。Hartmann 等人 [32] 详细讨论了在牛顿力学框架内的两种展开方式及其相互关系。他们给出直角坐标下的牛顿多极矩和相应的球谐系数之间的转换关系,并指出多极矩展开形式用计算机编程更为简单且计算效率高。他们的工作表明有可能用 STF 质量多极矩代替球谐系数来作为天文常数。

然而,文献 [32] 得到的转换关系并不能直接用于 1PN 的情况。DSX 体系用的并非牛顿多极矩,而是 BD 质量多极矩 [13]。这里有两个问题值得进一步讨论:一是 BD 多极矩能否作为天文常数而由观测予以测定;二是能否建立它们与相应的球谐系数之间的关系。

BD 质量多极矩 M_L 和自旋多极矩 S_L 是在地球处的 DSX 坐标系中定义的。文献 [13] 明确指出,DSX 坐标系的空间轴最多只能有一个 1PN 量级的微小旋转,也就是说它是一个准惯性系(可看为通常使用的地心参考系 GRS)。由于地球的自转和不规则形状,在这一准惯性系中定义的多极矩是随着时间而快速变化的,因而不宜作为天文或地球物理常数。这和牛顿力学的情况完全一样,只有在与刚体地球共转的坐标系中展开地球引力势的球谐系数才是常数。文献 [31] 从这一思想出发,引入地球的共转坐标系 (cT, x^i) (以下简称为共转系)。它的时间坐标与 DSX 的相同,空间坐标的关系为 $x^i = R_i^a(T)X^a$, 其中 $R_i^a(T)$ 是与时间有关的正交矩阵,表示地球的自转。借助于 $R_i^a(T)$ 可以把 M_L, S_L 和 \dot{M}_L 的时间导数 \dot{M}_L 都投影到共转系中去,分别记为 m_L, s_L 和 m'_L 。容易证明,它们都是随时间缓变的物理量 [31]。地球的 1PN 标量势和矢量势都可以用它们进行展开。所以,这些量是可观测量,可以代替 BD 多极矩成为天文或地球物理常数以表示天体的引力场。

DSX 体系中使用了所谓代数坐标条件 [13] 而简化了度规和场方程的形式。这种坐标可称为 DSX 坐标。它对时间坐标并没有完全限死,允许时间坐标在 $O(4)$ 量级上有自由度,即所谓时间规范。文献 [31] 发现,如果选择一种特殊的标准 PN(后牛顿)规范,不仅标量势 W 满足的场方程形式上为 Poisson 方程而可以用球谐函数展开,并且 W 用 BD 多极矩展开时有和牛顿力学展开式相似的简单形式。显然这种坐标规范有其明显的优越性。WG/RCMA 的第二号公报 [18] 提出要固定坐标规范以使时空度规和时间坐标唯一化。我们认为,从引力势的展开看,应当选择文献 [31] 提出的时间规范。当然这时矢量势 W_a 不满足 Poisson 方程,它的球谐系数与场点的位置有关。这一问题尚未完全解决。

文献 [31] 还给出了在上述后牛顿规范下 m_L, s_L 和 m'_L 和相应的球谐系数之间的关系。例如, 2 阶带谐系数的表达式为

$$J_2 = -\frac{3m_{zz}}{2Ma_e^2} = -\frac{3R_z^a R_z^b M_{ab}}{2Ma_e^2} \quad (3)$$

其中 M 和 a_e 分别是质量和赤道半径。虽然各量的含义已经改变而包括了相对论效应，该关系和牛顿情况下的公式在形式上完全相同，很好保持了天文参考系工作中所要求的连续性。

4 黄道和赤道

黄道和赤道是天文参考系的两个基本坐标面。在传统的天文学中，黄道是地月系质心绕太阳系质心的平均轨道面，而赤道则与地球的自转有关，是与地轴相正交的一个平面。两者在空间都是运动的，因而在提到它们时必须给定对应的历元。赤道还有长期和周期运动，相应地有平赤道和真赤道的区别。同时，在太阳系质心参考系 (BRS) 和地心参考系 (GRS) 中，都定义有明确的同一历元的赤道和黄道坐标系。不同参考系的赤道或黄道平面之间是简单的平移。在广义相对论理论中，物质的存在造成时空的弯曲，平面和平移这些名词顿时变得模糊起来。这一节试图对此作一些初步而不成熟的讨论。

先讨论黄道和赤道的传统概念在现代高精度的天文参考系的理论中是否有所变化。在 WG/RCMA 的第二号公报^[18] 中明确提出要审查黄道、赤道、分点这些概念是否还有存在的必要。

在各种天文参考系中，最基本的是两个：习用的天球参考系 (CCRS) 和习用的地球参考系 (CTRS)^[33]。两者都是赤道坐标系。前者在 BRS 中建立，后者在 TRS(地球参考系) 中建立。CTRS 和 CCRS 之间的坐标系转换要通过一个中间坐标系，亦即地心准惯性系，不妨称之为习用地心参考系 (CGRS)。这些参考系的 XY 平面都可以称为赤道，X 轴的指向都可称为分点。CTRS 的物理参照物是一批精选的地面观测站。1997 年夏举行的 IAU 第 23 届大会的决议 B2 规定从 1998 年 1 月 1 日起 IAU 的天球参考系 (ICRS) 由一批河外射电源确定，在光学波段则由依巴谷星表表示^[34]。这表明天文参考系的基本面和经度起算点将完全脱离太阳系动力学。这些新的“赤道”和“分点”只要有一套维持的方法，并不要求具有原始的含义。例如，不再要求向所谓动力学分点靠拢。但是，正如 IAU 第 23 届大会的决议 B4 所述，

“ICRS 的实现基于地球上的观测而地球相对于 ICRS 有岁差和章动”。岁差和章动的分离造成了平赤道和真赤道的概念。在经典的岁差章动理论中，又要区分日月岁差和行星岁差，毫无疑问要涉及黄道的概念。那么，随着参考系的日益精确化，平赤道、真赤道和黄道这些概念也需要精确化吗？

仔细审查经典的参考系理论，可以发现只有在两种情况下需要黄道：(1) 为建立一个解析的地球、月球和行星理论，用黄道为基本面可以引入轨道倾角为小参数。(2) 为建立一个解析的岁差章动理论，这时需要一个解析的月球和太阳理论。众所周知，目前通行的行星月球历表 DE/LE 系列是完全用数值方法建立起来的，用的是赤道坐标系而不是黄道坐标系。Fukushima^[20] 指出，完全可以仿照现行 DE 历表用数值方法处理月球天平动的方式来建立数值的岁差章动系列，亦即用数值积分直接计算 TRS 相对 GRS 的运动。这样，岁差和章动不再予以区分，也就取消了平赤道和真赤道的概念，黄道概念的精确化也没有任何现实的意义。当然，地球不是刚体，观测资料又非常精确，无论用数值还是解析的方法建立地球自转受迫部分的理论的主要困难在于建立一个准确的地球物理模型。Fukushima 思想的实现仍然需要时日。上面提到的 IAU 决议 B4 建议成立一个工作小组来探讨在引入新的 ICRS 后天文资料的归算方法。

以上的讨论表明,在引入相对论后也没有必要对黄道的概念进一步精确化。在目前还未摆脱黄道的情况下,有必要给黄道一个约定的 1PN 定义,否则在 DE 历表和 IERS 规范^[2~5]中列出的有很多位数字的黄赤交角值的含义就变成模糊不清了。在相对论框架里这种约定特别重要,因为黄道与地月系的轨道角动量有关,而后者是个坐标量,迄今为止并没有一个明确的 1PN 轨道角动量定义。

传统的黄道是地月系质心在 BRS 中的轨道角动量对时间取平均滤去周期项后的法平面。天文上有过两个黄道^[35]: Le Verrier 黄道和 Newcomb 黄道。由于历史的原因,DE 系列历表用的是 Newcomb 黄道。文献 [36] 建议承袭历史,定义建立 1PN 黄道的方式与传统的方式全同,轨道角动量也用牛顿形式,只是地月系质心的位置矢量和速度矢量都达到 1PN 精度。在 DSX 体系中,这样定义的黄道应当是规范无关的,因为 DSX 坐标的规范变换相当于时间的一个 $O(4)$ 量级的变化,对黄道没有影响。

文献 [36] 对 1PN 黄道进行了详细的讨论,得到了以下的结论: (1) 如果坐标原点在日心而不是太阳系质心,木星和土星的存在使黄道倾角的误差 ΔI 分别达到 $23''$ 和 $24''$, 这显然不能允许。(2) 天体系统的 1PN 质心和牛顿质心的计算公式不相同,由此引起的 ΔI 只有 $10^{-3}\mu\text{as}$, 可以忽略。(3) 如果用地球质心代替地月系质心,则 ΔI 可达 $0''.6$, 不能忽略。(4) 由于 1PN 效应引起的黄道的附加运动非常微小,其长期部分只有每世纪 $0.4\mu\text{as}$, 完全可以忽略。由此可见,黄道运动的相对论效应在目前的精度下是完全可以忽略的。DE 历表的编制者在建立黄道时并没有完整地考虑 1PN 效应,文献 [36] 的讨论实际上论证了 DE 黄道的合理性。

由于轨道角动量的特性,黄道显然应当在 BRS 中定义。Brumberg 等人^[19]指出,对一个给定的 BRS 中的 1PN 黄道,在 GRS 中存在着多个可能的 1PN 黄道与之对应。1PN 定义的缺乏唯一性是一个普遍的问题。前面定义的 BRS 中的黄道用 1PN 轨道角动量来实现。在弯曲空间里一个曲面并不能用一个法矢量唯一地确定。这表明我们定义的黄道仍是天球坐标系中的概念,和赤道一样用来表示遥远天体的方位。在远处空间可看作是平直的。黄道和赤道可看作是平面,而由其法矢量决定。当然,它们也可看作是坐标原点处的空间三元基。这样,在 BRS 和 GRS 中同一历元的黄道和赤道的相对位置应当是相同的,亦即有相同的黄赤交角。在讨论太阳系天体的轨道运动时,显然不能把空间看成平直,天体的 BRS 坐标和 GRS 坐标之间要严格按照 4 维坐标变换进行。例如,如果用 DE/LE 历表,那么是太阳系质心和地心赤道坐标系。设想,这一历表是按 DSX 体系制定的,DSX 空间坐标允许有一个正交变换的自由度,因此也可以方便地转换成所谓黄道坐标系。这只是初步而不成熟的讨论。显然,关键并不是黄道、赤道、分点这些概念,而是在 1PN 近似和新的 IAU 参考系下,地球参考系 TRS 和天球参考系 CRS 之间的转换应当如何计算,现有的岁差表达式和章动系列又将起什么作用。

地球自转和岁差章动中 1PN 效应的重要性毋庸置疑,很多学者进行了研究^[15,21~23,37]。除了著名的测地岁差和测地章动外,一些小的相对论效应是完全不必考虑的^[38]。这方面的问题仍在研究之中,有些计算结果也不能视为定论,还需进一步的验证^[23]。例如,文献 [15] 估算黄经日月岁差的 1PN 修正除去测地岁差外有可能达到每世纪 0.1mas , 这有待将来做更为详细、深入的探讨。在 WG/RCMA 的第二号公报^[18]中,建议要进一步研究弹性体自转的 1PN 理论和测地岁差等对转换函数的影响。

5 地球的形状

与地球形状有关的天文常数有地球赤道半径 a_e 和地球扁率 f 。它们表示一个假想的旋转椭球体的形状。这个椭球体是大地水准面在最小二乘意义下的最佳近似。在大地测量中有 7 个基本参数: a_e 、 f 、地球引力参数 GM_E 、大地水准面的重力势 W_0 、地球自转角速度 ω 、赤道上的正常重力 g_e 和重力扁率 β 。它们刻划了地球的几何和物理特征。在经典的框架里, 这 7 个参数中只有 4 个是独立的, 其余 3 个可以从理论上导出^[39]。在 IAU 1976 天文常数系统中, 已经列入 a_e 、 f 和 GM_E 。为了系统的完整, 显然应当再增加一个天文常数。 W_0 的值决定了地球时 TT 的秒长, 也就唯一地决定了 TT 和地心坐标时 TCG 之间的转换因子 L_G ^[33]。此外, 在经典理论框架里 W_0 能够用卫星测高技术以很高的精度加以测定, 且不需要全球范围的数据。在一阶近似下, W_0 不受零频潮汐项的影响, 也不依赖于 J_2 的长期变化^[39]。因此, IERS 1996 规范 [4] 已将 W_0 列为基础天文常数。

在相对论框架里, 由于 Lorents 收缩和爱因斯坦收缩, 天体的形状依赖于坐标系的选择。显然, 我们应当在 CTRS 中讨论地球的形状。这里的关键是讨论大地水准面的相对论概念。这是 WG/RCMA 第二号公报^[18] 提出要讨论的重点问题之一。在经典大地测量里, 大地水准面是平均海平面的延伸, 是重力势的一个等势面。在相对论大地测量里我们再次面临引力势不能只用一个标量势而要用标量势和矢量势同时来表示的问题。下面仅仅讨论 1PN 重力势的形式。

设 GRS 中的时空坐标为 (cT, X^i) , 按照 DSX 体系, GRS 中的度规可写成^[13]

$$ds^2 = -\exp(-2U/c^2)c^2dT^2 - \frac{4}{3}U^i cdT dX^i + \delta^{ij} \exp(2U/c^2) dX^i dX^j \quad (4)$$

其中 U 和 U^i 分别是标量势和矢量势, δ^{ij} 当 $i = j$ 时为 1, 否则为 0。记 TRS 中的时空坐标为 (cT, Y^i) 。注意由于地球的自转, TRS 坐标系不是 DSX 坐标系, 其度规不具有方程 (4) 的形式, 而要从空间坐标变换

$$X^i = R_j^i(T) Y^j \quad (5)$$

得到。这里 $R_j^i(T)$ 是依赖于时间的一个正交矩阵。通过简单的运算可得到 TRS 中的度规为

$$ds^2 = -(1 - 2W/c^2)c^2dT^2 + G_{0i} c dt dY^i + G_{ij} dY^i dY^j \quad (6)$$

其中

$$W = U + \frac{1}{2} \dot{R}_k^i \dot{R}_l^j Y^k Y^l + \frac{1}{c^2} \left[-U^2 + U \dot{R}_k^j \dot{R}_l^j Y^k Y^l - 2U^i \dot{R}_k^i Y^k \right] + O(4) \quad (7)$$

从上式可见, 1PN 重力势 W 不仅与标量势 U 有关, 而且其 1PN 项还依赖于矢量势 U^i 。此外, 因为标量势的 1PN 项是规范有关的, W 在 1PN 精度下也是规范有关的, 必须取定时间规范, W 的定义才能唯一地确定。但是 W 的 1PN 项的不确定性不会影响 L_G 的数值, 产生的误差是 2PN 量级的。

上面的讨论似乎表示 1PN 大地水准面可以定义为一个 W 的等值面。然而, 还没有足够的理由说平均海平面是 W 的等值面, 同时也很难设想一个规范有关的 W 值可以直接测量。这有待于今后的研究。

6 时间和单位

这一节讨论与时间和天文单位系统有关的天文常数。首先来讨论在相对论框架中物理量的单位问题。对于类时间隔，记时空度规为

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{00}c^2 dt^2 + g_{0i}cdtdx^i + g_{ij}dx^i dx^j \quad (8)$$

其中 s 和 τ 都是有明确物理意义并可直接观测的物理量，通常分别以 SI 米和 SI 秒为量度单位，而 x^i 和 t 则是空间和时间坐标，由于相对论里坐标选择的任意性，它们不一定具有清晰的物理意义。在天文界，关于单位问题最早的混乱来自时间尺度 TDB 和 TT 等的引入。

设作时间变换 $t = k\bar{t}$ ，这里 k 是近于 1 的常数。例如 t 是 TCB， \bar{t} 是 TDB，而 $k = 1 + L_B$ 。这样一来，当以 \bar{t} 和 x^i 为时空坐标时，度规的形式将不同于方程 (8)，运动方程的形式也将有所不同。JPL 在编制 DE 系列历表时，用 TDB 作为时间坐标，却没有改变度规的形式。这种做法等价于空间坐标也进行了一个共形的变换 $x^i = k\bar{x}^i$ ，从而使运动方程保持不变。这一点最早为 Fukushima 等人^[40]所指出。他们认为这相当于时间单位和空间单位作了一个相同的尺度变换，单位的变化就会造成一些天文常数如 GM 等取值的变化。于是出现了 TDB 米、TT 米等各种单位，使实际使用者困惑，甚至在 IERS 标准 (1992) 中列出 GM_E 的值时也出现了错误^[3]。

这种比例因子变换也可以看成不是单位变换，而是引入了新的坐标变量^[19,29]。因为在 IAU 天文常数系统里规定使用 SI 单位，这种看法更为恰当。也就是说，所有的时间尺度都以 SI 秒为单位，它们之间的关系是坐标变换。IAU 第 23 届大会决议 B5 建议“为观测资料分析的方便而使用 TT 时，不应当同时进行地心空间坐标的变换”^[34]。这实际上是不赞成所谓 TT 米和 TT 秒。按道理这一原则对 TDB 同样适用，问题是 DE 历表的做法沿用已久，难以更改。

关于天文时间尺度的文献和报告中还常常出现如下的说法：TT 和 TAI 的秒长是大地水准面上的 SI 秒，而 TCG 的秒长是远离引力源处的 SI 秒。这些话令人觉得 TT 和 TCG 有不同的单位。其实这些话的准确叙述方式是：用 TT 或 TAI 为坐标时，大地水准面上的坐标钟的钟速和那里的静止原时钟钟速相同；用 TCG 为坐标时，则远离引力源处的坐标钟的钟速和那里的静止原时钟钟速相同。黄天衣等人^[29]的看法是只有原时和固有长度才有单位，坐标则只有读数。为方便起见，坐标也可以有量纲。像 TT 秒这类说法也可以使用，但需要理解为在用 SI 秒为单位时，1TT 秒是 TT 的读数增加 1。

鉴于在历表和天文数据处理中仍要使用 TT 和 TDB，应当把时间尺度转换因子 L_G 和 L_B 列入天文常数。IERS 规范^[2~4]现已列出它们的数值。

文献 [29] 重点讨论了天文单位的相对论概念，强调了 1 日等于 86400 SI 秒。日仍是原时的单位。至于长度的天文单位 A ，不应当把它看作地球太阳之间的平均距离，或与 Kepler 第三定律有关，而是比 SI 米大得多的固有长度单位。这一看法的问题是 A 的定义与质量的天文单位有关。在现行的天文单位系统中，以太阳质量为质量的天文单位，以日为时间的天文单位，而以高斯引力常数在天文单位系统中的值 k 作为定义常数，因此 A 就显然和太阳质量有关。如本文第 2 节所述，天体的质量在 1PN 近似下严格地说并不是一个守恒量，更不是一个局部量，而 A 作为固有长度单位应当是一个局部量。我们认为，固定 A 的 SI 米值来作为

长度天文单位的定义并列为定义常数, 而放弃 k 作为定义常数是恰当的办法。至于质量的天文单位, 由于只能精密测定天体的引力常数 GM 而不能给出天体质量 M 的精确数值, 且 GM 只和长度和时间单位有关, 质量天文单位概念的精确化没有现实意义。

7 讨 论

人们曾经认为天文常数应当是不依赖于坐标系选择的物理量, 这样才是可观测的量。按这一标准, 在相对论框架里天文常数应当是局部量或称为固有量。然而本文的讨论表明, 大部分天文常数都在不同程度上依赖于坐标系的选择。它们是所谓坐标量。严格地说, 在现行的天文常数系统中只有光速 c 和牛顿引力常数 G 是独立于坐标系选择的固有量。天文单位距离 A 和天文单位距离的光行时 τ_A 按上节的讨论可以严格定义为固有量。一些天文常数 (像大地水准面上的重力势 W_0) 甚至于是时间规范有关的。

在毫角秒的观测精度下, 只有部分天文常数的有效数字达到了 1PN 精度。它们是 A 、 τ_A , 黄赤交角 ϵ 、地球赤道半径 a_e 以及地球、月球等天体的引力常数值 GM 等。随着空间干涉测量和微角秒天体测量时代的到来, 1PN 效应将变得越来越重要。例如黄赤交角在 1PN 下根本就没有一个习用的定义, 是否还需要把它列为天文常数也值得讨论。

在相对论框架里建立一个自治的天文常数系统尚需作很多努力。通过本文的讨论, 我们认为以下一些问题需要在天文界中进行探讨并作出约束性的决议:

- (1) 选定坐标规范并唯一地确定太阳系时空度规的形式。建议充分考虑 DSX 体系的成果以及文献 [31] 推荐的一种标准后牛顿规范。
- (2) 确定用什么样的参数系列来表示天体的引力场。用球谐系数还是对称无迹多极矩。并要明确这些参数的严格定义。
- (3) 研究地球自转的 1PN 理论。主要指其受迫部分, 亦即所谓岁差和章动。
- (4) 研究 CTRS 和 CCRS 之间转换的计算方案。这将有助于确定是否还需要黄道和分点这些概念在相对论情况下的扩充。
- (5) 研究大地水准面的相对论概念及其实际测量办法。

参 考 文 献

- 1 Seidelmann P K. *Celes. Mech.* 1977, 16: 165
- 2 McCarthy D D ed. *IERS Standards (1989)*, IERS Tech. Note 3, Paris: Obs. de Paris, 1989
- 3 McCarthy D D ed. *IERS Standards (1992)*, IERS Tech. Note 13, Paris: Obs. de Paris, 1992
- 4 McCarthy D D ed. *IERS conventions (1996)*, IERS Tech. Note 21, Paris: Obs. de Paris, 1996
- 5 Standish E M, Newhall X X, Williams J G et al. *JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE403/LE403*, JPL IOM 3.14.10-127, to be submitted to *Astron. Astrophys.*
- 6 Einstein A. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber*, 1915, 831
- 7 Droste J. *Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam*, 1916, 19: 447
- 8 de Sitter W. *M.N.R.A.S.*, 1916, 76: 699; 77: 155
- 9 Lorentz H A, Droste J. *Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam*, 1917 26; 392; 26: 649
- 10 Will C M. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1981
- 11 Brumberg V A. *Relativistic Celestial Mechanics*. Moscow: Nauka, 1972, in Russian
- 12 Murray C A. *Vectorial Astrometry*. Bristol: Adam Hilger Ltd., 1983

- 13 Damour T, Soffel M, Xu C. *Phys. Rev.*, 1991, D43: 3273
- 14 Damour T, Soffel M, Xu C. *Phys. Rev.*, 1992, D45: 1017
- 15 Damour T, Soffel M, Xu C. *Phys. Rev.*, 1993, D47: 3214
- 16 Damour T, Soffel M, Xu C. *Phys. Rev.*, 1994, D49: 618
- 17 Bretagnon P, Brumberg V A et al. *General Relativity and the IAU Resolutions*, Report of the IAU WGAS Sub-Working Group on Relativity in Celestial Mechanics and Astrometry (RCMA SWG), 1997, Preprint
- 18 Soffel M H. *Circular No.2*, IAU WG/RCMA, 1998
- 19 Brumberg V A, Bretagnon P, Guinot B. *Celes. Mech.*, 1996, 64: 231
- 20 Fukushima T. *Celes. Mech.*, 1997, 66: 107
- 21 Klioner S A. In: Ferraz-Mello S, Morando B et al. eds. *Dynamics, Ephemerides and Astrometry in the Solar System*, Dordrecht: Kluwer, 1996, 309
- 22 Klioner S A. In: Capitaine N, Kolaczek B, Debarbat S eds. *Earth Rotation, Reference Systems in Geophysics and Solar System*, Proc. of Les Journées', Warsaw, 1995, Paris: Paris Observatory, 1996: 175
- 23 Klioner S A. In: Wytrzyszczak I M, Lieske J H, Feldman R A eds. *Dynamics and Astrometry of Natural and Artificial Celestial Bodies*, IAU colloquium No.165, Poznan, 1996, Dordrecht: kluwer, 1997: 383
- 24 Landau L D, Lifshitz E M. *Teoriya Polya*. Moscow: Nauka, 1941, in Russian
- 25 Fock V. *The Theory of Space, Time and Gravitation*. Oxford: Pergamon, 1959
- 26 Arnowitt R, Deser S, Misner C. *Phys. Rev.*, 1960, 120: 313
- 27 Soffel M H. *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy*, Berlin: Springer-Verlag, 1989
- 28 Blanchet L, Damour T. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1989, 50: 377
- 29 Huang T-Y, Han C-H, Yi Z-H et al. *Astron. Astrophys.*, 1995, 298: 629
- 30 Cohen E R, Taylor B N. *CODATA Bulletin*, Bureau International des Poids et Mesures, 1986
- 31 Tao J-H, Huang T-Y. *Astron. Astrophys.*, 1998, 333: 1100
- 32 Hartmann T, Soffel M H, Kioustelidis T. *Celes. Mech.*, 1994, 60: 139
- 33 夏一飞, 黄天衣. *球面天文学*. 南京: 南京大学出版社, 1995
- 34 *IAU Information Bulletin 81*, 1998, San Francisco
- 35 Standish E M. *Astron. Astrophys.*, 1981, 101: 117
- 36 Tao J-H, Huang T-Y. *Astron. Astrophys.*, 1998, 333: 374
- 37 VOinov A V. *Celes. Mech.*, 1988, 42: 293
- 38 黄天衣. *天文学进展*, 1996, 14: 114
- 39 夏一飞. *天文学进展*, 1999, 17(1): 15
- 40 Fukushima T, Fujimoto M-K, Kinoshita H et al. *Celes. Mech.*, 1986, 36: 215

Relativistic Problems on Astronomical Constants

Tao Jinhe^{1,2} Huang Tianyi¹

(1 Department of Astronomy, Nanjing University, Nanjing 210093)

(2 Center for Astrophysics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract

The fact that the modern astronomical observational technique has made rapid progress and the 1PN approximation of general relativity has been extensively applied in celestial mechanics and astrometry, makes it is necessary to investigate and examine the system of astronomical constants carefully and rigorously in the relativistic framework. The mass of a celestial body in the solar system should be defined as its BD mass that changes relatively in an amount less than 10^{-19} and could be considered as a constant. The equations satisfied by the gravitational

potentials are not Poisson equations anymore but depend on the choice of the coordinate gauge. Therefore the gravitational potentials cannot be expanded in the traditional harmonics. It is necessary to choose the coordinate gauge and take BD multipole moments as astronomical constants. The obliquity of the ecliptic has been determined in high precision and it would be necessary to give a conventional definition of the 1PN ecliptic. A relativistic definition of the geoid is important and left to be discussed. The astronomical constants that relate the units of time and length have been clearly defined but need to be clarified to avoid their misuse.

Key words relativity—reference systems—astronomical constants