

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2013.04.07

冷暗物质晕紧致参数的研究进展

曹一贤^{1,2}

(1. 中国科学院 国家天文台, 北京 100012; 2. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘要: 暗物质晕是冷暗物质宇宙学模型下宇宙结构组成的基本单位, 暗晕的紧致参数是描述暗晕结构的重要参数, 因而在宇宙学诸多研究中得到广泛的应用。主要回顾近年来冷暗物质晕紧致参数的相关研究进展, 特别是关于紧致参数与暗晕质量的依赖关系; 总结了目前主流的关于紧致参数的理论模型并介绍其各自特点; 结合数值模拟结果, 讨论了主流模型的实用性。最后对未来紧致参数的研究做了展望。

关键词: 暗物质晕; 数值模拟; 冷暗物质

中图分类号: P159.3 **文献标识码:** A

1 引 言

在目前的标准冷暗物质宇宙学模型中, 现在宇宙中的复杂结构是由宇宙暴涨期间微小的量子涨落因引力作用逐渐增长演化而成的。在这个理论框架下, 宇宙结构形成是等级成团的, 即小质量暗晕率先形成, 然后这些小暗晕逐渐通过吸积暗物质粒子以及并合, 形成质量越来越大的暗晕; 所以说暗物质晕是构成宇宙中结构形成的基本单位。另一方面, 在标准的星系形成理论下, 宇宙所有星系是暗物质晕内气体冷却坍缩的产物^[1]。故而人们相信, 星系的性质与相应暗晕的性质之间存在重要的关联^[2]。可见, 研究暗晕的基本性质对于宇宙中的结构形成和星系的形成及演化都有很重要的意义。除此之外, 关于暗晕的理论研究对暗物质粒子直接和间接探测均具有极其重要的指导意义^[3,4]。

近 30 年来, 随着计算宇宙学的快速发展, 人们对暗物质晕基本性质有了更深入的了解, 如丰度、结构、形状及演化历史等。对暗晕的基本结构进行研究后, 人们发现暗晕的结构有很大的自相似性, 即暗晕密度轮廓存在着一种不依赖于其质量以及所处红移的普适形式^[5,6]。在这种描述下, 暗晕的密度轮廓完全可以由两个参数, 即特征尺度 r_s 以及描述暗物质在暗晕中分布的集中程度的紧致参数 (concentration parameter) 来决定。在这里紧致参数的值越大, 则说明暗物质的分布更集中。后来的研究表明, 暗晕的紧致参数和其质量有较强的单调依赖

收稿日期: 2013-05-22; 修回日期: 2010-08-20

资助项目: 国家自然科学基金 (11133003)

关系, 即暗晕质量越大, 其紧致参数越小^[7-15]。作为描述暗晕结构的基本参数, 因为其在诸多宇宙学问题研究中的重要性, 暗晕的紧致参数得到了广泛的研究。本文主要介绍 Λ CDM 宇宙学模型下的紧致参数研究现状。在文中的第 2 章引入关于暗晕紧致参数的相关概念, 第 3 章介绍关于其流行的理论模型, 第 4 章着重结合数值模拟来讨论诸理论模型的可靠性, 最后第 5 章是总结目前研究现状并展望未来发展情况。

2 暗晕的紧致参数

2.1 暗晕的密度轮廓

在研究暗晕中暗物质的质量分布时, 通常假设暗物质晕形状是球对称的, 则暗晕中的物质分布可以用一维密度轮廓 $\rho(r)$ 来描述^[16]。基于高精度数值模拟的结果, Navarro, Frenk 和 White 提出了一种统一的形式来描述暗晕的密度轮廓 (NFW 密度轮廓)^[5-7]:

$$\frac{\rho(r)}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{\delta_{\text{char}}}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}, \quad (1)$$

其中, r_s 是暗物质晕的特征尺度, 在 r_s 处 $\rho \propto r^{-2}$; δ_{char} 是特征密度。它们是 NFW 密度轮廓中的 2 个自由参数, $\rho_{\text{crit}} = 3H_0^2/8\pi G$ 是宇宙的临界密度。在这一形式下, 所有的暗晕都具有相似的密度轮廓, 他们的物质密度分布仅需要 2 个自由参数来描述。根据这一形式, 在中心部分暗晕的密度以 r^{-1} 的形式随半径递减, 而在靠近外部边缘的部分以 r^{-3} 加速递减。令人惊奇的是, 在 20 年前 NFW 密度形式仅仅作为一种猜想所提出, 且仅在很小质量范围内为数值模拟所检验; 然而近年来在大批更高精度数值模拟验证下, 它依然适用于各种冷暗物质宇宙学模型以及所有质量的暗物质晕, 只是暗晕在最小的尺度下, Einasto 轮廓^[17] 是一个更好的描述^[18]。

2.2 紧致参数的定义

根据暗物质晕密度轮廓的特征, 可以定义一个重要的结构参数——紧致参数 c_Δ 。对于 NFW 密度轮廓:

$$c_\Delta \equiv r_\Delta/r_s, \quad (2)$$

其中 r_Δ 为暗物质晕的半径。暗晕是一个平均密度为 $\Delta \times \rho_{\text{crit}}$ 的球体, 相应的质量为:

$$M_\Delta \equiv \frac{4\pi}{3} r_\Delta^3 \Delta \rho_{\text{crit}}(z). \quad (3)$$

在文献中, 暗晕通常有两种不同的定义: 一种采用 $\Delta = 200$, 即暗晕的平均密度为 ρ_{crit} 的 200 倍; 另一种是根据球坍缩模型, 使用 $\Delta = \Delta_c$, 对于平坦的宇宙学模型, $\Delta_c(z) \simeq 18\pi^2 - 82\Omega_\Lambda(z) - 39\Omega_\Lambda^2(z)$ ^[19], 也可以近似为 $\Delta_c = 178\Omega_m^{0.45}$ ^[20]。当采用后一种定义时, 通常将暗晕相应的质量、半径、紧致系数等记为 M_{vir} , r_{vir} 及 c_{vir} 。

在定义了紧致参数之后, 式 (1) 中的特征密度可以表示为:

$$\delta_{\text{char}} = \frac{\Delta}{3} \frac{c_\Delta^3}{\ln(1+c_\Delta) - c_\Delta/(1+c_\Delta)}. \quad (4)$$

如此, NFW 密度轮廓中的 2 个自由参数 δ_{char} 及 r_s 就可以变换为更直观的暗晕质量 M_Δ 和暗晕的紧致参数 c_Δ 。

更一般地, 对于任意给定形式的密度轮廓, 可以定义紧致参数为:

$$c_\Delta \equiv r_\Delta/r_{-2}, \quad (5)$$

在 r_{-2} 处, $\rho \propto r^{-2}$; 由式 (1) 易知, 对于 NFW 密度轮廓, r_{-2} 即是 r_s 。通过这种定义, 我们可以研究 NFW 密度轮廓之外的其他紧致参数, 如 Einasto 密度轮廓^[17]等。

暗晕的密度轮廓决定了它的旋转速度轮廓 $V_c(r) = \sqrt{GM(r)/r}$ 。在引入紧致参数后, Navarro 等人^[7]给出了在 NFW 密度轮廓下旋转曲线的解析表达式:

$$\left[\frac{V_c(r)}{V_\Delta} \right]^2 = \frac{1}{x} \frac{\ln(1+c_\Delta x) - (c_\Delta x)/(1+c_\Delta x)}{\ln(1+c_\Delta) - c_\Delta/(1+c_\Delta)}, \quad (6)$$

其中, $V_\Delta = \sqrt{GM_\Delta/r_\Delta}$, $x = r/r_\Delta$ 。当 $x \approx 2.16/c_\Delta$ 时, $V_c(r)$ 达到最大值 V_{max} , 则得到:

$$\left[\frac{V_{\text{max}}}{V_\Delta} \right]^2 = \frac{0.216c}{\ln(1+c_\Delta) - c_\Delta/(1+c_\Delta)}. \quad (7)$$

因此, 当已知 V_{max}/V_Δ 时, 可以根据式 (6) 解出紧致参数。另一方面, V_{max}/V_Δ 本身也能代表暗晕中物质分布的汇聚程度, 而且这一参数并不依赖于特定的密度轮廓以及特定的暗晕定义。而通常 V_{max} 到暗晕中心的距离 r_{max} 要大于 r_s , 当数值模拟无法分辨出 r_s 时, 仍然可以得到 V_{max}/V_Δ 。因此, 也可以利用 V_{max}/V_Δ 来研究紧致参数^[21]。

2.3 紧致参数的性质

作为描述暗晕结构的一个重要参量, 在最近 15 年来暗晕的紧致参数得到了广泛的研究。Navarro 等人^[7]的研究表明, 紧致参数依赖于暗晕质量和宇宙学参数。这个结论随后也得到其他数值模拟的支持。例如, Macciò 等人^[22]的工作证实: σ_8 越小, 暗晕的紧致参数也越小; Huffenberger 和 Seljak^[23]研究表明, 紧致参数依赖于 Ω_0 以及线性功率谱在非线性尺度上的有效幂指数 n_{eff} 。以上这些依赖关系都反映了暗晕紧致参数依赖于它的结构形成历史。紧致参数还与暗晕所在的环境有关^[8, 24]。对于相同质量的暗晕, 当环境较为致密时, 暗晕倾向于拥有一个更高的紧致参数; 这一点也可以由紧致参数与暗晕的形成历史之间的关系来解释。Sheth 和 Torman^[25]指出, 暗晕的形成时间与大尺度上的环境密切相关。Gao 等人^[26]的工作则表明, 对于小质量的暗晕, 环境较为致密时的暗晕形成较早; 形成越早的暗晕, 紧致参数就越大。

暗晕紧致参数的依赖关系中, 最重要的是它与暗晕的质量间的关系 (下文简称为 $M-c$ 关系)。一般来讲, 紧致参数随暗晕质量的增大而减小^[7, 8, 11-13, 27], 而这一关系在不同红移处有不同的表现^[8, 12, 14, 27, 28]。对于紧致参数与质量间关系的工作, 主要通过数值模拟来进行研究。这些工作大致分为两类: 一类通过数值模拟的结果考察暗晕结构与其形成历史间的关系, 建立模型来解释和预测 $M-c$ 关系; 另一类是通过大规模高精度数值模拟直接测量和统计 $M-c$ 关系。第 3 章和第 4 章将从这两个方面来介绍紧致参数的研究进展。

3 紧致参数模型的研究进展

数值模拟结果表明,暗晕的紧致参数随着质量的增大而减小。自从发现暗晕的 $M-c$ 关系以来,各种关于暗晕的理论研究就试图找到理论依据来解释这一关系以及它所包含的各种特性。一般认为,暗晕的结构特征主要由它的形成历史,或者说其质量吸积历史 (mass accretion history) 决定。小质量的暗晕形成较早,当时的宇宙平均密度大,因此它们的紧致参数较大。紧致参数在给定质量上的弥散也与形成时间的弥散有关。

关于紧致参数的研究,早期的几种简单模型 (Toy Models) 试图通过将某种定义下的暗晕特征密度与暗晕形成时的宇宙密度联系起来,从而得出紧致参数随质量和红移的演化。而近年来发展出的各种模型大多建立在暗晕吸积模型之上,这些工作通过研究暗晕质量吸积过程中各种因素对结构造成的影响,发展出关于暗晕内部结构演化的质量吸积模型,做出关于紧致参数的预言。一个成功的模型应该能与数值模拟所得到的基本 $M-c$ 关系在各个红移处相一致,并且能够解释关于这一关系的弥散;能否准确预言出暗晕紧致参数对质量及红移的依赖关系也是检验一个暗晕质量吸积模型是否成功的重要标准。

3.1 简单模型

最早的研究始于 Navarro 等人^[7] (下文简称为 NFW97 模型)。当他们通过数值模拟发现了紧致参数与暗晕质量的依赖关系时,就尝试将其与暗晕形成时刻联系起来建立一个简单的唯像模型。这种模型认为,紧致参数反映了暗晕形成时宇宙的密度。式 (1) 中的特征密度 δ_{char} 与此暗晕形成时宇宙的平均密度线性相关,

$$\delta_{\text{char}}(M_0|f) = C\Omega(z_0) \left[\frac{1+z_f}{1+z_0} \right]^3, \quad (8)$$

其中, C 是依赖于参数 f 以及宇宙学模型的一个常数, z_f 是在红移 $z = z_0$ 时质量为 M_0 的暗晕的形成时刻: 当暗晕质量 M_0 的一半包含在了所有质量大于 f 倍 M_0 的前身暗晕中时,这一时刻被定义成暗晕形成时刻 z_f 。暗晕的形成时刻可以通过 Press-Schechter 近似方法求解得出^[29, 30]:

$$\text{erfc} \left\{ \frac{\delta_c(z_f) - \delta_c(z_0)}{\sqrt{2[\sigma^2(fM_0) - \sigma^2(M_0)]}} \right\} = \frac{1}{2}, \quad (9)$$

$\delta_c(z) = 1.686/D(z)$ 是球坍缩模型中线性密度增长的阈值, $D(z)$ 为归一化后的成长因子, $\sigma(M)$ 是质量 M 上的密度涨落方差。在这个模型中仅含有 2 个自由参数 C 和 f 。在 Λ CDM 宇宙学模型中,作者给出的数值为 $f = 0.01$, $C = 3.41 \times 10^3$ 。作为最早的紧致参数暗晕质量关系模型,该模型对 $z = 0$ 大质量暗晕的 $M-c$ 关系描述得比较成功,并且在联系形成时间与暗晕紧致参数这一思路为后续的研究奠定了基础。然而,该模型得出的星系尺度暗晕的紧致参数明显小于数值结果^[8, 24]; 另外它的高红移时预言出的紧致参数也高于数值模拟结果^[8, 14], 即使对模型进行修改依然无法准确描述出高红移 $M-c$ 关系的演化^[14]。

Bullock 等人^[8] (下文简称 Bullock01 模型) 沿着 NFW97 模型的思路做了进一步发展,他们改变了暗晕形成时间的定义,并且将其与另一种定义的特征密度联系起来。在这一模型中,

形成时刻通过典型坍缩质量来定义:

$$\sigma(FM_0) = \frac{1.686}{D(z_f)}, \quad (10)$$

即将宇宙中的典型坍缩质量等于暗晕质量 M_0 的 F 倍的时刻, 定义为暗晕的形成时刻。而另一方面, 他们的特征密度定义为满足 $M_0 \equiv (4\pi/3)r_s^3\tilde{\rho}_s$ 这一关系的 $\tilde{\rho}_s$, 根据紧致系数的定义, $\tilde{\rho}_s(z_0) = \Delta_c(z_0)\rho_{\text{crit}}(z_0)c_\Delta^3(z_0)$ 。模型中这个特征密度与暗晕形成时宇宙的平均密度线性相关, $\tilde{\rho}_s(z_0) = K^3\Delta_c(z_0)\rho_{\text{crit}}(z_f)$ 。因此, 红移 z_0 时质量为 M_0 的暗晕的紧致参数可以表示为:

$$c_\Delta(M_0, z_0) = K \left(\frac{1+z_f}{1+z_0} \right). \quad (11)$$

这个模型中依然有 2 个参数, F 和 K 。通过数值模拟的结果, 这项工作给出在冷暗物质宇宙学模型下, $F = 0.01, K = 4.0$ 。在确定了这 2 个参数之后, Bullock01 模型中质量为 M 的暗晕的形成时间完全由宇宙学决定。由式 (11) 可知, 对于相同质量的暗晕, $c \propto (1+z)^{-1}$, 暗晕紧致参数随红移增高而按比例减小。这个模型在大质量端与数值模拟结果不符^[13, 22], 另外在对小质量段暗晕紧致参数随红移的演化关系上也不准确^[12, 14, 15]。针对前一问题, Macciò 等人^[22]对此模型做了一些修正。他们假设模型中定义的特征密度仅由暗晕的坍缩时刻决定而不随红移变化, $\tilde{\rho}_s(z_0) = \tilde{\rho}_s(z_f)$, 相应的紧致参数为:

$$c_\Delta(M_0, z_0) = K \left[\frac{\Delta_c(z_f)\Omega(z_0)}{\Delta_c(z_0)\Omega(z_f)} \right]^{1/3} \left(\frac{1+z_f}{1+z_0} \right), \quad (12)$$

当选取 $\Delta = 200$ 时, 他们给出 2 个参数的值为 $K_{200} = 3.85, F = 0.01$ 。

相对于拥有 2 个参数的 NFW97 和 Bullock01 模型, Eke 等人^[9]的模型 (下文简称 Eke01 模型) 则更为简洁: 模型中只有一个参数 C_σ 用于定义暗晕坍缩时刻。这个模型使用了等效线性密度扰动这一定义, $\sigma_{\text{eff}}(M) = \sigma(M)(-d \lg \sigma / d \lg m|_M)$, 使得模型可以推广到功率谱有截断的情形下 (如 WDM 宇宙学模型)。模型中的形成时间定义为:

$$\sigma_{\text{eff}}(M_{\text{max}}) = \frac{1}{D(z_f)C_\sigma}, \quad (13)$$

其中 C_σ 是常数, M_{max} 是在 V_{max} 对应的半径 r_{max} 以内的暗晕质量。沿用 Bullock01 模型中定义的特征密度 $\tilde{\rho}_s$, 这个特征密度与暗晕坍缩时刻的球形平均密度 $\rho_h(z_f) \equiv \Delta_c(z_f)\rho_{\text{crit}}(z_f)$ 相等, 进而可以得到暗晕紧致参数:

$$c_\Delta = \left[\frac{\Delta_c(z_f)\Omega(z_0)}{\Delta_c(z_0)\Omega(z_f)} \right]^{1/3} \left(\frac{1+z_f}{1+z_0} \right). \quad (14)$$

这个模型可以用于多种功率谱, 同 Bullock01 模型相似, 对于相同质量的暗晕, $c \propto (1+z)^{-1}$ 。

3.2 基于暗晕质量吸积历史的模型

3.1 节介绍的几种简单模型, 对于暗晕形成时间的定义在一定程度上比较任意, 拟合出的符合模型的参数也没有合理的物理解释。Wechsler 等人^[10]开创了根据暗晕吸积历史预言

紧致参数的工作, 她们的研究发现, 暗晕质量的吸积历史可以由以下表达式简单描述:

$$M(z) = M_0 e^{-\alpha(z-z_0)} \quad (15)$$

其中, M_0 是红移 $z = z_0$ 时暗晕的质量, α 是与暗晕形成时刻 z_f 相关的参数, $\alpha = S/(1+z_f)$, 即将暗晕形成时刻 z_f 定义为暗晕质量增长的速率 $d \lg M/d \lg a$ 等于某个特定值 S 的时刻, a 是宇宙的膨胀因子, $a = 1/(1+z)$ 。而暗晕的紧致参数则与形成时刻线性相关:

$$c_{\Delta}(M_0, z_0) = c_1 \left(\frac{1+z_f}{1+z_0} \right) \quad (16)$$

式中 c_1 是红移 $z_0 = 0$ 时所形成的暗晕的紧致参数的典型值, 在她们的作品中, 使用 $\Delta = \Delta_c$ 定义暗晕相关性质, 并将 S 的值设为 2, 得到 $c_1 = 8.2/S = 4.1$ 。这个模型通过不同方式定义的暗晕形成时间与 Bullock01 模型中的一致, 所得到的紧致参数式 (16) 与 Bullock01 模型所得到的式 (11) 基本相同。这一工作的结果使人们更加确信紧致参数与暗晕质量吸积历史间存在着一定的关系。然而这个工作并没有找到一个适用于全局的吸积历史; 另外, 与 Bullock01 模型中存在的问题一样, 在后来的研究中人们发现, $c \propto (1+z)^{-1}$ 这一趋势并不准确^[12, 14]。

Zhao 等人^[11] 详细考察了各种同结构相关的暗晕属性与暗晕质量吸积历史间的关系。在研究暗晕吸积历史时, 他们发现, 暗晕的吸积历史由一个明显的转折点 z_{tp} , 将暗晕的增长分为两个阶段: 当 $z > z_{tp}$ 时, 主并合起主导作用, 暗晕的质量随红移快速增长, 称为快速吸积阶段; $z < z_{tp}$ 时, 次并合占主导地位, 暗晕质量增长较慢, 称为慢速吸积阶段。而在他们所考察的诸多暗晕特性中, 特征半径 r_s 之内所包含的质量 M_s 与 r_s 紧密相关:

$$\frac{M_s(z)}{M_{s,tp}} = \left(\frac{r_s(z)}{r_{s,tp}} \right)^{3\alpha} \quad (17)$$

$r_{s,0}$ 和 $M_{s,0}$ 分别是 $z = z_{tp}$ 时暗晕的特征半径及在特征半径内包含的质量。 $z > z_{tp}$ 时, 式 (17) 中 $\alpha = 0.64 \pm 0.04$; $z < z_{tp}$, $\alpha = 0.48 \pm 0.03$ 。对于 NFW 密度轮廓, 暗晕任意时刻的特征质量 $M_s(z)$ 可由暗晕质量 $M(z)$ 直接得出, 而暗晕质量 $M(z)$ 由其吸积历史决定。因此, 通过式 (17), 由暗晕的吸积历史可以得出任何时刻的紧致参数:

$$\frac{[\ln(1+c) - c/(1+c)]c^{-3\alpha}}{[\ln(1+c_{tp}) - c_{tp}/(1+c_{tp})]c_{tp}^{-3\alpha}} = \left[\frac{\rho_h(z)}{\rho_{h,tp}} \right]^{\alpha} \left[\frac{M(z)}{M_{tp}} \right]^{1-\alpha} \quad (18)$$

其中, $\rho_h(z)$ 为红移 z 时暗晕的球形平均密度, $\rho_h(z) = \Delta_c(z)\rho_{crit}(z)$; c_{tp} , M_{tp} 和 ρ_{tp} 为 $z = z_{tp}$ 时相应的暗晕参数。在随后的另一工作中, Zhao 等人^[12] 建立了一个可以普遍用来描述暗晕吸积历史的表达式:

$$\frac{M(z)}{M_{tp}} = \frac{x^{0.3}}{1-a+ax^{-1.8a}} \quad (19)$$

其中 $x = \rho_{h,tp}/\rho_h(z)$, 对应快速吸积阶段和慢速吸积阶段, a 分别等于 0.75 和 0.42。结合前一工作所得到的紧致参数经验公式 (18), 即可得到紧致参数与暗晕质量间的中值关系。这个模型中, 在慢速增长阶段, 紧致参数随红移增高而按比例减小, 与之前 Bullock 等人^[8]、Eke 等

人^[9]及 Weschsler^[10]得到的 $c \propto (1+z)^{-1}$ 相一致。然而与前人模型明显不同的一点是,在此模型中,处于快速增长阶段的暗晕具有相同的紧致参数, $c \simeq 3.5 \sim 4$ 。

最近, Zhao 等人^[15]建立了一个适用于各种宇宙学模型的暗晕质量吸积历史模型(以下简称 Zhao09 模型)。他们的模型找到了暗晕的质量吸积速率 $d \lg \sigma(M)/d \lg \delta_c(z)$ 与变量 $\Omega(z, M) \equiv \delta_c(z)/(\sigma(M) \times 10^{d \lg \sigma/d \lg m(M)})$ 之间的一个关系,通过这个关系可以得到暗晕在任意时刻的质量中值(具体关系式详见他们文章中的公式(10)—(12))。对于特定质量的暗晕,这个模型可以计算出对应于任意 f 的 t_f 。在此基础上,他们发现暗晕的紧致参数与其主前身晕吸积了 4% 的最终质量的时刻 $t_{0.04}$ 密切相关:

$$c_{\text{vir}} = 4 \left[1 + \left(\frac{t}{3.75 t_{0.04}} \right)^{8.41} \right]^{1/8}. \quad (20)$$

对于给定质量的暗晕, $t_{0.04}$ 由这一工作中所建立的暗晕吸积历史模型所决定。根据这一经验公式,当 $t < 3.75 t_{0.04}$ 时,暗晕的紧致参数是一个常数, $c \simeq 4$ 。这就是说,暗晕在形成的早期,具有相同的紧致系数;对于某个特定时刻,新形成的那些大质量暗晕的紧致参数将接近常数 $c \simeq 4$ 。当 $t > 3.75 t_{0.04}$ 时,紧致参数 $c \propto 4(t/3.75 t_{0.04})$ 。所以随着红移的增高,暗晕紧致参数对于质量的依赖会逐渐减弱。在红移 $z \geq 3$ 时,所有的暗晕紧致参数 $c \simeq 3.5$,而与质量完全无关。这些结论与他们此前的工作^[11,12]相一致, $t < 3.75 t_{0.04}$ 及 $t > 3.75 t_{0.04}$ 对应此前工作中的快速吸积阶段和慢速吸积阶段。而与他们前一工作中的模型相比,这个模型更加易于直接进行计算,而且适用于各种宇宙学模型。

Zhao09 模型中,关于暗晕吸积历史的描述稍显复杂, Giocoli 等人^[31]建立了一个与之相比相对简单的暗晕吸积历史模型(下文简称 Giocoli12 模型)。他们直接采用了 $\Omega_f \equiv (\delta_c(z_f) - \delta_c(z_0))/\sqrt{\sigma^2(fM_0) - \sigma^2(M_0)}$ 这一变量来拟合暗晕形成时间的分布 $P(< t_f|M_0, t_0)$, 得到了如下的表达式:

$$P(< t_f|M_0, t_0) = P(> \Omega_f) = \frac{\alpha_f}{e^{\Omega_f^2/2} + \alpha_f - 1}, \quad (21)$$

其中 $\alpha = 0.815e^{-2f^3}/f^{0.707}$ 。由此分布得到 Ω_f 的中值为 $\widetilde{\Omega}_f = \sqrt{2 \ln(\alpha_f + 1)}$, 再根据 Ω_f 的定义计算形成时间的中值,从而得到暗晕的吸积历史。另一方面,他们的工作发现 $t_{0.5}$ 和 $t_{0.04}$ 相关性很弱,而考察 Zhao09 模型给出的 c_{vir} 和形成时间 $t/t_{0.04}$ 之间的关系(见式(20)),数值模拟的结果表明这个关系存在比较大的弥散。作为改进,他们在紧致参数与形成时间的关系中,增加了 $t_{0.5}$ 这个参数。他们得到的暗晕紧致参数可以表示为:

$$c_{\text{vir}} = 0.45 \left[4.23 + \left(\frac{t}{t_{0.04}} \right)^{1.15} + \left(\frac{t}{t_{0.5}} \right)^{2.3} \right]. \quad (22)$$

Giocoli12 所构建的暗晕质量吸积模型计算出的 $M-c$ 关系及演化,与 Zhao09 模型的结果基本相同;而他们对于紧致参数与形成时刻关系的改进,导致了一些与 Zhao09 模型显著不同的地方:他们的 $M-c$ 关系在高红移的时候紧致参数对暗晕质量的依赖减弱,但并没有变成常数。

3.3 几种模型的比较

图 1 比较了几种重要的模型: Macciò 等人^[22] 修正后的 Bullock01 模型 (简称 Bullock08 模型), Zhao09 模型及 Giocoli12 模型。为了便于比较, 这里选取了相同的宇宙学参数: $\Omega_m = 0.25$, $\Omega_\lambda = 0.75$, $\Omega_b = 0.045$, $h = 0.73$, $n = 1$, $\sigma_8 = 0.9$ 。宇宙学参数的选取与 Millennium Simulation^[32] 保持一致, 与 2dFGRS^[33] 及 WMAP 第一年^[34] 的观测数据相符。

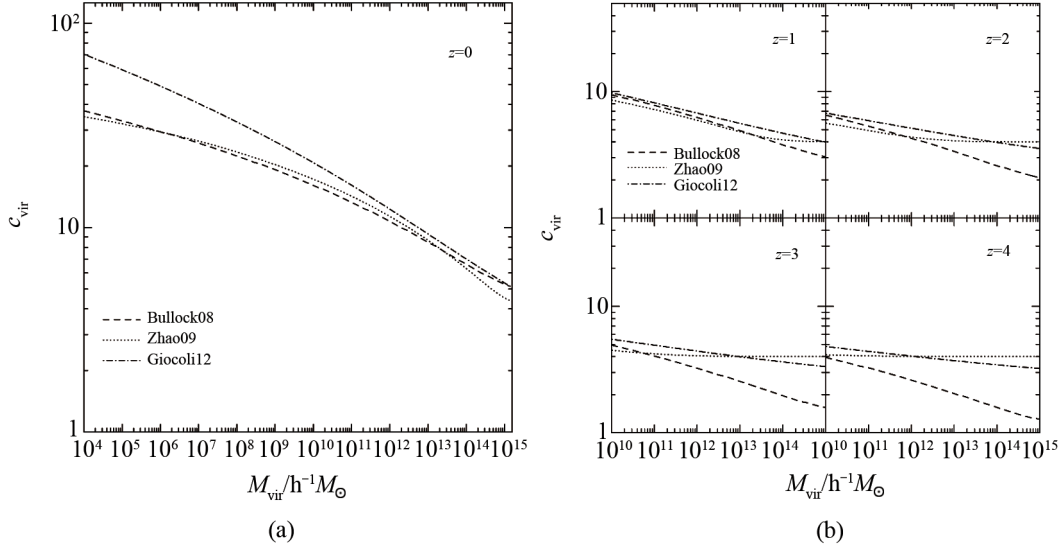


图 1 Macciò 等人^[22] 修正后的 Bullock01 模型 (图中标记为 Bullock08), Zhao09 模型与 Giocoli12 模型的比较

(a) 为红移 $z = 0$ 时的 $M-c$ 关系; (b) 为高红移 $z = 1 \sim 4$ 时的 $M-c$ 关系。

图 (a) 是将质量范围推广到 $10^4 h^{-1} M_\odot$, 三种模型所预言的在红移 $z = 0$ 时的 $M-c$ 关系。在 $10^{12} h^{-1} M_\odot < M_{\text{vir}} < 10^{15} h^{-1} M_\odot$ 的质量区间, 三种模型的预言基本一致; 而随着暗晕质量的减小, Giocoli12 模型显著高于 Bullock08 及 Zhao09 模型; 对于质量为 $10^4 h^{-1} M_\odot$ 的暗晕, Giocoli12 所预言的紧致参数是另外两种模型预言的 2 倍。图 (b) 是在 $10^{10} h^{-1} M_\odot < M_{\text{vir}} < 10^{15} h^{-1} M_\odot$ 质量区间上, 红移 z 分别为 1、2、3 和 4 时的 $M-c$ 关系。Bullock08 模型中, $M-c$ 关系的形状不变, 随红移的增高而按比例降低, 反映了对于同质量暗晕 $c \propto (1+z)^{-1}$ 这一特征。Zhao09 模型中, 紧致参数对于暗晕质量的依赖随红移增高而逐渐减弱, 每个红移处大质量端的暗晕紧致参数趋近常数值 $c \simeq 4$; 在较高红移 ($z > 3$) 时, $c \simeq 4$ 而与质量完全无关。Giocoli12 模型中, $M-c$ 关系随红移不同有所演化, 紧致参数对于质量的依赖随红移增高而减弱; 但这一减弱并没有像 Zhao09 模型中那样显著: 在红移 $z > 3$ 时, 紧致参数依然随质量增大而减小。

通过以上对三种模型的比较可以看到, 模型在小质量端及高红移处给出的预言非常不同。而能否准确预言出小质量及高红移处暗晕紧致参数的特征, 是检验关于暗晕结构演化模型是否正确的重要依据, 这需要更大规模以及更高精度的数值模拟来检验。

4 数值模拟研究进展

4.1 研究方法

最可靠的暗物质晕的紧致参数与质量关系必须由 N 体数值模拟来确定。 N 体数值模拟的基本方法是使用大量的质元来模拟宇宙中的物质分布, 通过这些质元之间的相互作用来模拟暗物质间的运动, 从而得到宇宙中结构形成动力学特征^[35, 36]。通过宇宙学尺度的 N 体数值模拟, 可以得到宇宙在不同演化时刻下的物质分布。如果宇宙中此时已经有暗晕的形成, 则可以通过适当的方法 (如 Friends-of-Friends 方法^[37] 和球形密度超出方法 (Spherical Overdensity)^[38] 等) 认证出该时刻的暗晕。将认证出的暗晕密度轮廓与相应的模型进行拟合, 得到特征半径 r_{-2} , 进而可以直接计算出数值模拟中暗晕的紧致参数。除此之外, 还可以根据暗晕的 V_{\max}/V_{Δ} 这项特征属性来研究紧致参数。

虽然研究方法比较直观, 但是相关的工作进展并不顺利。对于质量较大的暗晕 (星系团尺度上的暗晕), 需要足够大的模拟体积以取得足够多的样本。而另一方面, 质量越小的暗晕所包含的模拟粒子越少, 导致其数值效应增大而无法得出较为精确的密度轮廓; 研究质量较小的暗晕的内部结构, 又需要数值模拟有足够高的质量分辨率和力分辨率。这些要求都直接导致了计算时间和成本的增加。为了得到准确的暗晕内部结构, 数值模拟必须选取适当的软化因子、时间步长、初始红移、粒子数等参数^[39]。此外, 对于数值模拟精度较低的数值模拟, 在较高红移处没有足够大的暗晕, 无法追踪到更早期的暗晕结构, 只能得出在低红移处的 $M-c$ 关系。因此, 对于一个特定的数值模拟进行分析, 在仔细考虑了各种数值效应后, 只能得出在有限的质量范围上有限时间内的 $M-c$ 关系。

在紧致参数的数值研究中, 通常有两种样本的选取方法: 一种是选取所有在模拟研究质量范围上的样本; 另一种是仅选取相应质量上已弛豫化的暗晕, 后者通过对总体样本加以一系列特定的限制条件得到。在总体样本中, 由于有相当数量的暗晕正在进行并合或者其他一些“暴力”行为, 内部结构距离 NFW 密度轮廓有较大的偏差。仅选取已弛豫化的暗晕样本来研究暗晕的紧致参数, 可以排除这些暗晕所导致的紧致参数错误的测量值^[44]; 与总体样本相比, 已弛豫化的暗晕已经形成了一段时间, 通常会有比较高的紧致参数^[10, 43]。

4.2 红移 $z = 0$ 时的 $M-c$ 关系

人们通过数值模拟直接测量和统计 $M-c$ 关系, 其中以对红移 $z = 0$ 时 $M-c$ 关系的研究最多。从早期研究开始, 通过数值研究都能得到暗晕紧致参数随着质量的增大而减小这一基本关系。而对于特定的某个数值模拟, 受模拟的精度和体积所限, 只能得到一定质量范围上的 $M-c$ 关系。此外, $M-c$ 关系也受到数值模拟所采用的宇宙学参数的影响。

4.2.1 基本关系

关于这方面的工作, 目前比较精确的主要有 Neto 等人^[13] (下文简称 Neto07)、Macciò 等人^[22]、Duffy 等人^[27] 以及 Muñoz-Cuartas^[28] 等人的工作。这些工作所分析的数值模拟采用了 WMAP 第一年^[34]、第三年^[40] 和第五年^[41] 的结果 (简称为 WMAP1、WMAP3 和 WMAP5) 作为宇宙学参数, 具体的参数值见表 1。Neto07 工作分析的 Millinium Simulation 所使用的参数

值与 WMAP1 略有不同, 具体参数值见 3.3 节。

表 1 宇宙学参数

	Ω_m	Ω_Λ	σ_8	h	n
WMAP1	0.268	0.732	0.90	0.71	1.00
WMAP3	0.238	0.762	0.75	0.73	0.95
WMAP5	0.258	0.742	0.796	0.72	0.963

在这些工作中, 这几种基于数值模拟的分析给出了在红移 $z = 0$ 时较为一致的 $M-c$ 关系的形式:

$$\lg(c_{200}) = A + B \lg(M_{200}) \quad , \quad (23)$$

即在红移 $z = 0$ 时, 暗晕的紧致参数与质量满足幂律关系。如果仅选取已弛豫化的暗晕作为样本, $M-c$ 关系依然符合幂律形式, 但比总样本所得到的紧致参数要略高。这几项不同的工作所采用的宇宙学参数、样本、质量范围、 A 和 B 的具体数值及标准差 $\sigma_{\lg c_{200}}$ 详见表 2。Macciò 等人^[22] 的结果是均值 $M-c$ 关系, 而其他工作给出的是中值关系。

表 2 数值模拟测量结果

参考文献	WMAP	样本	质量范围 $M_{200}/h^{-1}M_\odot$	A	B	$\sigma_{\lg c_{200}}$
Neto07	WMAP1	全体	$[10^{12}, 10^{15}]$	2.209	-0.11	0.15
Neto07	WMAP1	已弛豫	$[10^{12}, 10^{15}]$	2.120	-0.10	0.094
Macciò08	WMAP1	全体	$[10^{10}, 10^{14}]$	2.306	-0.119	0.129
Macciò08	WMAP1	已弛豫	$[10^{10}, 10^{14}]$	2.165	-0.104	0.111
Macciò08	WMAP3	全体	$[10^{10}, 10^{14}]$	1.775	-0.088	0.132
Macciò08	WMAP3	已弛豫	$[10^{10}, 10^{14}]$	1.765	-0.083	0.109
Macciò08	WMAP5	全体	$[10^{10}, 10^{14}]$	2.107	-0.110	0.130
Macciò08	WMAP5	已弛豫	$[10^{10}, 10^{14}]$	2.006	-0.098	0.105
Duffy08	WMAP5	全体	$[10^{11}, 10^{15}]$	1.952	-0.097	0.15
Duffy08	WMAP5	已弛豫	$[10^{11}, 10^{15}]$	1.956	-0.092	0.11

图 2 给出了其中几种数值模拟得出的经验关系。对于相同宇宙学参数下的数值结果, 不同作者给出的结果相一致。图中 $M-c$ 关系的差别主要来自于宇宙学参数的影响。WMAP1 的结果明显高于 WMAP3 和 WMAP5 的结果, 主要原因在于 WMAP1 测量出的 σ_8 偏高; 这一点很好解释, 暗晕紧致参数由吸积历史决定, 对于相同质量的暗晕, σ_8 较高则结构形成得更早, 因此紧致参数就更大。Macciò 等人^[22] 及 Kwan 等人^[42] 的结果都证实了这一点。

通过以上的比较看到, 在 $[10^{10}h^{-1}M_\odot, 10^{15}h^{-1}M_\odot]$ 的质量区间上, 数值模拟得出一致的结论: 紧致参数与暗晕质量间的关系为幂律关系。但是各种关于紧致参数的模型中, 却并不存在一个直接用幂律关系来描述 $M-c$ 关系的模型。与 Neto07 的数值结果相比, NFW97, Bullock01, Eke01, Wechsler 等人^[10] 以及 Zhao 等人^[11,12] 几种模型可以在相应的

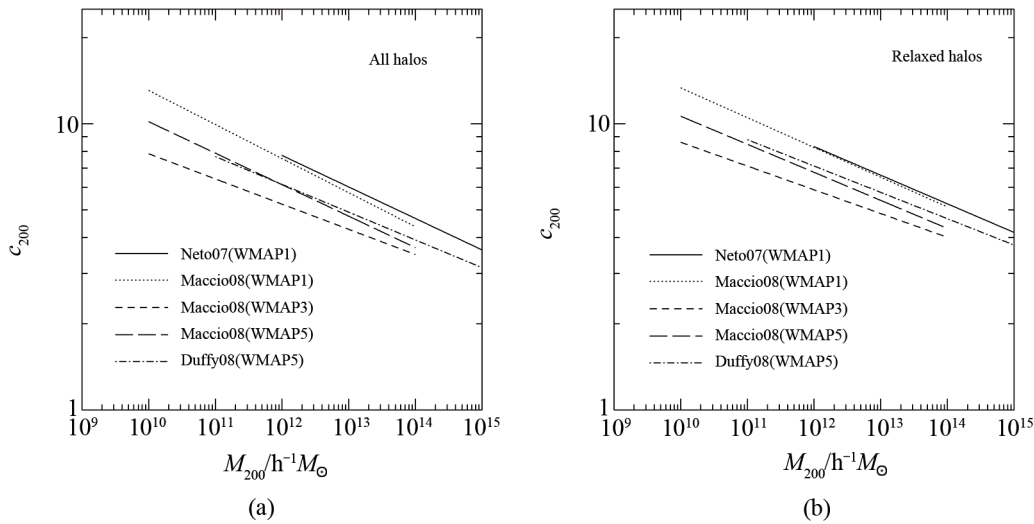


图2 Neto 等人^[13]、Maccio等人^[22]及 Duffy 等人^[27]通过数值模拟测量出的 $M-c$ 关系
(a) 包含数值模拟中相应质量区间上所有暗晕的样本; (b) 仅包含已弛豫化的暗晕。

质量区间上得到相近的中值关系。但是在小质量端 ($M_{200} < 10^{12.5} h^{-1} M_{\odot}$), NFW97 与 Eke01 这两种模型都低估了紧致参数的中值; 而在大质量端 ($M_{200} > 10^{13.5} h^{-1} M_{\odot}$), Bullock01 模型严重低估了紧致参数。在不同的宇宙学参数下, Duffy 等人^[27]和 Maccio等人^[22]的 $M-c$ 关系与 NFW97、Bullock01 及 Eke01 模型的相比较, 结论与 Neto 等人^[13]一致。

4.2.2 弥散

在考察 $M-c$ 关系时, 另一个重要的特点是关于这一关系的弥散。这种弥散可以用来尝试解释相同质量星系大小及表面亮度等性质的差异。最早的 NFW97 中暗晕样本较少, 且样本偏向于已弛豫化的暗晕, 导致得到的弥散较小^[8]。Jing^[43]指出, 在每个质量区间上, 紧致参数具有相当程度的弥散, 其分布服从对数正态分布。此后的数值模拟^[8, 13, 22, 24, 27]都再次确认了这些特点。Jing^[43]的工作中, 紧致参数的弥散典型值为 0.25, 已弛豫化的暗晕样本的弥散要更小一些。其他数值模拟所得到的紧致参数的弥散值见表 2, 弥散的典型值在 0.15 左右。Neto 等人^[13]还发现紧致参数的弥散随暗晕质量的增长略有减小。另外, 紧致参数的弥散不依赖于宇宙学参数^[22]。

能否预言出 $M-c$ 关系的弥散, 也是用来检验模型是否成功的标准之一。Neto 等人^[13]的工作比较了数值模拟得到的紧致参数与 NFW97、Wechsler 等人^[10]及 Zhao 等人^[11, 12]模型预言的紧致参数。尽管三种模型都能预言出基本的 $M-c$ 关系, 但是数值模拟测量值与模型预测值之间的弥散无法完全解释紧致参数在一定质量区间上的弥散。

4.3 $M-c$ 关系随红移的演化

Gao 等人^[14]研究了已弛豫化的暗晕的紧致参数在红移 $z = 0 \sim 3$ 时的演化。他们的研究表明, 暗晕紧致参数对质量的依赖随着红移的增高而逐渐减弱。在红移 $z = 3$ 时, 对于质量大于 $3 \times 10^{11} h^{-1} M_{\odot}$ 的暗晕, 紧致参数接近于常数。而不同红移的 $M-c$ 关系都可以用式 (23) 的

幂律形式表示。值得注意的是, 这些特点与 Zhao 等人^[12] 及 Zhao09 模型所预言出的 $M-c$ 关系非常相似。

图 3 为他们的结果与其他几种理论模型比较。与在此工作之前的各种模型相比, 理论模型均无法准确预言出数值模拟得出的 $M-c$ 关系。Eke01 和 Bullock01 这两种模型中 $c \propto (1+z)^{-1}$ 与 $M-c$ 关系随红移逐渐平坦这一事实不符。而 NFW97 模型虽然呈现出这种逐渐平坦的 $M-c$ 关系, 但其在高红移处的预言仍然整体偏高。

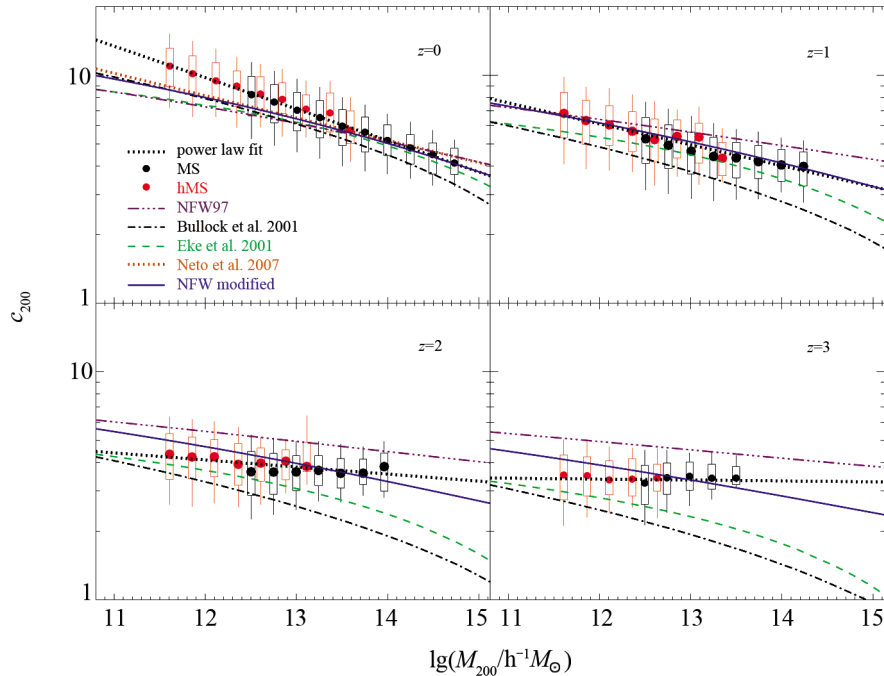


图 3 Gao 等人得出的 $M-c$ 在红移 $z = 0, 1, 2, 3$ 时的演化^[14]
与图中各种模型相比, 没有模型能够准确预言出紧致参数在高红移的特征。

Duffy 等人^[27] 和 Muñoz-Cuartas 等人^[28] 对 WMAP5 宇宙学参数下红移 $z = 0 \sim 2$ 时包含所有暗晕样本的研究, 得出的基本结论与 Gao 等人^[14] 这一工作的结论一致: $M-c$ 关系可由幂律形式表示, 而紧致参数对质量的依赖随红移增高而减弱。

对于更高红移处 $M-c$ 关系的研究, Klypin 等人^[44] 和 Prada 等人^[45] 发现在红移 $z > 2$ 时, 对于大质量端 ($M > 10^{12.5} h^{-1} M_{\odot}$) 的暗晕, V_{\max}/V_{200} 及由此得到的紧致参数随暗晕质量的增加而增加, 并且这种紧致参数在大质量端的上升趋势在更高红移处 ($z > 5$) 表现得更为显著。这一结果与此前数值模拟所得出的紧致参数随暗晕质量增加单调减少的基本结论明显不同。而目前所有的理论模型, 即使推广到相应的红移和质量也没有显示出这一特点: 多数模型中, 紧致参数随暗晕质量增大而减小; Zhao 等人^[12] 及 Zhao09 模型中 $M-c$ 关系在大质量端变得平坦, 但是也没有这种上升趋势。如果其他的数值模拟工作能够确证这种紧致参数在高红移大质量端增大的特点, 如何解释这种特点将会是对紧致参数理论研究的一个挑战。

5 总结和展望

从以上对于暗晕紧致参数研究进展的回顾可以看到,人们对暗晕紧致参数的研究取得了许多成果。理论研究方面,早期的几种简单模型(NFW97, Bullock01, Eke01 模型)与数值模拟结果相比,存在着各种问题;但是这些模型都在一定程度上揭示了紧致参数与暗晕形成时间的关系,为后来的理论研究指引了方向。而通过研究暗晕吸积历史所发展出的模型(Zhao09 和 Giocoli12 模型),解释了暗晕内部结构对于形成历史的依赖,并且提供了便捷的用于计算暗晕紧致系数的方法。当然,这些理论模型必须经得起大规模高精度数值模拟的检验。目前的各种数值研究表明,在 $[10^{10} h^{-1} M_{\odot}, 10^{15} h^{-1} M_{\odot}]$ 的区间上,红移为 $z = 0 \sim 2$ 时,暗晕的紧致参数与质量间呈现出幂律关系。

然而,在关于暗晕紧致参数的研究中,依然存在着很多的问题。目前比较好的三种模型(Bullock08、Zhao09 和 Giocoli12)尽管在数值模拟可以检验的区间上表现出相同的特性,但是将模型推广到较低质量和高红移时,它们所预言的紧致参数及其在高红移的演化呈现出非常不同的特点。这种不同主要来源于模型中对于暗晕结构演化的不同描述。在低质量端和高红移处对不同模型的检验可以让我们更好地理解暗晕结构的演化;因此,未来的数值模拟工作需要将暗晕紧致参数的研究推广到更低质量的暗晕及更高红移处。通过更大型的高精度宇宙学数值模拟,可以得到准确的紧致参数测量值用来检验模型。此外,关于 Prada 等人^[45]所报告的紧致参数在高红移大质量端的上升趋势,也需要其他数值模拟结果给出佐证。数值模拟研究在更广泛的质量范围和演化时刻的探索,都将会为紧致参数研究带来新的局面,帮助人们更好地理解宇宙中暗晕结构的形成与演化。

参考文献:

- [1] White S D M, Rees M J. MNRAS, 1978, 183: 341
- [2] Mo H J, Mao S, White S D M. MNRAS, 1998, 295: 319
- [3] Springel V, White S D M, Frenk C S, et al. Nature, 2008, 456: 73
- [4] Diemand J, Kuhlen M, Madau P, et al. Nature, 2008, 454: 735
- [5] Navarro J F, Frenk C S, White S D M. MNRAS, 1995, 275: 720
- [6] Navarro J F, Frenk C S, White S D M. ApJ, 1996, 462: 563
- [7] Navarro J F, Frenk C S, White S D M. ApJ, 1997, 490: 493
- [8] Bullock J S, Kolatt T S, Sigad Y, et al. MNRAS, 2001, 321: 559
- [9] Eke V R, Navarro J F, Steinmetz M. ApJ, 2001, 554: 114
- [10] Wechsler R H, Bullock J S, Primack J R, et al. ApJ, 2002, 568: 52
- [11] Zhao D H, Mo H J, Jing Y P, Börner G. MNRAS, 2003, 339: 12
- [12] Zhao D H, Jing Y P, Mo H J, Börner G. ApJ, 2003, 597: L9
- [13] Neto A F, Gao L, Bett P, et al. MNRAS, 2007, 381: 1450
- [14] Gao L, Navarro J F, Cole S, et al. MNRAS, 2008, 387: 536
- [15] Zhao D H, Jing Y P, Mo H J, et al. ApJ, 2009, 707: 354s
- [16] Mo H J, van den Bosch F C, White S. Galaxy Formation and Evolution. Cambridge: Cambridge University Press, 2010: 351
- [17] Navarro J F, Hayashi E, Power C, et al. MNRAS, 2004, 349: 1039

- [18] Navarro J F, Ludlow A, Springel V, et al. MNRAS, 2010, 402: 21
- [19] Bryan G L, Norman M L. ApJ, 1998, 495: 80
- [20] Eke V R, Navarro J F, Frenk C S. ApJ, 1998, 503: 569
- [21] Gao L, White S D M, Jenkins A, et al. MNRAS, 2004, 355: 819
- [22] Macciò A V, Dutton A A, van den Bosch F C. MNRAS, 2008, 391: 1940
- [23] Huffenberger K M, Seljak U. MNRAS, 2003, 340: 1199
- [24] Macciò A V, Dutton A A, van den Bosch F C, et al. MNRAS, 2007, 378: 55
- [25] Sheth R K, Tormen G. MNRAS, 2004, 350: 1385
- [26] Gao L, Springel V, White S D M. MNRAS, 2005, 363: L66
- [27] Duffy A R, Schaye J, Kay S T, et al. MNRAS, 2008, 390: L64
- [28] Muñoz-Cuatas J C, Macciò A V, Gottlöber S, Dutton A A. MNRAS, 2011, 411: 584
- [29] Press W H, Schechter P. ApJ, 1974, 187: 425
- [30] Lacey C, Cole S. MNRAS, 1993, 262: 627
- [31] Giocoli C, Tormen G, Sheth R K. MNRAS, 2012, 422: 185
- [32] Springel V, White S D M, Jenkins A, et al. Nature, 2005, 435: 629
- [33] Colless M, Dalton G, Maddox S, et al. MNRAS, 2001, 328: 1039
- [34] Spergel D N, Verde L, Peiris H V, et al. ApJS, 2003, 148: 175
- [35] Bertschinger E. ARA&A, 1998, 36: 599
- [36] Springel V. MNRAS, 2005, 364: 1105
- [37] Davis G, Efstathiou M G, Frenk C S, et al. ApJ, 1985, 292: 371
- [38] Lacey C, Cole S. MNRAS, 1994, 271: 676
- [39] Power C, Navarro J F, Jenkins A, et al. MNRAS, 2003, 338: 14
- [40] Spergel D N, Bean R, Doré O, et al. ApJS, 2007, 170: 377
- [41] Komatsu E, Dunkley J, Nolta M R, et al. ApJS, 2009, 180: 330
- [42] Kwan J, Bhattacharya S, Heitmann K, et al. ApJ, 2013, 768: 123
- [43] Jing Y P. ApJ, 2000, 535: 30
- [44] Klypin A A, Trujillo-Gomez S, Primack J. ApJ, 2011, 740: 102
- [45] Prada F, Klypin A A, Cuesta A J, et al. MNRAS, 2012, 423: 3018

Progress on the Study of Halo Concentration in Λ CDM

CAO Yi-xian^{1,2}

(1. National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012, China; 2. Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: In a Λ CDM universe, dark matter halos are the fundamental units building up structures hierarchically. Numerical works show that halos have similar internal structures described by NFW density profile. Concentration and halo mass are the two parameters in the NFW profile. Recent years, the concentration parameter and its dependence on mass and redshift have been well studied in literature. In this paper, I review the studies on halo concentrations in Λ CDM cosmology.

It is found that halo concentration parameter shows a good correlation with halo mass. This is due to the fact halos with different masses have different formation time. People developed several

theoretical models trying to explain and predict this relation. I review those popular models that have been widely used. The earlier toy models tried to relate the background density of the universe at the time of formation with a properly defined characteristic density of the halo. The concentrations are modelled as a function of mass and redshift with constant amplitudes that are cosmology model dependent. These toy models show very different behaviors at high redshift, and they were proved to somehow fail in later numerical works. Later sophisticated models are based on mass accretion history of the halos. By studying the merger history of halos in details, these works engaged to find out what properties affect the internal structure of the halos as their masses grow. Concentration could then entirely depend on the mass accretion history, and could be predicted with known mass accretion history models. We also compare three recent models. The concentration-mass relations predicted by these models disagree with each other for low mass halos under $10^6 h^{-1} M_{\odot}$ and at high redshift.

Apart from theoretical probes, numerical studies on concentrations have also been developed using large high resolution simulations available in recent years. Several different works agree that the current average mass-concentration relation is in a power-law form for halos in the mass range of $[10^{10} h^{-1} M_{\odot}, 10^{15} h^{-1} M_{\odot}]$, with a typical standard deviation of 0.15. They also agree that the distribution of concentration on each mass range is approximately a lognormal function. Studies on concentration at higher redshift up to 3 indicate the mass-concentration relation is still power-law but with different coefficients at each redshift. The dependence of concentration on mass becomes weaker in an earlier time.

Existing numerical studies are unable to reach the low mass and high redshift limits to verify the accuracy of recent theoretical models. Further progress on numerical estimation of concentration in a larger mass range and time domain will examine the existing models and may also stimulate better theoretical models. These studies on concentration would improve our understanding on the structure evolution of dark matter halos eventually.

Key words: dark matter halo; simulation; cold dark matter