

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2016.02.07

# 黑洞吸积的随机扩散模型研究

董典桥<sup>1</sup>, 王俊义<sup>1</sup>, 仇洪冰<sup>1</sup>, 安 涛<sup>2</sup>, 符杰林<sup>1</sup>, 陆相龙<sup>1</sup>

(1. 桂林电子科技大学 广西无线宽带通信与信号处理重点实验室, 桂林 541004; 2. 中国科学院 上海天文台, 上海 200030)

**摘要:** 基于流体力学理论对黑洞吸积构建了一个线性扩散模型, 为了简化模型, 假设粘滞系数  $\nu$  与面密度  $\Sigma$  是独立的。对吸积黑洞光变建立了一个随机模型 (OU 过程), 并证明得到这个多维 OU 过程是存在扰动场的扩散模型的解。将 OU 过程应用于光变曲线拟合, 结果表明: OU 过程能很好地拟合光变曲线, 有助于进一步了解吸积系统中心结构以及研究光变特性。

**关 键 词:** 黑洞; 吸积盘; 线性扩散; OU 过程

**中图分类号:** P142.6 **文献标识码:** A

## 1 引 言

吸积盘是人们对引力能认识不断加深的产物, 吸积盘理论是天体物理学重要前沿研究领域之一, 吸积的概念最早可以追溯到康德于 1755 年和拉普拉斯于 1776 年各自独立提出的关于太阳系起源的星云假说。他们认为, 原始星云的引力中心吸引周围物质, 最终凝聚成太阳。早在 20 世纪初, 吸积盘理论就被运用到原始太阳星云的形成与演化的研究中, 虽然这之间还存在过很多其他理论, 但吸积盘理论在各学派纷争中长期不衰。1973 年, Shakura 和 Sunyaev 联合发表了后来被称之为标准盘的吸积盘模型 (standard disk)<sup>[1]</sup>, 此后标准盘在各种尺度天体上都得到了广泛应用。至今仍有很多天体物理学家从事这方面的研究, 标准盘是一种几何薄光学厚的吸积盘模型, 几何薄指的是盘上任意处的垂直向几何厚度  $H$  远小于该处到中心天体的距离  $r$ , 即  $H/r \ll 1$ , 同时也意味着盘结构在垂直盘面方向和半径方向上可以分离探讨; 而光学厚则表示任意处的垂直向光学厚度  $\tau(r) \gg 1$ , 即光子从盘表面带走能量

收稿日期: 2016-01-11; 修回日期: 2016-3-22

资助项目: 国家自然科学基金 (61571143, 61261017, 61561014); 广西自然科学基金 (2013GXNSFAA019334, 2014GXNSFAA118387); 广西无线宽带通信与信号处理重点实验室基金 (GXKL0614202, GXKL0614101, GXKL061501); 北京邮电大学泛在网络教育部重点实验室基金 (KFKT-2014102); 广西认知无线电与信息处理教育部重点实验室基金 (CRKL150112); 桂林电子科技大学创新研究团队基金; 桂林电子科技大学研究生科研创新项目 (YJCXS201528)

通讯作者: 王俊义, wangjy@guet.edu.cn

的基本形式为黑体辐射<sup>[2]</sup>。标准盘模型提出之后, 吸积盘理论中的一个重要进展就是对径移过程的理解。人们认识到, 吸积盘当中的粘滞产热除了通过本地的辐射, 热传导等过程带走之外, 还有可能随着吸积物质的径向运动落入中心天体。在此概念的基础上, Abramowicz 等人于 1988 年提出了 Slim 盘模型 ( $H/r \approx 1$ )。

X 射线双星是近十几年来天体物理学中很活跃的一个研究领域, X 射线双星是一类辐射 X 射线, 主星为一颗寻常恒星, 且子星为黑洞或者中子星的双星系统。一般把 X 射线双星分为两类, 即大质量 X 射线双星 (High Mass X-ray Binary, HMXB) 和小质量 X 射线双星 (Low Mass X-ray Binary, LMXB)。研究表明, 黑洞质量吸积率与 X 射线双星的光度、爱丁顿率等存在一定比例关系<sup>[3]</sup>。

在宇宙中, 所有的吸积物质都是以气体云<sup>[4]</sup>形式存在的, 如果我们通过统计学研究这里的每一个粒子而研究吸积系统结构, 那么其复杂度显然是非常巨大的, 数学实现上也是极其困难的, 所以我们利用流体力学中的连续性假设理论构建吸积模型。在天体物理学当中, 吸积盘的演化过程主要取决于其角动量与质量的再分布过程, 即粘滞过程。Shakura<sup>[5]</sup>与 Lynden<sup>[6]</sup>分别在 1973 年和 1987 提出, 在一个恒星周围的 Keplerian 吸积盘中, 离中心天体不同距离的气体星云有着不同的角速度, 内层的角速度大于外层的气体星云的角速度, 那么, 相邻的两层气体星云就会产生粘滞; 粘滞则使得靠内的气体物质减少角动量而旋入黑洞, 使得质量向内移动; 粘滞还会导致剪切运动, 使得少量物质携带着绝大部分角动量向外转移<sup>[7, 8]</sup>。本文在前人的研究基础之上构建出粘滞响应扩散模型, 为了简化方程, 我们只考虑粘滞系数与面密度相互独立的情况, 即当扩散方程是线性的时候, 对吸积盘模型引入随机扰动源, 研究此时吸积盘在扰动源的影响下的结构及相关特性; 另外, 研究表明随机扩散模型的解可以表示成混合 OU 过程<sup>[9]</sup>的形式。

随着人们对吸积盘机构认识的不断加深, 人们对它的兴趣越来越浓, 对它的研究工作方兴未艾。吸积盘模型经过几十年的发展, 使人们获得了很多对于宇宙中一些高能现象以及对于黑洞这种特殊天体结构的认识。吸积盘模型为解释活动星系核辐射、光变及喷流等现象提供了有利的依据, 对了解吸积系统内部中心结构、统一模型的建立以及研究光变所产生的物理机制有着至关重要的作用。吸积盘结构演化过程以及光变的研究分析能够帮助获得许多关于活动星系核 (AGN) 和黑洞双星物理机制的重要信息, 对于探索活动星系核 (AGN)、黑洞双星中心结构和能量产生的物理过程具有重大的意义。

## 2 模型介绍

### 2.1 连续性方程

在流体力学中, 由质量守恒定律得到的控制方程为连续方程<sup>[7]</sup>。体系在流体运动的过程中质量始终保持不变。设流体空间某一体积为  $V_0$ , 则该体积流体质量可表示为  $\int \rho dV$ , 单位时间内流体流过该体积界面的面元  $dA$  的流体质量为  $\rho v \cdot dA$ , 其中  $\rho$  表示流体的密度, 矢量  $dA$  表示面元的面积大小, 方向取面元的法线方向。则单位时间内流出体积  $V_0$  的总质量为

$\rho \oint v \cdot dA$ , 然而单位时间体积  $V_0$  内流体质量减少量为  $-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV$ , 根据质量守恒定律, 则:  $-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = \oint \rho v \cdot dA$ , 由于方程对任何体积都成立, 所以被积函数为零, 最后得到连续方程<sup>[10-12]</sup>:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad . \quad (1)$$

## 2.2 控制方程组在柱坐标中的分量表示式

假设吸积盘是轴对称的, 所以在柱坐标下连续方程为:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho v_r r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0 \quad . \quad (2)$$

其中圆柱坐标为  $(r, \varphi, z)$ ,  $v_z, v_r$  分别是  $z, r$  方向上的分量。

基于我们考虑的是轴对称几何薄吸积盘, 即  $H/r \ll 1$  所以  $v_z \ll v_r$ , 即流速在  $z$  方向上分量远远小于  $r$  方向上的分量, 那么  $\frac{\partial v_z}{\partial z}$  的值就可以忽略不计。定义面密度为  $\Sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \rho dz = 2\rho H$ , 其中  $H$  为吸积盘的高度 (即半厚度)。把面密度带入柱坐标下的连续方程<sup>[2,4]</sup>:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma v_r r) = 0 \quad . \quad (3)$$

同理我们得到柱坐标下动量守恒的控制方程:

$$\begin{aligned} & \rho \left[ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \left( v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{v_\varphi v_r}{r} \right] \\ & = \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho v \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \rho v \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) \right) \quad . \end{aligned} \quad (4)$$

对式 (4) 每项中的  $\rho$  求积分, 可得:

$$\Sigma \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi v_r}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \Sigma v \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Sigma r^3 v \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) \right) \quad . \quad (5)$$

由于是薄吸积盘, 所以忽略  $\frac{\partial v_r}{\partial r}, \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}$  的项, 即  $\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0$ 。由于这种情况下吸积盘满足开普勒定律, 故线速度与角速度以及中心天体质量关系可表示为:

$$v_\varphi = r\omega = (GM_{1/r})^{1/2} \quad . \quad (6)$$

于是式 (5) 转化为:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Sigma r^3 v \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = \Sigma \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi v_r}{r} \right) \\ & = \Sigma r \frac{\partial \omega}{\partial t} + \Sigma \frac{v_r}{r} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} r + v_\varphi \right) \\ \iff & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Sigma r^3 v \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = \Sigma r^2 \frac{\partial \omega}{\partial t} + \Sigma v_r \frac{\partial \omega r^2}{\partial r} \quad . \end{aligned} \quad (7)$$

将方程加一个并减一个  $r\omega \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma v_r r)$ , 把式 (3) 代入得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Sigma r^3 \nu \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) &= \Sigma r^2 \frac{\partial \omega}{\partial t} - r\omega \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma v_r r) + \Sigma v_r \frac{\partial \omega r^2}{\partial r} + r\omega \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma v_r r) \\ &= \Sigma r^2 \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \Sigma}{\partial t} r^2 \omega + \left( \Sigma v_r \frac{\partial \omega r^2}{\partial r} + r\omega \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma v_r r) \right). \end{aligned} \quad (8)$$

对后面括号内分部积分:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Sigma r^3 \nu \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) &= \Sigma r^2 \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \Sigma}{\partial t} r^2 \omega + \frac{1}{r} \frac{\partial \Sigma v_r r \omega r^2}{\partial r} \\ &= \frac{\partial \omega r^2 \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Sigma v_r r \omega r^2}{\partial r} \\ \iff \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Sigma r^3 \nu \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) &= \frac{\partial \omega r^2 \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Sigma v_r r \omega r^2}{\partial r}. \end{aligned} \quad (9)$$

这样我们已经得到了角动量守恒与质量守恒方程的控制方程组 (3), (9), 可以看到, 此时的控制方程组只与面密度  $\Sigma$  以及盘半径和角速度  $r, \omega$  相关, 其中  $\nu$  为粘滞系数。

### 2.3 扩散传播方程

根据开普勒公式  $\omega = \frac{v_\Phi}{r} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ , 能量守恒方程 (9) 可化为:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \nu \Sigma r^{\frac{1}{2}} \right) &= \frac{\partial \Sigma}{\partial t} r^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Sigma v_r r^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{\partial \Sigma}{\partial t} r^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) r^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \Sigma v_r \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\frac{v_\Phi}{r}$  即为模型中的  $\frac{v_r}{r}$ 。因为  $\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma v_r r)$ , 故:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \nu \Sigma r^{\frac{1}{2}} \right) &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) r^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} r^{\frac{1}{2}} \Sigma v_r \right] + r^{\frac{1}{2}} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma v_r r) \right) \\ &= \frac{1}{2} r^{-\frac{1}{2}} \Sigma v_r \\ \iff r \Sigma v_r &= -r^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \nu \Sigma r^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

将式 (11) 代入式 (3), 则得到扩散方程<sup>[4,10,12]</sup>:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Sigma r^{\frac{1}{2}} \nu \right) \right]. \quad (12)$$

我们发现, 扩散方程可由面密度  $\Sigma$  以及盘半径和时间  $r, t$  等表示。扩散方程对我们研究吸积盘中心结构以及研究吸积流光变特性有着至关重要的作用。

## 2.4 吸积质量方程

径向传输的薄吸积盘的运行来源于吸积盘相邻层的粘滞作用, 粘滞产生摩擦, 并使得内层角速度传递给外层。在平稳时, 若  $v_r < 0$ , 则吸积质量<sup>[12]</sup>:

$$\dot{M} = 2\pi\Sigma v_r r \quad . \quad (13)$$

相应的角动量守恒方程<sup>[13,14]</sup>为:

$$\frac{\Sigma d\omega r^2}{dt} = -\Sigma v_r \frac{d\omega r^2}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (W_{r\varphi} r^2) \quad , \quad (14)$$

于是得:

$$\dot{M} \frac{d}{dr} (\omega r^2) = 2\pi \frac{d}{dr} (W_{r\varphi} r^2) \quad , \quad (15)$$

其中,  $\dot{M}$  表示吸积质量,  $W_{r\varphi}$  表示粘度张量。

吸积张量与角速度对半径的导数成反比关系, 其定义为:

$$W_{r\varphi} = -2\eta H r \frac{d\omega}{dr} \quad , \quad (16)$$

其中,  $\eta$  表示运动粘度并且  $\eta = \rho\nu$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ 。由 (15) 与 (16) 可得到吸积率  $\dot{M}$  与面密度  $\Sigma$  的关系:

$$\dot{M} = 6\pi r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma \nu r^{1/2}) \quad . \quad (17)$$

将式 (17) 代入扩散方程可得:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \dot{M}}{\partial r} \quad . \quad (18)$$

由此我们发现, 吸积率也可以由面密度  $\Sigma$ 、时间  $t$  以及盘半径  $r$  表示。这对我们研究吸积率特性至关重要, 对研究中心天体的质量提供了一条新的探索方式。

## 2.5 混合 OU 过程为随机扩散方程的解

### 2.5.1 OU 过程及混合 OU 过程

Ornstein-Uhlenbeck Process (OU Process)<sup>[9]</sup> 又叫一阶连续自回归过程<sup>[15]</sup>, 最初描述粒子在阻力影响下的布朗运动的速度变化过程, 在连续时间上又名随机游走模型。在 OU 过程中,  $X_t$  必须满足高斯平稳并且是一个马尔科夫链, 其定义可由随机微分方程<sup>[16]</sup>表示:

$$dX_t = \omega(\mu - X_t)dt + \Sigma dW_t \quad , \quad (19)$$

其中  $\omega, \sigma > 0$ ,  $\omega$  表示过程的特征频率,  $\mu$  表示过程的均值,  $\sigma$  表示驱动噪声  $W_t$  的幅值。并可以求得 OU 过程的自相关函数:

$$R(t) = \frac{\sigma^2}{2\omega} e^{-|t|\omega} \quad . \quad (20)$$

Mixtures Ornstein-Uhlenbeck Process (MOU Process) 是多维 OU 过程, 其数学表达式为:

$$\Psi_M(t) = \mu + \sum_{i=1}^M \kappa_i X_i(t) \quad , \quad (21)$$

其中,  $X_i(t), \dots, X_M(t)$  表示一系列 OU 过程, 并且其特征频率分别为  $\omega_1, \dots, \omega_M$ , 相应的噪声幅值为  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$ ,  $\mu$  表示均值,  $\kappa_i, \dots, \kappa_M$  表示混合权重系数。同理, 混合 OU 过程的相关函数为:

$$R_{\Psi, M}(t) = \sum_{i=1}^M \frac{\kappa_i^2 \Sigma_i^2}{2\omega_i} e^{-|t|\omega_i} \quad , \quad (22)$$

功率谱为:

$$P_{\Psi, M}(t) = \sum_{i=1}^M \frac{\kappa_i^2 \Sigma_i^2}{2\pi} \frac{1}{\omega_i + \omega^2} \quad . \quad (23)$$

### 2.5.2 扩散方程与边界条件

为了研究吸积扰动扩散方程的平稳解, 我们令  $x = r^{1/2}$ ,  $\chi(x, t) = x\nu\Sigma$ , 那么式 (12) 就可以表示为如下形式<sup>[9,13]</sup>:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{3\nu}{4x^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \quad . \quad (24)$$

同理, 把变量代换到吸积质量方程, 即式 (17), 则  $\dot{M}$  表示为:

$$\dot{M} = 3\pi \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad . \quad (25)$$

我们假设吸积盘扰动只在  $r_{\text{in}} < r < r_0$  边界内吸积, 其中  $r_0$  表示吸积的外边界,  $r_{\text{in}}$  表示吸积扰动的内边界, 并且  $r_{\text{in}} \rightarrow 0$ , 故在吸积盘外边界  $r_0$  处吸积率  $\dot{M}(r_0, t) = 0$ , 又因为  $r_{\text{in}} \ll r_0$ , 所以在内边界处  $\Sigma = 0$ , 故有:

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{当 } x = r_0 = x_0 \\ \chi = 0 \quad , \quad \text{当 } x = r_{\text{in}} \rightarrow 0 \end{cases} \quad . \quad (26)$$

式 (24) 就是扩散方程的简化形式, 当  $\nu$  与  $\Sigma$  相互独立时, 则为吸积盘线性扩散方程。但是式 (24) 只是在理想状况下的扩散方程, 即没有考虑吸积盘中其他扰动的影响, 而实际上粒子在吸积盘中的环境是相当复杂的, 不仅受到中心天体的引力作用, 还会受到喷流辐射和粘滞力等影响。所以, 在研究吸积过程中为了更好地理解粒子在吸积盘中对扰动的反应, 我们将引入扰动源  $W(x, t)$ 。为了简化模型, 我们假设  $W(x, t)$  是布朗运动过程, 那么它也是一个均值为零, 参数为  $\sigma(x)$  维纳过程, 故对任意  $0 \leq s < t$ , 有

$$R_W(s, t) = \sigma(x, y) \min(s, t) \quad . \quad (27)$$

在数学上维纳过程可以表示为白噪声的积分形式, 所以我们用  $\partial W(x, t)/\partial t$  表示白噪声, 那么引入扰动源后随机扩散方程表示为:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{3\nu(x)}{4x^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial W(x,t)}{\partial t} . \quad (28)$$

### 2.5.3 随机扩散方程的解

对式 (24) 采用分离变量法, 令  $\chi(x,t) = X(x)T(t)$ , 我们得到:

$$X(x)T'(t) = \frac{3\nu(x)}{4x^2} X''(x)T(t) . \quad (29)$$

于是本征方程为:

$$\frac{X_k''(x)}{X_k(x)} = \lambda_k \frac{4x^2}{3\nu(x)} . \quad (30)$$

其中  $X_k(x)$  是偏微分方程式 (24) 的本征函数,  $\lambda_k$  为本征值. 那么由随机偏微分方程知识可知, 式 (28) 的解<sup>[16]</sup> 的形式可表示为:

$$\chi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)y_k(t) , \quad (31)$$

其中  $y_k(t)$  是一个有待确定的随机过程量. 为了计算方便我们假设  $\sigma(x,y)$  存在于本征函数  $X_k(x)$  空间内, 所以  $\sigma(x,y)$  可由本征函数表示, 那么布朗过程<sup>[16]</sup> 可由本征函数表示:

$$W(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \omega_k(t) X_k(x) . \quad (32)$$

其中  $\omega_k(t)$  是一维独立同分布的布朗运动过程, 参数系数  $\sigma_k$  为:

$$\sigma_k^2 = \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} \frac{4x^2}{3\nu(x)} \frac{4y^2}{3\nu(y)} \sigma(xy) X_k(x) X_k(y) dx dy . \quad (33)$$

将式 (30), (31), (32) 分别代入式 (26), (28) 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)y_k(t)}{\partial t} &= \frac{3\nu(x)}{4x^2} \frac{\partial^2 \left[ \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)y_k(t) \right]}{\partial x^2} + \frac{\partial \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \omega_k(t) X_k(x)}{\partial t} \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left[ X_k(x) \frac{dy_k(t)}{dt} \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} [-\lambda_k X_k(x)y_k(t)] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ X_k(x) \sigma_k \frac{d\omega_k(t)}{dt} \right] . \end{aligned} \quad (34)$$

于是得到随机微分方程:

$$dy_k(t) = -\lambda_k y_k(t) dt + \sigma_k d\omega_k(t) , \quad (35)$$

其中  $k = 1, 2, 3, \dots$ , 式 (35) 是一阶连续自回归过程, 也叫 OU 过程<sup>[15]</sup>. 我们发现方程中特征值  $\lambda_k$  对应 OU 过程的特征频率  $\omega_k$ ,  $\sigma_k$  对应其扰动噪声幅值. 初值  $y_k(0)$  为:

$$y_k(0) = \int_0^{x_0} \frac{4x^2}{3\nu(x)} h_0(x) X_k(x) dx , \quad (36)$$

其中  $h_0(x) = \chi(x, 0)$ 。

由此可知式 (35) 是一个一维的 OU 过程形式, 随机微分方程的解为:

$$\begin{aligned} dy_k(t) + \lambda_k y_k(t) dt &= \sigma_k d\omega_k(t) \\ \iff e^{\lambda_k t} dy_k(t) + e^{\lambda_k t} \lambda_k y_k(t) dt &= e^{\lambda_k t} \sigma_k d\omega_k(t) \\ \iff y_k(t) &= e^{-t\lambda_k} y_k(0) + \sigma_k \int_0^t e^{(-t-s)\lambda_k} d\omega_k(s) \end{aligned} \quad (37)$$

将上式解代入式 (31), 则可得到随机扩散方程 (式 (28)) 的解:

$$\chi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ X_k(x) e^{-t\lambda_k} y_k(0) + \sigma_k X_k(x) \int_0^t e^{(-t-s)\lambda_k} d\omega_k(s) \right] \quad (38)$$

同理吸积质量则为:

$$\dot{M} = 3\pi \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial X_k(x)}{\partial x} \left( e^{-t\lambda_k} y_k(0) + \sigma_k \int_0^t e^{(-t-s)\lambda_k} d\omega_k(s) \right) \right] \quad (39)$$

由式 (36) 及 (37) 可知, 在扰动源  $W(x, t)$  下扩散方程解可以表示为混合 OU 过程的解形式, 吸积质量  $\dot{M}$  也可表示为混合 OU 过程解的形式, 且此时的 OU 过程的特征频率等于扩散方程的特征值。

#### 2.5.4 OU 过程参数估计

OU 过程的参数我们采用的是极大似然函数估计, 且我们加入的扰动源是均值为 0、方差为 1 的高斯白噪声, 所以我们估计得出的  $X(t)$  均值为  $b\tau$ , 方差为  $\tau\sigma^2/2$ <sup>[15]</sup>。假设时间序列为  $x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$ , 相应的观测时间为  $t_1, t_2, t_3, \cdots, t_n$ , 观测误差的方差为  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2, \cdots, \sigma_n^2$ , 则参数的似然函数为:

$$p(x_1, x_2, x_3 \cdots x_n | b, \tau, \sigma) = \prod_{i=1}^n [2\pi(\Omega_i + \sigma_i^2)]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\hat{x}_i - x_i^*)}{\Omega_i + \sigma_i^2} \right\} \quad (40)$$

其中标准化后的值  $x_i^*$  为:

$$x_i^* = x_i - b\tau \quad (41)$$

估计值的方差  $\Omega_i$  为:

$$\Omega_i = \frac{\tau\sigma^2}{2} \quad (42)$$

假设估计初值  $\hat{x}_1 = 0$ , 则

$$\hat{x}_i = a_i \hat{x}_{i-1} + \frac{a_i \Omega_{i-1}}{\Omega_{i-1} + \sigma_{i-1}^2} (x_{i-1}^* - \hat{x}_{i-1}) \quad (43)$$

其中,

$$a_i = e^{-(t_i - t_{i-1})/\tau} \quad (44)$$



因此我们参数残差为:

$$\chi \equiv \frac{(x_i - x_i^*)}{\sqrt{\Omega_i + \sigma_i^2}} . \quad (45)$$

服从标准正态分布, 即  $\chi \sim N(0, 1)$ , 所以我们可以通过参数残差的分布来看拟合的好坏。

### 3 分析与应用

本文分析的数据来源于 AGN Watch Web site (<http://www.astronomy.ohio-state.edu/agnwatch/data.html>) 分别是 Seyfert Galaxies 光学数据源 NGC 5548、NGC 4151、NGC 7469。主要使用的是 R 波段、光度为  $5100 \text{ \AA}$  的数据, 对其分别进行 OU 过程拟合, 结果如图 1—3 所示。其中点 (加号) 是原始数据点, 实线是 OU 过程拟合的曲线。图中可以看出 OU 过程能够很好地拟合光变曲线特性。为了验证曲线拟合的效果, 我们画出了其相应的残差分布直方图, 如图 4—6 所示, 红色的线为标准正态分布。

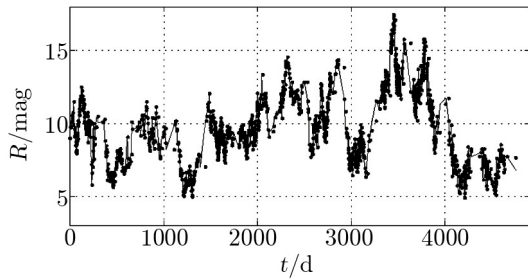


图 1 NGC 5548 光变曲线拟合图

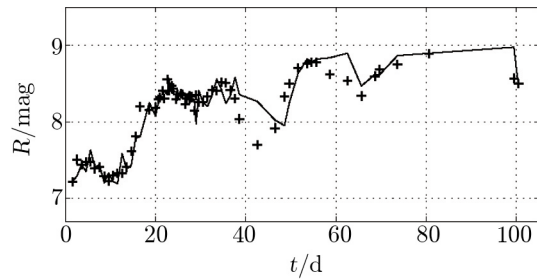


图 2 NGC 4151 光变曲线拟合图

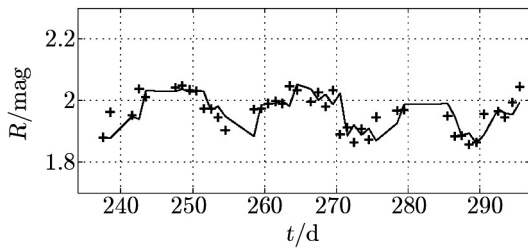


图 3 NGC 7469 光变曲线拟合图

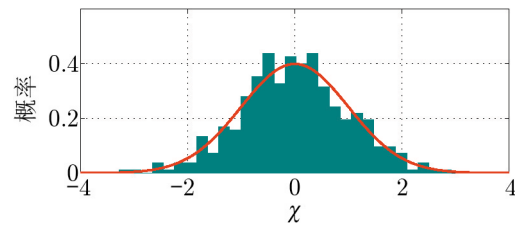


图 4 NGC 4151 参数残差直方图

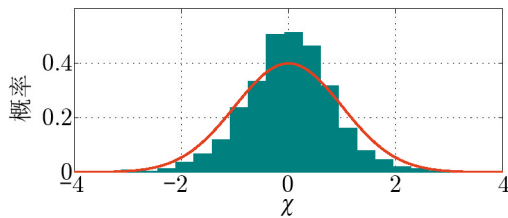


图 5 NGC 5548 参数残差直方图

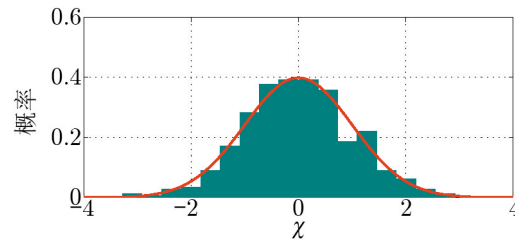


图 6 NGC 7469 参数残差直方图

由图中可知, 光变曲线参数的残差直方图基本与标准正态分布吻合, NGC 4151 的直方图要比 NGC 5548 的更接近于标准正态, 但整体与标准正态是吻合的, 由此可以说明 OU 过程能很好地拟合光变曲线。

## 4 总 结

我们对上述讨论做如下总结:

- (1) 几何薄吸积盘演化过程可以由线性扩散传播模型构建, 在基于流体力学连续性假设的基础上给出了吸积盘扩散模型的详细数学分析, 同时根据吸积盘边界给出了扩散模型方程的边界条件。实际中粘滞系数  $\nu$  与面密度  $\Sigma$  是可能相关的, 但为简化模型, 本文只研究其相互独立的情况。
- (2) 我们给出了在噪声扰动下的随机线性扩散传播模型。没加扰动时的线性扩散模型还是一个理想化的模型, 而实际中的吸积盘是会存在各种扰动的。为了更加深入研究其结构体系及演化过程, 我们加入持续的均值为零的随机扰动源  $\partial W(x, t)/\partial t$ ,  $W(x, t)$  表示维纳过程, 其中直接对维纳求导是不符合数学逻辑的, 但我们忽略数学上的问题, 用  $\partial W(x, t)/\partial t$  表示噪声过程是可行的。
- (3) 我们对黑洞光变建立了一个随机模型 (OU 过程), 并发现混合 OU 过程是扰动下的扩散传播模型的解。吸积质量可以由 OU 过程以及本征函数关系式表示。扩散方程的本征值等于 OU 过程的特征频率。混合 OUL 的权重等于本征函数值。
- (4) 利用已有的模型我们可以用 OU 过程拟合一定时间尺度的光变曲线波动变化, 结果表明: OU 过程能够很好地拟合出光变曲线, 说明我们的模型是可行并且正确的。为进一步研究黑洞光变的特性, 如功率谱、周期、光变时标, 以及这些特性与吸积率、爱丁顿率、红移、质量等之间的相关性具有重要意义; 同时有助于确定天体光变分析的重要参数, 对揭示其背后的物理机制具有重要的意义。但出于篇幅原因我们并没有加入此部分的研究。

## 参考文献:

- [1] Novikov I D, Thorne K S. Black holes. New York: Gordon and Breach, 1973: 2
- [2] Yuan F, Narayan R. A&A, 2014, 529: 580
- [3] Zhang S. Frontiers of Physics, 2013, 8(6): 630
- [4] Frank J, King A, Raine D. Accretion power in astrophysics. UK: Cambridge Univ press. 2002: 80
- [5] Shakura N I, Sunyaev R A. A&A, 1973, 337: 355
- [6] Shu F H, Adams F C, Lizano S. ARA&A, 1987, 23: 81
- [7] 杨兰田. 流体力学与吸积盘理论. 北京: 科学出版社, 1992: 133
- [8] Lynden B D, Pringle J E. ApJ, 1974, 603: 637
- [9] Kelly B C, Sobolewska M, Siemiginowska A. ApJ, 2011, 1: 52

- [10] Wood K S, Litarchuk T, Ray P S, et al. ApJ, 2001, 246: 254  
[11] Bath G T, Pringle J E. ApJ, 1981, 967: 986  
[12] Titarchuk L, Osherovich V. ApJ, 1999, 65: 98  
[13] Titarchuk L, Shaposhnikov N, Arefiev V. ApJ, 2007, 556: 579  
[14] Shakura N I, Sunyaev R A. ApJ, 1973, 337: 355  
[15] Kelly B C, Bechtold J, Siemiginowska A. ApJ, 2009, 895: 910  
[16] Chow Pao L. The Stochastic Partial Differential Equations. Michigan: Wayne State University, 2007: 33

## Studies on Stochastic Model of Accreting Black Holes

DONG Dian-qiao<sup>1</sup>, WANG Jun-yi<sup>1</sup>, QIU Hong-bing<sup>1</sup>,  
AN Tao<sup>2</sup>, FU Jie-lin<sup>1</sup>, LU Xiang-long<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Cognitive Radio and Information Processing, the Ministry of Education, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China; 2. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** In this work we present a linear diffusion model for accreting black holes based on fluid mechanics theory. We demonstrate the detailed mathematical analysis of the model, moreover, the boundary conditions of the model are described according to the accretion disk. For simplicity, the viscosity  $\nu$  is assumed to be independent of surface density  $\Sigma$ . We have developed a Ornstein Uhlenbeck (OU) process for the fluctuations in light curves of accreting black holes and demonstrated that it is a general consequence of the diffusion processes perturbed by a spatially correlated noise field. In addition, in order to verify the simulated performance of the OU process, we apply our method to fitting optical light curves which are derived from AGN Watch Website. The results confirm that: the OU process takes a good approximation to light curves, which contribute to increasing our understanding of the structure of quasar accretion system and study the light curves features.

**Key words:** black hole; accretion disc; linear diffusion; OU process