

文章编号: 1000-8349(2007)04-0375-09



原子钟时域频率稳定度分析中 等效自由度的计算与分析

郭海荣^{1,2} , 郭树人³ , 焦文海²

(1. 信息工程大学 测绘学院, 郑州 450052; 2. 北京市 5136 信箱, 北京 100094; 3. 西安测绘研究所, 西安 710054)

摘要: 该文基于标准化自协方差函数的组合算法计算了阿仑方差、哈达玛方差的重叠和非重叠形式以及改进阿仑方差、时间方差的等效自由度, 并用经验公式计算了总方法估计的等效自由度, 在此基础上对各种方差估计不同噪声情况下的等效自由度进行了比较分析, 得出如下结论: 总方法估计的等效自由度大于相应非总方法估计的等效自由度, 重叠和非重叠阿仑方差估计的等效自由度大于相应哈达玛方差估计的等效自由度; 对非重叠估计而言, 噪声的频率越低, 其等效自由度越大; 而相应的重叠估计和总方法估计与之相反, 噪声的频率越高, 其等效自由度越大, 这也说明重叠估计和相应的总方法估计对高频噪声等效自由度的提高优于低频噪声。

关键词: 时间频率; 原子频标; 稳定性分析; 置信区间; 等效自由度

中图分类号: P127.1 **文献标识码:** A

1 引 言

星载原子钟作为卫星导航定位系统的重要组成部分, 其性能直接决定用户的导航定位精度, 因此, 对星载原子钟进行性能评估具有重要意义。时域频率稳定性分析目的是从时域角度, 用一个简明的、全面的量化标准来描述原子频标输出频率的随机波动情况。而影响原子频标频率稳定性的主要因素包括频率源噪声和环境因素影响。其中, 原子频标噪声模型通常表示为下面几种能量谱噪声的线性叠加: 调相白噪声 (WH PM)、调相闪变噪声 (FL PM)、调频白噪声 (WH FM)、调频闪变噪声 (FL FM)、调频随机游走噪声 (RW FM)、调频闪变游走

收稿日期: 2006-07-31; 修回日期: 2006-11-21

基金项目: 国家自然科学基金项目 (40474001、40274002、40604003)

噪声 (FW FM) 和调频随机奔跑噪声 (RR FM) [1-3]。考虑到频率稳定性分析主要分析原子频标输出频率的随机变化部分, 因此, 通常在稳定性分析之前, 先确定并去除系统性影响; 并设法使原子频标工作在一个很好的环境下来最小化环境因素影响; 此外, 在进行频率稳定性分析时, 并假设参考频标的不稳定性和设备影响可以忽略或去除。

原子频标时域频率稳定性分析, 由于定义的不同有多种表征方式, 如阿仑方差和哈达玛方差的重叠和非重叠形式、改进阿仑方差、时间方差以及相应的总方法估计。在给出各种方差估值的同时, 还需给出相应的置信度, 这个估值才会有意义。而方差估计的置信区间不仅跟方差类型、平滑因子和数据点个数有关, 还跟置信因子和能量谱噪声类型有关。最简单的置信区间计算方法是不考虑噪声类型, 直接设定 $\pm 1\sigma(68\%)$ 为 $\pm \sigma_y(\tau)/\sqrt{N}$; 更精确些的方法是根据噪声因子 k_n , 按 $\pm(k_n \cdot \sigma_y(\tau))/\sqrt{N}$ 计算 $\pm 1\sigma(68\%)$ 的置信区间; 然而, 时域频率稳定性分析中最常用、最精确的置信区间计算方法是依据 χ^2 分布进行计算 [2,4]。

考虑到基于 χ^2 分布计算方差估计的置信区间关键是确定其等效自由度, 为此, 本文将在分析基于 χ^2 分布计算置信区间的基础上, 给出各种方差估计不同噪声情况下等效自由度的计算公式, 并对其进行比较分析, 为时域稳定性分析方法的选择提供参考。

2 基于 χ^2 统计量的置信区间计算

χ^2 统计量可以用来按指定的置信因子计算单边或双边方差估值的置信区间, 这是时域稳定性分析中最常用的置信区间计算方法, 原子钟性能评估软件 Stable 32 也采用这种方法计算方差估计的置信区间。

采样方差分布函数可表示为 [2,4]

$$\chi^2 = \frac{edf \cdot s^2}{\sigma^2}, \quad (1)$$

式中, s^2 为采样方差; σ^2 为真实方差; edf 为等效自由度个数, 由数据点个数和噪声类型确定, 其数值不一定为整数。

对于置信因子 p , 双边置信区间可表示为

$$\sigma_{\min}^2 = s^2 \cdot \frac{edf}{\chi^2(p, edf)}, \quad \sigma_{\max}^2 = s^2 \cdot \frac{edf}{\chi^2(1-p, edf)}. \quad (2)$$

由式 (2) 可知, 计算方差估计的置信区间关键是确定其等效自由度个数 edf 。重叠采样方差通过形成所有可能的差分项来充分利用现有数据, 进而提高方差估计的置信度。虽然这些全重叠采样并非都是统计独立的, 但增加了等效自由度个数。采样方差的总方法估计, 是通过数据延伸来最大限度地利用现有数据的所有信息, 进一步提高方差估计的置信度。

3 等效自由度计算与分析

非重叠阿仑方差和哈达玛方差的 $\pm 1\sigma(68\%)$ 置信区间过去常根据 k_n 噪声因子设定, 而其他类型方差常采用经验公式计算等效自由度。最近, Greenhall [5] 提出了一种基于标准化自协

方差函数的组合算法, 该算法用一种完全一致的方法计算阿仑方差、哈达玛方差的重叠和非重叠形式以及改进阿仑方差、时间方差的等效自由度。

3.1 基于组合算法的等效自由度计算

定义随机变量 V 的等效自由度为

$$edf(V) = \frac{2(EV)^2}{\text{var}(V)}. \quad (3)$$

于是, 基于标准化自协方差函数的组合算法可表示为^[5]

$$\frac{1}{edf(V)} = \frac{1}{M} \left[1 + \frac{2}{S_z^2(0)} \sum_{j=1}^{M-1} \left(1 - \frac{j}{M} \right) S_z^2(j\delta) \right]. \quad (4)$$

式中, V 为一无偏估计量; $edf(V)$ 为 V 的等效自由度; M 与估计类型和数据点个数有关, $M = 1 + \left\lceil \frac{S(N-L)}{m} \right\rceil$, 其中 $L = \frac{m}{F} + md$ 为整数, 变量 N 、 m 、 S 、 F 、 d 的定义及其取值如下:

- 1) N 为采样间隔为 τ_0 的相位数据个数。
 - 2) m 为平滑因子: 阿仑方差估计时, $1 \leq m \leq \text{int}\left(\frac{N-1}{2}\right)$; 哈达玛方差估计时, $1 \leq m \leq \text{int}\left(\frac{N-1}{3}\right)$ 。
 - 3) S 为步长因子。 $S = 1$ 时为非重叠估计; $S = m$ 时为重叠估计。
 - 4) F 为滤波因子。 $F = 1$ 时为改进方差估计; $F = m$ 时为非改进方差估计。
 - 5) d 为相位差分次数。阿仑方差估计时, $d = 2$; 哈达玛方差估计时, $d = 3$ 。
- 式(4)中自协方差 $S_z(t)$ 为

$$S_z(t) = (\Delta_\tau \Delta_{-\tau})^d \Delta_\varepsilon \Delta_{-\varepsilon} S_w(t), \quad (5)$$

其中, Δ 表示后向差分运算; $\varepsilon = \tau_0$ 或 τ 。对非改进方差, $\varepsilon = \tau_0$, 此时 $z(t) = \Delta_\tau^d x(t)$; 而对改进方差, $\varepsilon = \tau = m\tau_0$, 此时 $z(t) = m\Delta_\tau^d \bar{x}(t)$ 。在任何情况下, 都假设 $z(t)$ 为一稳态零均值高斯过程, 其自协方差函数为 $S_z(t) = E(z(u+t)z(u))$; $S_w(t)$ 的取值与能量谱噪声类型有关, 见表 1。

表 1 不同能量谱噪声时的 $S_w(t, \alpha)$ ^[5]

噪声类型	WH PM	FL PM	WH FM	FL FM	RW FM	FW FM	RR FM
$S_w(t, \alpha)$	$- t $	$t^2 \ln t $	$ t ^3$	$-t^4 \ln t $	$- t ^5$	$t^6 \ln t $	$ t ^7$

该组合算法基于标准化自协方差函数用一个完全一致的方法计算方差估计的等效自由度, 可用于阿仑方差、重叠阿仑方差、改进阿仑方差、时间方差以及哈达玛方差和重叠哈达玛

方差的等效自由度计算。所有计算基于相同的理论原则,没有任何经验公式。需要说明的是,该算法给出的是数值解,结果精度对当前计算分析已经够用。不过,该算法不能用于总方法估计等效自由度的计算,下面分别介绍各种总方法估计等效自由度的经验计算公式。

3.2 总方差的等效自由度

根据定义,总方差的等效自由度可用下式计算^[4,6-8]

$$edf(\tau) \approx b \frac{T}{\tau} - c, \quad (6)$$

式中, T 为时间序列总长度; τ 为平滑时间,一般情况下, $0 < \tau \leq \frac{T}{2}$; b 、 c 为与噪声类型有关的系数,其值见表 2。

对于调频白噪声、调频闪变噪声和调频随机游走噪声,其等效自由度可按式(6)计算。考虑到连续函数用于式(6)的理论计算,因此,用该式 0.05 计算时,在调频白噪声情况下,平滑时间应满足 $\tau \geq 8\tau_0$; 调频闪变噪声情况下,平滑时间应满足 $\tau \geq 3\tau_0$; 对调相白噪声和调相闪变噪声,总方差估计的等价自由度等于重叠阿伦方差估计的自由度个数加上 2。由表 2 可知,总方差对调频白噪声等效自由度的改进最为明显,当 $\tau = T/2$ 时,调频白噪声的等效自由度增为 3.0。

式(6)是一近似经验公式,与 Monte-Carlo 模拟方法计算的精确数值相比,式(6)的观测误差低于 1.2%。由式(6)可知,总方差的等效自由度大于阿伦方差的等效自由度,尤其是平滑时间较长时,总方差的优势很明显。此外, χ^2 分布函数常用来计算方差估计的置信区间,而当平滑时间较长时,总方差估计的分布函数稍低于相应的 χ^2 分布函数,这是总方差估计置信度较高的另一原因。

表 2 总方差的等效自由度拟合系数以及 $\tau = T/2$ 时的等效自由度^[4,6-8]

噪声类型	WH FM	FL FM	RW FM
b	1.50	$24(\ln(2)/\pi)^2$	140/151
c	0	0.222	0.358
$edf(T/2)$	3.000	2.097	1.514

3.3 改进总方差和时间总方差的等效自由度

改进总方差的等效自由度可用下式计算^[4]

$$edf(\tau) \approx b \frac{T}{\tau} - c, \quad (7)$$

式中各符号意义同前,平滑时间一般取 $0 < \tau \leq \frac{T}{3}$,拟合系数 b 、 c 见表 3。

表 3 改进总方差的等效自由度拟合系数^[4]

噪声类型	WH PM	FL PM	WH FM	FL FM	RW FM
b	1.90	1.20	1.10	0.85	0.75
c	2.10	1.40	1.20	0.50	0.31

由式 (7) 可知, 改进总方差明显增加了平滑时间较长时的等效自由度。此外, 其分布函数与总方差分布函数类似, 稍低于相应的 χ^2 分布函数, 因此, 改进总方差给出的置信区间计算结果也较保守。

时间总方差等于改进总方差乘以一个系数 $\tau^2/3$, 因此, 时间总方差与改进总方差的等效自由度相同。

3.4 哈达玛总方差的等效自由度

哈达玛总方差的等效自由度可用下式计算^[9]

$$edf(\tau) \approx \frac{T/\tau}{b_0 + b_1\tau/T} \quad (8)$$

式中各符号意义同前, 平滑时间一般为 $0 < \tau \leq \frac{T}{3}$, 拟合系数 b_0 、 b_1 取值见表 4。

表 4 哈达玛总方差的等效自由度拟合系数以及时 $\tau_{\max} = T/3$ 的等效自由度^[4,9]

噪声类型	WH PM	FL FM	RW FM	FW FM	RR FM
edf b_0	0.559	0.868	0.938	0.947	1.276
系数 b_1	1.004	1.140	1.696	2.554	3.149
$edf(T/3)$	3.447	2.448	2.044	1.676	1.313

我们用总方法估计来提高哈达玛方差长期平滑时间的置信度, 考虑到当平滑时间较长时, 时间序列主要受随机调频噪声影响, 因此, 在计算哈达玛总方差的等效自由度时, 仅给出了随机调频噪声的拟合系数。

式 (8) 是一经验近似公式, 与 Monte-Carlo 模拟方法计算的精确数值相比, 式 (8) 的观测误差低于 10%, 且误差随着平滑因子的增加而降低。计算哈达玛总方差时, 平滑因子取值应满足 $m \geq 16$, 否则用于延伸计算的数据个数太少, 哈达玛总方差的优势不明显。与总方差和改进总方差的分布函数类似, 哈达玛总方差分布函数稍低于相应的 χ^2 分布函数, 且其偏离程度随着平滑因子的增加而增加。因此, 基于 χ^2 分布计算的哈达玛总方差置信区间也较保守。

由表 4 可知, 哈达玛总方差等效自由度的提高是很显著的。其中, 调频白噪声的增益值最大, 当 $\tau_{\max} = T/3$ 时, 比值能达到 3.447; 在调频白噪声情况下, 与阿仑方差相比, 哈达玛方差的计算效率大大降低, 哈达玛总方差正好弥补了哈达玛方差的大部分不足。

3.5 比较及分析

下面将计算分析当采样个数 $N = 100$ 时, 各种方差不同噪声情况下的等效自由度。

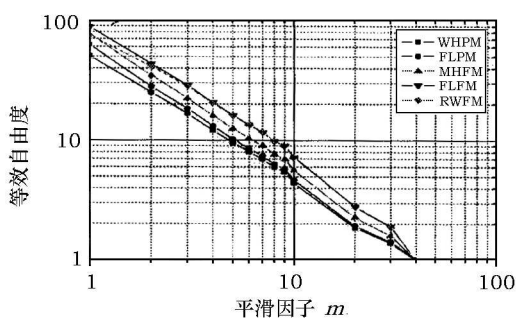


图 1 阿仑方差的等效自由度

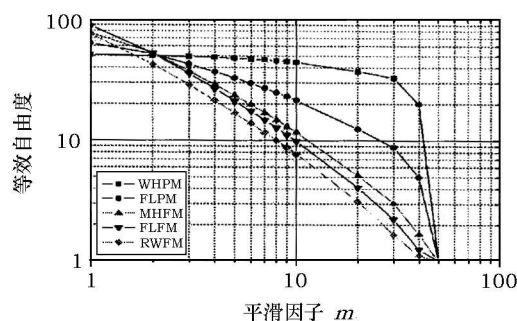


图 2 重叠阿仑方差的等效自由度

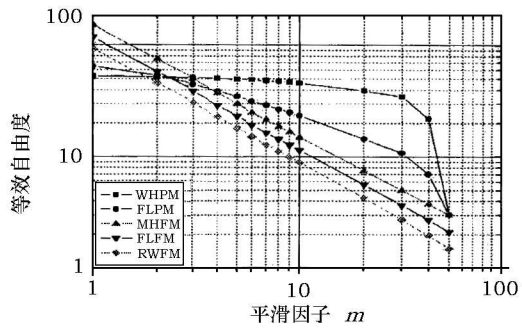


图3 总方差的等效自由度

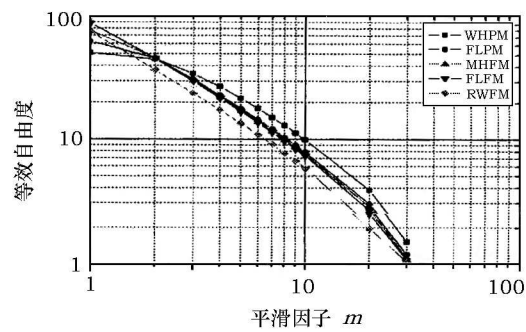


图4 改进阿仑方差的等效自由度

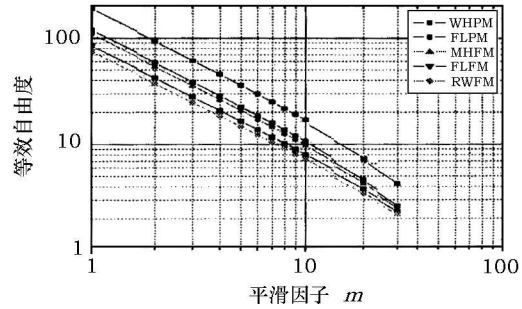


图5 改进总阿仑方差的等效自由度

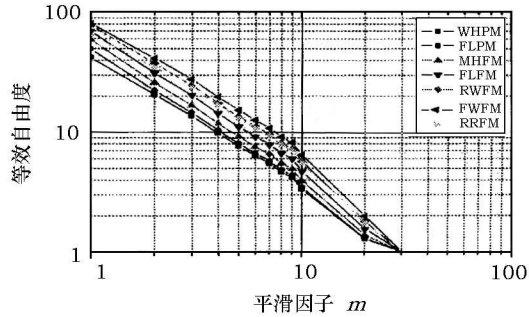


图6 哈达玛方差的等效自由度

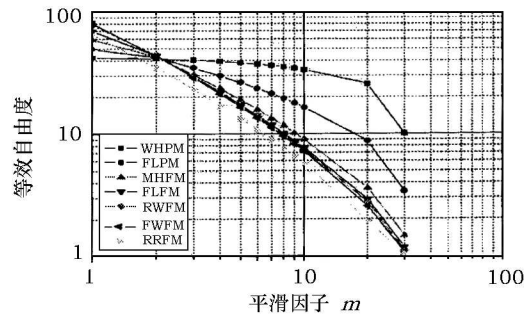


图7 重叠哈达玛方差的等效自由度

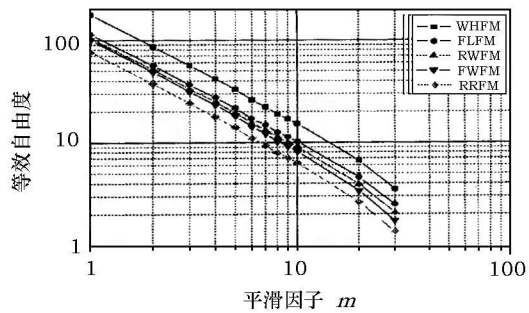


图8 哈达玛总方差的等效自由度

图1—8给出了当采样个数 $N = 100$ 时各种方差不同噪声情况下的等效自由度, 比较分析可知, 对非重叠估计而言, 噪声的频率越低, 其等效自由度越大; 而相应的重叠估计和总方法估计与之相反, 噪声的频率越高, 其等效自由度越大, 这也说明重叠估计和相应的总方法估计对高频噪声等效自由度的提高优于低频噪声。总方法估计的等效自由度(总方差调相噪声除外)与数据点个数和平滑因子的比值成正比, 即 $edf \propto N/m$ 。对于调频噪声 ($\alpha \leq 0$), 重叠阿仑方差、改进阿仑方差和重叠哈达玛方差的等效自由度 $edf \approx N/m$ 。当平滑因子 $m \approx N/2$ 时, 非重叠阿仑方差和重叠阿仑方差的等效自由度降低为 1; 当平滑因子 $m \approx N/3$ 时, 改进阿仑方差、哈达玛方差和重叠哈达玛方差的等效自由度接近于 1。在调相白噪声情况下, 重叠阿仑方差、总方差和重叠哈达玛方差的等效自由度基本上与平滑因子无关。

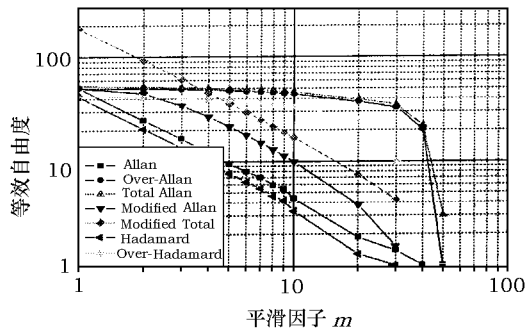


图 9 WH PM 时的等效自由度

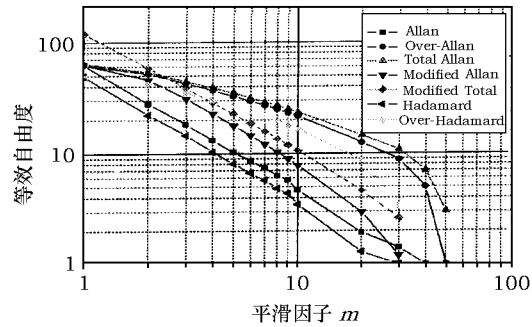


图 10 FL PM 时的等效自由度

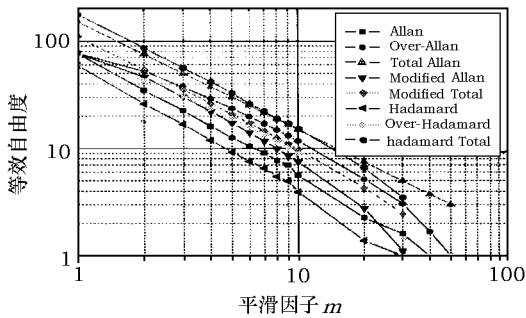


图 11 WH FM 时的等效自由度

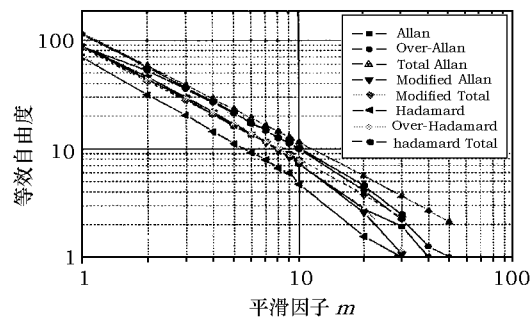


图 12 FL FM 时的等效自由度

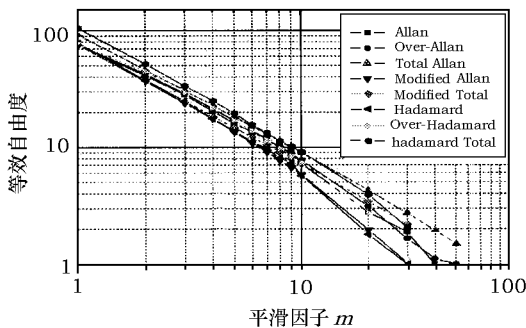


图 13 RW FM 时的等效自由度

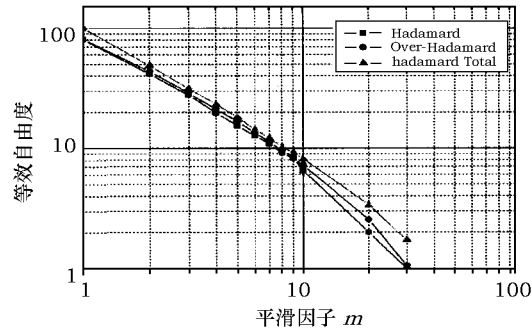


图 14 FW FM 时的等效自由度

图 9—15 给出了当采样个数 $N = 100$ 时各种噪声情况下不同方差的等效自由度。比较分析可知, 总方法的等效自由度大于相应非总方法的等效自由度; 对所有噪声, 重叠和非重叠阿仑方差估计的等效自由度大于相应哈达玛方差估计的等效自由度, 原因是与二次差分运算相比, 三次差分运算损失了更多的数据; 对所有噪声, 重叠阿仑方差估计和重叠哈达玛方差估计的等效自由度大于改进阿仑方差估计的等效自由度, 且频率越高, 差别越大。此外, 在所有噪声情况下, 对所有方差而言, 平滑时间和置信度之间是一个折衷。

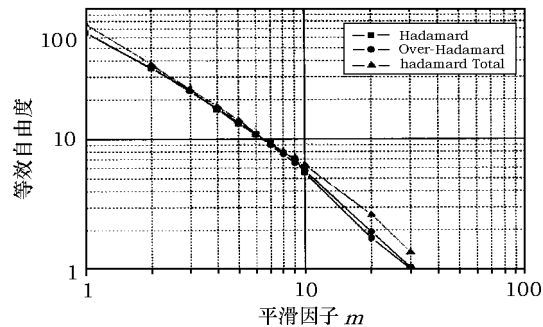


图 15 RR FM 时的等效自由度

4 结 论

1) 基于标准化自协方差函数的组合算法, 用一种完全一致的方法计算各种方差估计的等效自由度, 所有计算基于相同的理论原则, 没有任何经验公式。

2) 总方法估计的等效自由度大于相应非总方法估计的等效自由度; 对所有噪声, 重叠和非重叠阿仑方差估计的等效自由度大于相应哈达玛方差估计的等效自由度, 重叠阿仑方差估计和重叠哈达玛方差估计的等效自由度大于改进阿仑方差估计的等效自由度。

3) 对非重叠估计而言, 噪声的频率越低, 其等效自由度越大; 而相应的重叠估计和总方法估计与之相反, 噪声的频率越高, 其等效自由度越大, 这也说明重叠估计和相应的总方法估计对高频噪声等效自由度的提高优于低频噪声。

4) 在调相白噪声情况下, 重叠阿仑方差、总方差和重叠哈达玛方差的等效自由度基本上与平滑因子无关。

参考文献:

- [1] 卫国. 博士论文. 西安: 中国科学院陕西天文台博士学位论文, 1991: 9-11
- [2] Riley W J. Techniques for frequency stability analysis, www.wiley.com, 2003
- [3] Riley W J. The basics of frequency stability analysis, www.wiley.com, 2004
- [4] Riley W J. Confidence Intervals and Bias Corrections for the stable 32 variance functions, www.wiley.com, 2003
- [5] Greenhall C A, Riley W J. The 35th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting. 2003: 267-280
- [6] Howe D A, Greenhall C A. The 29th Annual Precise Time and Time Interval (PTTI) Meeting, 1997: 39-48
- [7] Greenhall C A, Howe D A, Percival D B. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 1999, 46(5): 1183-1191
- [8] Howe D A. IEEE transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 2000, 47(5): 1102-1110
- [9] Howe D A, Beard R L, Greenhall C A, et al. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 2005, 52(8): 1253-1261

The Calculation and Analysis of the Confidence of the Time-domain Frequency Stability

GUO Hai-rong^{1,2}, GUO Shu-ren³, JIAO Wen-hai²

(1. Institute of Surveying and Mapping, Information Engineering University, Zhengzhou 450052, China; 2. P. O. Box 5136, Beijing 100094, China; 3. Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, Xi'an 710054, China)

Abstract: The equivalent number of χ^2 degrees of freedom (edf) for the overlapping and nonoverlapping estimators of the Allan variance and the Hadamard variance, the modified Allan variance and the related time variance is calculated from a combined algorithm based on its generalized autocovariance function. The edf for the total estimators is calculated from the empirical formulas

in this paper. By comparison and analysis of the edf for all variances and all noises, some useful conclusions are drawn: 1) The edf for the total estimators is larger than the edf for the corresponding non-total estimators. And the edf for the overlapping and nonoverlapping estimator of the Allan variance is also larger than the edf for the corresponding Hadamard estimator. 2) The lower the Fourier frequency of the noise is, the larger the corresponding edf for the nonoverlapping estimators. However, the higher the Fourier frequency of the noise is, the larger the corresponding edf for the overlapping estimators and the total estimators. The improvement on the edf for the higher frequency noise is better than that for the lower frequency noise in the overlapping estimators and the total estimators.

Key words: time frequency; atomic frequency standard; stability analysis; confidence interval; equivalent degrees of freedom (edf)

* * * * *

《天文学进展》 2008 年征订启事

《天文学进展》2008 年征订事宜委托天津市全国非邮发报刊联订服务部全权办理。刊物为季刊, 每年的 3、6、9、12 月下旬出版, 每期定价 25 元, 全年 100 元 (含邮寄费和包装费)。凡需订阅者请将订刊款通过邮局或银行直接按以下地址汇出:

邮政编码: 300385

地 址: 天津市大寺泉集北里别墅 17 号

户头全称: 天津市河西区联合征订服务部

帐 号: 605248-1046196

开户银行: 工商银行天津市尖山分理处

电 话: (022) 23973378; (022) 23962479

传 真: (022) 23973378

网 址: www.lhzd.com

E - mail: lhzd@public.tpt.tj.cn

汇款时请在汇款单上注明“订阅 2008 年《天文学进展》(编号 5155)”字样及订阅份数、订户名称、收件人姓名、地址、邮政编码。联合征订部收到订刊款后即会奉上发票。本编辑部在刊物出版后及时为订户负责奉寄。

欢迎订阅, 谢谢支持!

《天文学进展》编辑部

2007 年 12 月