

doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2019.03.06

# 冥族小天体与海王星特洛伊的近密交会

董城昱<sup>1,2</sup>, 周礼勇<sup>1,2</sup>

(1. 南京大学 天文与空间科学学院, 南京 210046; 2. 南京大学 现代天文与天体物理教育部重点实验室, 南京 210046)

**摘要:** 海王星外天体中的冥族小天体与海王星成 2 : 3 的平运动轨道共振, 且具有较大的轨道偏心率, 因此它们能与海王星特洛伊的轨道发生重叠, 导致近密交会和碰撞, 从而深刻地影响两者的动力学演化。利用数值模拟的方法, 有效地获得了这两群小天体间近密交会的信息, 讨论了可能影响两者近密交会频率的因素, 包括小天体质量、轨道倾角和轨道偏心率等。在合理近似条件下, 建立了估算两群小天体近密交会和碰撞次数的理论公式。结合已有的数值模拟结果, 以及对冥族小天体观测数据的分析, 对实际情况下冥族小天体群与典型特洛伊小天体之间的近密交会和碰撞次数进行了估算, 证明近密交会较为频繁地发生, 而碰撞则极其罕见, 并且各尺寸范围的小天体对近密交会和碰撞次数的贡献各有不同。这一套分析和估算的方法可以直接应用在其他类似小天体间交会过程的估算上。

**关键词:** 海王星特洛伊天体; 近密交会; 分析与数值方法

**中图分类号:** P134      **文献标识码:** A

## 1 引 言

海王星特洛伊 (Trojan, TR) 小天体是与海王星同享日心轨道的一群小天体。与太阳系中的其他特洛伊天体类似, 海王星特洛伊处在海王星的拉格朗日稳定区域, 即在太阳-海王星系统中处于海王星轨道前方 (或后方) 约  $60^\circ$  的 L4 (或 L5) 点。特洛伊天体群、海王星和太阳大致构成一个等边三角形。海王星特洛伊与海王星有大致相同的轨道半长径和轨道周期, 并且它们之间的平经度之差始终在一个范围内秤动, 因此, 我们也称海王星特洛伊与海王星间存在 1 : 1 的平运动轨道共振。截至 2018 年 11 月, 人们已发现 22 个海王星特洛伊, 其中有 19 个处在 L4 点, 3 个处在 L5 点<sup>[1]</sup>。

在海王星轨道之外还存在着为数众多的海王星外天体 (trans-Neptunian object, TNO), 包括柯伊伯带天体 (Kuiper belt object, KBO)、散射盘天体 (scattered disk object, SDO) 和

收稿日期: 2018-11-15; 修回日期: 2019-07-01

资助项目: 国家自然科学基金 (11473016, 11333002)

通讯作者: 周礼勇, zhouly@nju.edu.cn

内奥尔特云天体等。一直以来人们通过对它们进行研究来揭示早期太阳系的状态和演化过程。TNO 中有一群小天体与海王星保持着 2 : 3 的平运动轨道共振, 其轨道半长径约为 39 AU。由于其轨道性质与冥王星类似, 因此它们被称为冥族小天体 (plutino, PL)。冥族小天体是共振柯伊伯带天体 (resonant KBO) 中最大的一类, 除了最大的冥王星以外, 它还包括亡神星 (Orcus) 和伊克西翁 (Ixion) 等。

冥族小天体的轨道偏心率可达 0.3, 这意味着它们经常穿越海王星的轨道, 并与海王星特洛伊群发生交会。Almeida 等人<sup>[2]</sup>认为, 这两群小天体之间可能存在的碰撞会对两群小天体的表面颜色产生重要影响。同时, 他们还认为, 冥族小天体引起的近密交会 (close encounter, CE) 或碰撞可能使得低轨道倾角处的海王星特洛伊减少或碎裂, 因此, 海王星特洛伊的尺寸普遍较小, 且在高轨道倾角上分布较多。据估算, 海王星特洛伊在高倾角轨道处的数目远远超过低倾角轨道处的数目<sup>[3]</sup>, 而这一轨道分布特征不是当前太阳系构型的动力学演化结果<sup>[4, 5]</sup>, 也不是目前被广为认可的行星迁移过程的结果<sup>[6]</sup>, 因此, 该现象一直令天文学家感到困惑。Almeida 等人<sup>[2]</sup>通过简单的数值模拟来验证冥族小天体与海王星特洛伊之间的相互作用。他们对一些实际的冥族小天体和海王星特洛伊的轨道积分至  $10^9$  a, 并以  $10^5$  a 为时间间隔检查这些轨道在海王星轨道面上的投影, 发现两者之间存在大量的重叠。当冥族小天体轨道偏心率较大、轨道倾角较低、共振振幅较大时, 两群天体之间的轨道重叠就较大。通过数值方法, Almeida 等人<sup>[2]</sup>还对冥族小天体与海王星特洛伊之间的近密交会和碰撞的次数进行了估算。尽管在模拟中很少直接检测到交会或碰撞, 他们仍然认为在实际情况下交会和碰撞是十分频繁的, 并且其频率应比两群小天体自身内部的交会频率要高。

因为冥族小天体和海王星特洛伊分别被与海王星的 2 : 3 和 1 : 1 平运动共振所束缚, Almeida 等人<sup>[2]</sup>所描述的近密交会甚至碰撞确实很可能在整个太阳系年龄内持续发生, 且其动力学效果有可能在长时间内累积, 从而对两群小天体产生重要影响, 甚至决定它们当前的轨道分布特征。然而, 在小天体所处的广阔空间内, 个别小天体之间的近密交会或碰撞仍然是极为罕见的事件, 一般的数值模拟受制于计算能力, 即使参与模拟的小天体数目非常大, 仍然难以探测到足够多的交会或碰撞事件。Almeida 等人<sup>[2]</sup>仅仅作了较粗糙的数值模拟, 对近密交会或碰撞的效果也并未进行具体分析, 因此, 未能彻底解决这一问题。在本文中我们将使用更严格的数值模拟与计算, 精确地检测海王星特洛伊与冥族小天体之间的近密交会。在控制变量的前提下, 我们通过改变两群小天体的物理和轨道性质, 探究了影响两群小天体之间近密交会的关键因素。在数值模拟结果的基础上, 我们建立了半解析方法, 推算出了两群小天体之间碰撞的频率, 从而解决了因为碰撞尺度过小而难以进行数值检测的问题。此外, 在冥族小天体现有观测数据的基础上, 本文对其质量分布进行了估算, 并将之应用于实际情况下两群小天体之间近密交会和碰撞次数的推算。

本文第 2 章介绍我们所采用的模型和数值模拟方法; 第 3 章展示由数值模拟结果得到的近密交会次数与轨道根数之间的关系; 第 4 和第 5 章建立分析方法, 以计算两群小天体之间近密交会和碰撞的次数; 第 6 章对实际情况进行分析; 第 7 章进行总结和讨论。

## 2 模型和数值模拟方法

为了计算效率和控制变量的需要,我们在数值积分中每次只包括一个 PL 和一个 TR。4 个小天体被选作典型例子,它们的轨道根数信息见表 1。每次只改变 PL 或 TR 的某一个轨道根数,然后大量取样并作相应数值积分,来显示不同的轨道根数如何影响近密交会。

表 1 几个典型海王星特洛伊和冥族小天体的轨道根数 (JD 2454200.50)<sup>[1]</sup>

轨道根数		$a/\text{AU}$	$e$	$i/(\text{°})$	$M/(\text{°})$	$\omega/(\text{°})$	$\Omega/(\text{°})$
海王星特洛伊	2004 UP10	30.099	0.025	1.4	334.1	2.2	34.8
	2006 RJ103	29.973	0.028	8.2	226.6	35.4	120.8
冥族小天体	1999 CE119	39.583	0.274	1.473	352.711	34.967	171.553
	2001 FU172	39.636	0.272	24.694	30.943	135.196	32.448

注:  $a$  为轨道半长径,  $e$  为偏心率,  $i$  为轨道倾角,  $M$  为平近点角,  $\omega$  为近点角距,  $\Omega$  为升交点经度。

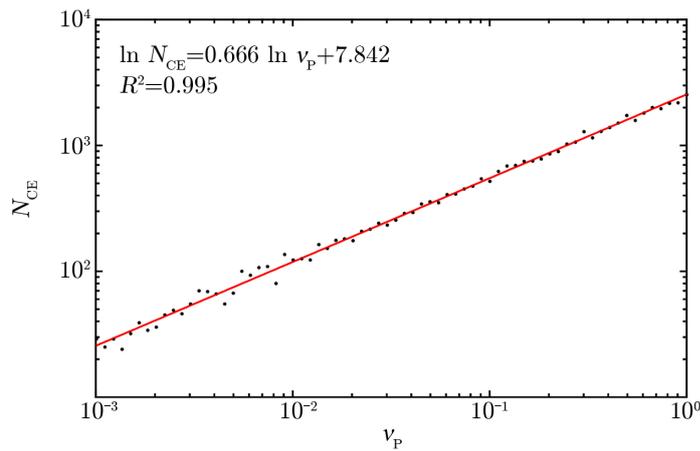
我们在模型中忽略了其他大行星的作用,只包括太阳、海王星和两群发生近密交会的小天体 PL 和 TR。实际上,木星、土星和天王星对这两群小天体的近密交会几乎不会产生直接影响,而来自这些行星的间接作用或由它们引起的长期效应仅引起小天体轨道细微而缓慢的变化,并不足以影响两群小天体因交会或碰撞所导致的在统计意义上的演化过程<sup>[7]</sup>。鉴于 PL 的质量与海王星相比非常小,该模型基本上是一个在第四体 (PL) 摄动下的限制性三体 (太阳、海王星和 TR) 问题模型。

我们用 SyMBA 数值积分包<sup>[8]</sup>来处理以上问题。为了能够合理地处理 CE 过程,并捕捉必要的信息,我们对相关程序做了一些必要的修改。我们把用于判断两个小天体是否发生 CE 的距离阈值设定为两个小天体中相对较大的那一个 (一般情况下是 PL) 的希尔半径 (Hill radius) 的 3.5 倍。在每一个积分步长中,我们都会计算当前 TR 的速度矢量。如果这个矢量指向以 PL 为中心,以距离阈值为半径的球面范围,并且 TR 与 PL 的距离在数个步长之内,我们就开始减小积分步长。两者距离越近,步长会缩得越小,这样就可避免因积分步长太大而错过部分近密交会的情况。通过上述策略,一般情况下积分步长可以设得稍大一些。我们设积分步长为 0.1 a,这样,交会小天体在一个积分步长内穿过的距离约为 0.1 AU。所有的模拟都积分至  $10^9$  a,即太阳系年龄的时间尺度。

## 3 数值结果

### 3.1 CE 次数与 PL 质量的关系

我们首先使用数值模拟方法来研究 CE 次数与 PL 质量的关系。PL 的质量显然是影响 CE 次数的决定性因素。我们以 1999 CE119 和 2004 UP10 这一对小天体为例,在所有初始轨道根数保持不变的情况下,将 PL 质量在  $10^{-3} \sim 1$  倍冥王星质量内取若干值,再对每一个值进行数值积分,并记录 CE 发生的次数,结果如图 1 所示。



注: 黑色点表示对 1999 CE119 和 2004 UP10 的数值模拟产生的 CE 次数, 除了 PL 的质量外, 其他所有的输入参数都是相同的。图中左上角标出的是使用横纵轴对数拟合得到的幂律结果, 另外还给出了决定系数, 即线性回归中相关系数  $R$  的平方,  $R^2$  值接近 1 表明其具有强线性。

图 1 CE 次数与 PL 质量的关系

由图 1 可以看到, 在双对数图上 CE 次数  $N_{\text{CE}}$  与  $\nu_{\text{P}}$  成线性关系 ( $\nu_{\text{P}} = m_{\text{P}}/m_{\text{Pluto}}$ ,  $m_{\text{P}}$  为 PL 的质量,  $m_{\text{Pluto}}$  为冥王星的质量), 这意味着它们之间存在简单的幂律关系。通过线性拟合我们可以得到幂律的近似值:

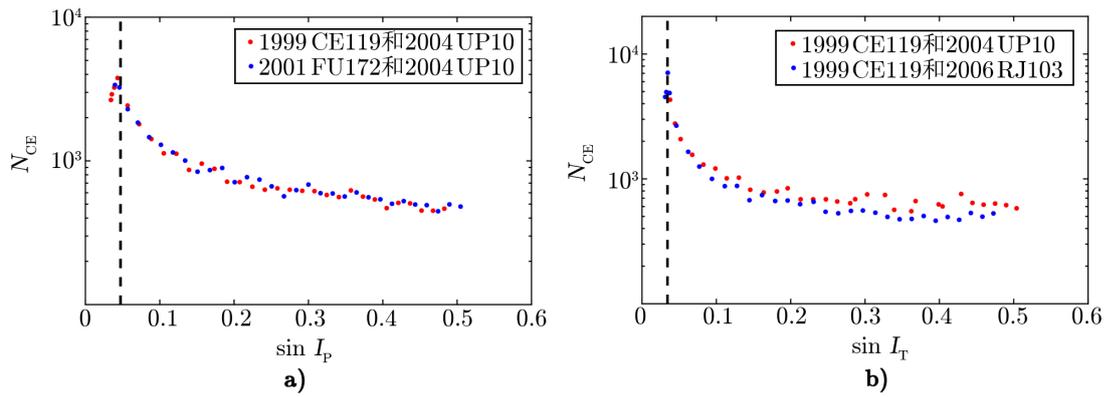
$$N_{\text{CE}} \propto \nu_{\text{P}}^{2/3} . \quad (1)$$

### 3.2 CE 次数与轨道倾角的关系

小天体的轨道倾角决定了两个小天体轨道面的距离, 它会影响小天体之间的交会或碰撞概率。我们随机选定 TR 2004 UP10, 并在模拟数据中测量具有不同轨道倾角的 PL 与它的 CE 次数。保持其他轨道根数不变, 只对 1999 CE119 和 2001 FU172 这两个 PL 的初始轨道倾角在  $0^\circ \sim 30^\circ$  之间取值, 并模拟它们的轨道演化, 统计 PL 与 TR 之间 CE 的数据。数值模拟中, 小天体 PL 质量仍然采用冥王星质量。

模拟的结果如图 2a) 所示。由图可见, 当 PL 的轨道倾角  $I_{\text{P}}$  增加时, CE 次数逐渐减少。但当  $I_{\text{P}}$  很小的时候, 其趋势则相反。峰值出现在 PL 的轨道倾角与 TR 的轨道倾角相同时。也就是说, 当两者的轨道倾角接近时, CE 的概率最大, 这是因为此时 PL 与 TR 的轨道面有最大机会相互接近。我们还可以看到, PL 轨道倾角变化引起的 CE 次数发生的变化基本上在 1 个量级以内, 与 PL 质量变化对其产生的影响相比其影响较小。

TR 的轨道倾角  $I_{\text{T}}$  也会影响 CE 次数, 倾角越大, TR 与 PL 交会的概率就越小。一般而言, 只有相对轨道倾角才有实际的物理意义。在我们考虑的模型中, 海王星的轨道面是基本固定的, 而 TR 和 PL 相对于海王星轨道面的倾角都会影响它们轨道的特征, 所以有必要单独讨论 TR 轨道倾角对这两群小天体之间的近密交会的影响。以 1999 CE119 这个 PL 和两个 TR (2004 UP10 和 2006 RJ103) 为例, 保持 TR 的其他轨道根数不变, 仅改变它们的



注: a) CE 次数与 PL 轨道倾角的关系, 黑色虚线表示模拟过程中 TR 轨道倾角的平均值; b) CE 次数与 TR 轨道倾角的关系, 黑色虚线表示模拟过程中 PL 轨道倾角的平均值。图中每个点都表示对一个 PL 或一个 TR 的一次数值模拟产生的 CE 次数。数值模拟中除 PL 或 TR 的轨道倾角不同外, 其他参数都相同。

图 2 CE 次数与轨道倾角的关系

初始轨道倾角, 来分析 CE 的情况。最后结果如图 2b) 所示。由图 2b) 可以看出, TR 轨道倾角的变化对 CE 次数的影响也基本在 1 个量级以内, 并且与图 2a) 一样, 当两者轨道倾角相近时, CE 的次数达到最大值。

### 3.3 CE 次数与 PL 轨道偏心率的关系

轨道偏心率决定了轨道向内外延展的程度, 决定了两群小天体轨道交叉重叠的程度, 因而也会影响两群小天体的交会概率。因为只有低偏心率的 TR 轨道才是稳定的<sup>[5]</sup>, 所以在讨论 PL 和 TR 偏心率对两者之间 CE 次数的影响时, 只需要讨论 PL 的轨道偏心率即可。仍旧以上述两对小天体为例, 仅改变 PL 的偏心率  $e_P$ , 保持所有其他轨道根数不变, 计算 CE 次数。计算结果如图 3 所示。

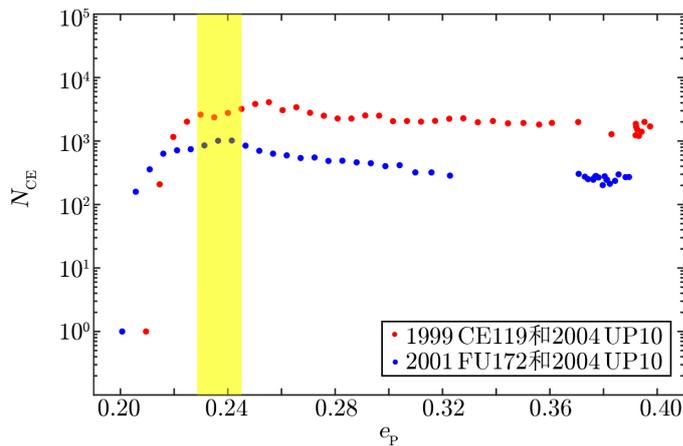


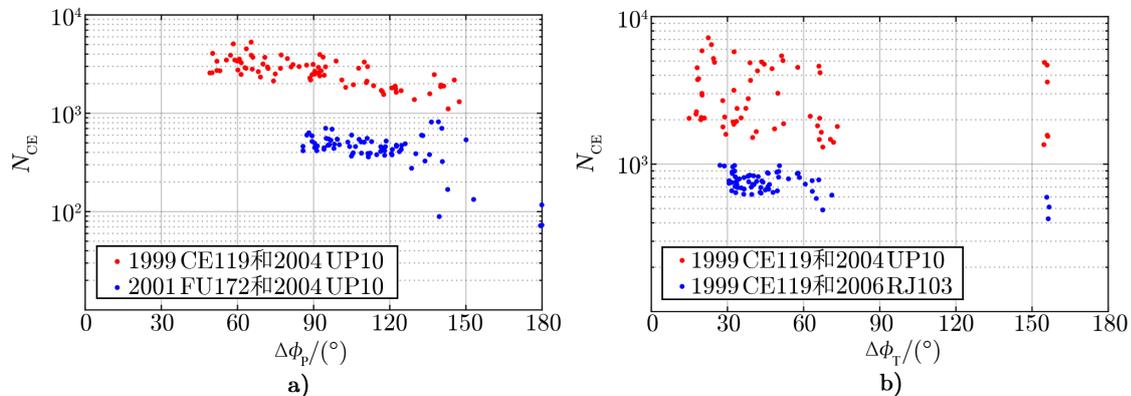
图 3 CE 次数与 PL 轨道偏心率的关系

由图 3 可以看出, 随着  $e_P$  的增加, CE 次数先增加, 然后又缓慢减少, 并在黄色区域附近达到最大值。黄色区域表示的是当 PL 的近日点处在 TR 近日点与远日点之间时, PL 偏心率的范围  $e_E \sim e_X$ , 显然这种情况下发生 CE 的概率最大。当  $e_P$  持续增大, PL 的近日点深入到 TR 轨道内部时, 因为两个小天体轨道交叉的部分并没有增加, 所以 CE 次数的变化不明显。当 PL 近日点在 TR 远日点之外时, 理论上这两个轨道应该不会交叉, 但实际上仍有一些 CE 发生。这是因为我们在统计中采用的是以一定时间间隔记录的轨道根数平均值, 以去除瞬时变化的影响, 但在实际模拟中这些轨道根数会有起伏。

### 3.4 CE 次数与共振振幅的关系

平运动共振的振幅反映了天体在共振中稷动的情况。Almeida 等人<sup>[2]</sup>认为, PL 与 TR 的共振振幅  $\Delta\phi$  对近密交会有重要作用, 并且共振振幅越大, CE 的概率就越高。然而, 在我们的模拟结果中, 共振振幅对 CE 的影响并不大。一般来说, 共振振幅越大, 两条轨道重叠的面积也越大。但实际上并不是重叠区域的面积, 而是在重叠区域内星子出现的频率直接决定了 CE 的概率。如果我们像 Almeida 等人那样处理, 每隔一段时间记录 PL 的位置, 并将其投影到 TR 轨道平面上, 那么, 因为总时间是固定的, 总的投影点的数量也必然是固定的。由于增大重叠面积的同时会降低点的密度, 而这里的密度实际上代表的就是 PL 在某一区域出现的频率, 因此, 即使轨道重叠面积因共振振幅的增加而增加, CE 概率也不一定会增加。

我们可以通过随机改变 PL 的  $\Omega$ ,  $\omega$  和  $M$  的初始值, 从而改变 PL 的共振振幅来进行验证。我们把经过演化后能够稳定存在于共振区内的 PL 所在的模拟结果挑选出来, 即可得到 CE 的次数与 PL 的共振振幅的关系。TR 的共振振幅对 CE 的影响也可以通过类似方法进行验证。我们将结果一并总结在图 4 中。



注: a) CE 次数与 PL 共振振幅的关系; b) CE 次数与 TR 共振振幅的关系。

图 4 CE 次数与小天体共振振幅的关系

图 4a) 中, 每个模拟中 PL 的共振振幅  $\Delta\phi_P$  是不同的。数值模拟中初始的  $\Omega_P$ ,  $\omega_P$  和  $M_P$  随机产生, 其他根数保持不变。图 4a) 中显示的共振振幅是演化中的平均值, 其中振幅接近  $180^\circ$  的几个点所代表的轨道稳定性较差。图 4b) 中, 每个模拟中 TR 的共振振幅  $\Delta\phi_T$

是不同的, 共振振幅小于  $80^\circ$  和大于  $150^\circ$  的两群小天体分别对应 TR 的蝌蚪形和马蹄形轨道。可以清楚地看到, 随着共振振幅的变化, CE 的次数并没有明显增加, 甚至还有一定程度的减少。

## 4 CE 次数的理论计算

计算两群小天体之间 CE 的次数问题与计算 CE 的概率问题类似, 许多前人对后者进行过探索<sup>[9, 10]</sup>。本文将对 CE 次数做一些理论分析, 以便在数值结果的基础上通过半解析的方法计算实际情况下的 CE 次数。

### 4.1 CE 次数与质量的关系

小天体之间的相互引力会使两者的轨道发生偏折, 但本文讨论的交会和碰撞次数是两个小天体之间的距离小于给定阈值之后的必然结果, 而进入阈值距离之前小天体间的引力作用可以忽略, 其引起的轨道偏折自然也可忽略。如果仅希望从统计意义上对交会或碰撞进行半解析的研究, 为简单计, 可以直接从经典的碰撞截面角度来看这个问题, 以避免引入复杂的修正系数来详细刻画轨道偏折。我们也将看到, 这一简化所得到的结果与数值模拟的结果一致。

当碰撞完全随机时, 在某个半径  $R$  内 CE 发生的概率  $P$  应与其碰撞截面成正比, 即:

$$P(\tilde{R} < R) = \left(\frac{R}{R_U}\right)^2, \quad (2)$$

这里假设在半径  $R_U$  内碰撞的概率为 1。显然  $R_U$  表征的是两个轨道在空间可能碰撞的区域的尺度, 它应与小天体的日心轨道特征有关。既然小天体质量比太阳质量小很多, 两个小天体的质量都并不足以对其轨道性质产生本质的影响, 所以  $R_U$  应与小天体的质量基本无关。假设在  $R_U$  内发生 CE 的总次数是  $N_U$ , 那么两个小天体发生 CE 的总次数为:

$$N_{\text{CE}} = N_U \left(\frac{R_{\text{th}}}{R_U}\right)^2, \quad (3)$$

其中,  $R_{\text{th}}$  为第 2 章中设定的 CE 阈值半径 (相对较大的小天体的希尔半径的 3.5 倍)。

假设两个小天体演化的总时长是  $t_{\text{tot}}$ , 而 PL 的轨道周期是  $t_{\text{orb}}$ 。由于它们分别处在 2:3 和 1:1 共振中, 每隔两个周期 PL 就会遇见 TR, 也就是说, PL 和 TR 的轨道状态的总周期是 2 个 PL 轨道周期。这样, 在  $t_{\text{tot}}$  时间内最多可能发生的 CE 的次数  $N_U$  为:

$$N_U = \frac{t_{\text{tot}}}{2t_{\text{orb}}} = \frac{t_{\text{tot}}}{2(a_P)^{3/2}}, \quad (4)$$

其中,  $a_P$  是 PL 的半长径,  $t_{\text{tot}}$  以年为单位,  $a_P$  以天文单位为单位。

把 CE 的阈值半径设为 PL 希尔半径的倍数, 显然是因为它与 PL 的质量有关。由希尔半径的公式, 我们可以得到:

$$R_{\text{th}} = \kappa_{\text{th}} a_P \left(\frac{m_P}{3M_\odot}\right)^{1/3}, \quad (5)$$

其中,  $M_{\odot}$  是太阳的质量,  $\kappa_{\text{th}}$  是 CE 的阈值半径与希尔半径之比。此处我们使用了简化的圆轨道希尔半径。最后, 我们可以将 CE 次数写成 PL 质量的函数:

$$N_{\text{CE}} = \chi_N \nu_P^{2/3}, \quad (6)$$

其中,

$$\chi_N = \left( \frac{\kappa_{\text{th}} a_P}{R_u} \right)^2 \left( \frac{\nu_{\text{Pluto}}}{3} \right)^{2/3}, \quad (7)$$

$$\nu_{\text{Pluto}} \equiv \frac{m_{\text{Pluto}}}{m_S}, \quad (8)$$

$$R_u \equiv \frac{R_U}{\sqrt{N_U}}. \quad (9)$$

在这里, 我们把 PL 的质量  $m_P$  用冥王星质量做了无量纲化处理。

容易看到, CE 次数与 PL 的质量成幂次关系, 其幂律 (2/3) 与图 1 得到的拟合结果 (0.6658) 基本一致。式 (7) 中参数  $R_u$  表征各种轨道特征对 CE 的影响, 例如前面所讨论的 PL 和 TR 的轨道倾角、偏心率和共振振幅等。这些轨道特征决定了 PL 与 TR 轨道在空间上交叉的概率。由各轨道根数直接推算参数  $R_u$  是比较复杂的, 并且第 3.2–3.4 节的数值结果已经表明, 轨道根数对 CE 次数的影响较小, 我们在此不对  $R_u$  做细致的理论计算, 而是从数值模拟的结果中推算  $R_u$ 。所以有必要在此强调, 以下估算 CE 次数的公式实际上是半解析的。

## 4.2 一群 PL 的 CE 次数

如第 4.1 节所述, CE 次数可写成 PL 质量的函数。该表达式也可以推广到多个 PL 的情形, 适用于实际情况。

### 4.2.1 简单情形

首先讨论最简单的情形, 即所有的 PL 质量和轨道都是完全一样的情形。这种情况下的 CE 总次数容易得到。假设 PL 总质量是  $\widetilde{m}_P$ , 而 PL 总个数为  $\widetilde{N}_P$ , 那么单个 PL 的质量为  $\widetilde{m}_P/\widetilde{N}_P$ 。根据式 (6), 总 CE 次数应为:

$$\widetilde{N}_{\text{CE}} = \widetilde{N}_P^{1/3} \chi_N \widetilde{m}_P^{2/3}. \quad (10)$$

式 (10) 表明, 在总质量给定的情况下, 单个 PL 的质量越小, PL 的总数越多, CE 次数就会越多。因为我们在判定 CE 的时候考虑的是希尔半径, 所以小质量的 PL 也会在 CE 中影响 TR 的轨道。然而, 即使都在希尔半径内, 小质量的 PL 与大质量的 PL 造成的影响显然不一样, 所以更多的小质量 PL 导致更多的 CE, 并不一定意味着总的效果也会变大。

### 4.2.2 给定质量分布

一般来说, 一群 PL 遵从一个质量分布。既然质量是 CE 次数的决定性因素, 而轨道特征至多带来量级之内的影响, 因此, 我们仍然简单地假设所有的 PL 都有完全相同的轨道性质, 这样我们就可以继续使用式 (6)。

假设共有  $\widetilde{N}_P$  个 PL，总质量是  $\widetilde{\nu}_P$ 。这些 PL 的质量分布函数  $f(\nu_P)$  应满足归一化条件：

$$\int_{\nu_{P,b}}^1 f(\nu_P) d\nu_P = 1 \quad , \quad (11)$$

且其总质量符合下式：

$$\widetilde{N}_P \int_{\nu_{P,b}}^1 \nu_P f(\nu_P) d\nu_P = \widetilde{\nu}_P \quad , \quad (12)$$

其中， $\nu_{P,b}$  是 PL 质量的下界，而积分的上界始终是 1。也就是说，我们始终以最大质量的那个 PL 作为参考。当然，实际情况下，那个 PL 就是冥王星。

这样，质量在  $(\nu_P, \nu_P + d\nu_P)$  区间内的 PL 个数是：

$$dN_P = \widetilde{N}_P f(\nu_P) d\nu_P \quad . \quad (13)$$

假设此质量区间内 PL 的质量都为区间的下界，那么这个质量区间内 PL 贡献的 CE 次数是：

$$dN_{CE} = N_{CE}(\nu_P) dN_P \quad . \quad (14)$$

所以总的 CE 次数是：

$$\widetilde{N}_{CE} = \widetilde{N}_P \int_{\nu_{P,0}}^1 N_{CE}(\nu_P) f(\nu_P) d\nu_P \quad , \quad (15)$$

其中， $\nu_{P,0}$  是积分下界。既然我们讨论 CE 次数，一个必须满足的条件是 PL 和 TR 之间的距离不能太近。如果 PL 的 CE 阈值半径小于 TR 的物理半径，那么这个时候应该发生了碰撞，而不是近密交会。假设 TR 的物理半径是  $R_T$ ，那么应该有：

$$R_{th} > R_T \quad . \quad (16)$$

根据式 (5) 可以得到：

$$\nu_{P,0} = \left( \frac{R_T}{\kappa_{th} a_P} \right)^3 \left( \frac{3}{\nu_{Pluto}} \right) \quad . \quad (17)$$

这个下界是由物理条件所限，我们称之为硬下界。

另一种情况下，我们考虑 PL 的 CE 阈值半径不比 TR 的 CE 阈值半径小，否则我们在计算 CE 次数时首先考虑 TR 对 PL 的影响，而这很可能会改变 PL 的轨道性质。因此，我们有：

$$\nu_{P,0} = \nu_T \quad , \quad (18)$$

其中  $\nu_T = m_T/m_{Pluto}$ ， $m_T$  为 TR 的质量。我们称这个下界为软下界。

最后，再考虑式 (15) 的近似问题。我们是从最简单的碰撞截面角度推导出式 (6)，进而得到式 (15) 的。对 CE 次数的理论计算必然要比实际情况少一些，因为在单纯的碰撞截面中我们没有考虑两个小天体之间的引力，而引力的聚焦修正通常会使两个星子之间的距离更近。

另一方面, 既然我们近似地认为所有 PL 的轨道性质都相同, 而实际应用的时候我们又经常取 CE 条件最好的轨道作为例子 (根据第 3 章的数值模拟结果, 就是轨道倾角较低, 轨道偏心率适中的情形), 这样, 总的 CE 次数会被高估。

综合考虑上述两种情况, 我们相信, 由式 (15) 给出的总 CE 次数的计算结果与真实情况比较接近。

## 5 碰撞次数的理论计算

第 4 章中我们对 CE 次数所做的理论计算也可以运用到对碰撞次数的计算上, 只不过因为碰撞的时候两个小天体距离较近, 引力偏折较大, 因此, 用上述碰撞截面计算方法得出的碰撞次数的精度会差一些。但至少我们可以用这种方法得出估算值的下限。

### 5.1 单个 PL 的情形

估算碰撞次数的方法其实与第 4.1 节中估算 CE 次数的方法完全一致, 只不过需要改动阈值半径的定义。对于碰撞而言, 阈值半径为两个小天体的物理半径之和, 即:

$$R_{\text{th}} = R_{\text{P}} + R_{\text{T}} \quad , \quad (19)$$

其中,  $R_{\text{P}}$  为 PL 的物理半径,  $R_{\text{T}}$  为 TR 的物理半径。这样, 继续应用式 (3), 就可以得到单个 PL 引起的总碰撞次数:

$$N_{\text{co}} = \left( \frac{R_{\text{P}} + R_{\text{T}}}{R_{\text{U}}} \right)^2 \quad . \quad (20)$$

以冥王星的密度作为标准, 将 PL 的物理半径表示为其质量的关系式, 即:

$$R_{\text{P}}(\nu_{\text{P}}) = R_{\text{Pluto}} \nu_{\text{P}}^{1/3} \quad , \quad (21)$$

其中,  $R_{\text{Pluto}}$  为冥王星的半径。所以式 (20) 可表示为:

$$N_{\text{co}} = \left( \frac{R_{\text{Pluto}} \nu_{\text{P}}^{1/3} + R_{\text{T}}}{R_{\text{U}}} \right)^2 \quad . \quad (22)$$

类似于描述近密交会次数的式 (6), 总的碰撞次数  $N_{\text{co}}$  与 PL 质量也大致成  $2/3$  幂次关系, 说明当 PL 总质量固定时, PL 的个数越多, 总的碰撞次数也越多, 符合一般认知。

### 5.2 一群 PL 的情形

下面估算一群 PL 所引起的碰撞次数。同样, 先按照式 (11) 和式 (12) 定义 PL 的质量分布函数  $f(\nu_{\text{P}})$ , 然后根据式 (13), 估算总的碰撞次数:

$$\widetilde{N}_{\text{co}} = \widetilde{N}_{\text{P}} \int_{\nu_{\text{P},0}}^1 N_{\text{co}}(\nu_{\text{P}}) f(\nu_{\text{P}}) d\nu_{\text{P}} \quad , \quad (23)$$

其中,  $\nu_{\text{P},0}$  是积分下界。

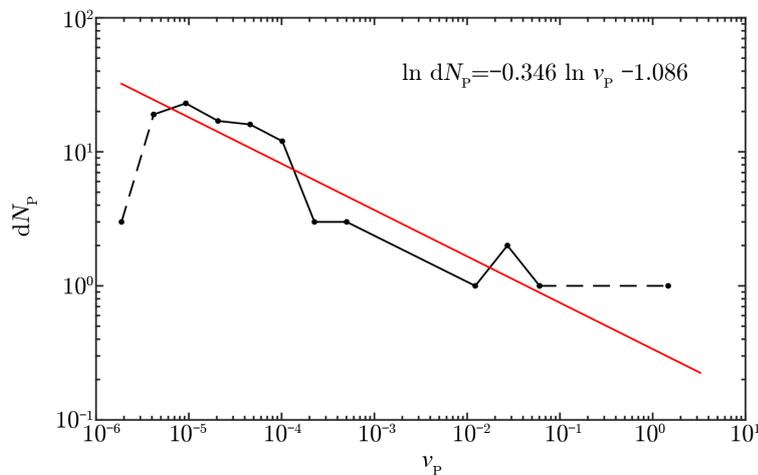
在碰撞问题中, 积分下界较难确定, 因为即使 PL 的质量很小, 它也可以与 TR 发生碰撞, 只不过碰撞所引起的效果不大。实际上, 针对不同的实际问题, 此标准应该随时变化。

## 6 实际情况

我们利用本文所得到的半解析结果来计算实际发生在 PL 与 TR 之间的近密交会和碰撞次数。

### 6.1 PL 的质量分布

我们首先对 PL 的质量分布进行计算。我们先从 IAU 小行星中心<sup>[1]</sup>获取所有已经被证实的 101 个 PL 的数据。实际上, 仅有少数几个 PL 的质量有较准确的观测数据, 如冥王星以及 Orcus, Ixion, 2003 AZ84, 2003 VS2 等。由于反照率未知, 其质量很难准确给定, 因此我们这里使用近似方法来估算 PL 的质量, 即把 PL 的行星绝对星等转化为其物理半径, 然后再根据冥王星的平均密度计算其质量。计算结果如图 5 所示。



注: 红色直线是一阶多项式拟合的结果。在数据处理时, 我们剔除了  $\nu_P$  最小的一个点, 因为这个点显然带入了观测效应; 同时也剔除了  $\nu_P$  最大的一个点, 也就是冥王星所在的区间, 因为冥王星的质量在整个 PL 的质量分布中是异常的。

图 5 由观测数据计算得到的 PL 的质量分布

由图 5 可知, 由实际观测数据计算得到的 PL 质量分布的频率大致与质量成简单的幂律关系, 即:

$$dN_P \propto \nu_P^{-1/3} . \quad (24)$$

该式也可以写作:

$$f(\nu_P) = B_0 \nu_P^{-4/3} , \quad (25)$$

其中,  $B_0$  是归一化系数。这方便了后面的相关计算。

### 6.2 近密交会次数

根据以上理论结果, 我们可以对实际情况下 TR 与 PL 之间的 CE 次数进行计算。我们主要计算某一个 TR 受到真实的 PL 群 CE 摄动的次数。当然, 若要反过来估计 TR 群对

PL 的影响, 也可以做同样的推算。作为一个例子, 我们推算一个半径为 100 km 的 TR 所受到的 PL 群的 CE 摄动次数。

假设除冥王星外所有 PL 的总质量不超过冥王星的质量 (这是一个合理的估计), 这样, PL 群的总质量为  $\widetilde{\nu}_P \approx 2$ 。另外, 实际情况下 PL 的最小物理半径应大于冥王星半径的  $10^{-6}$ , 也就是说, 在 1 m 量级左右。比这个尺寸小的 PL 产生的摄动效果太小, 可以忽略。因此,  $\nu_{P,b} = 10^{-18}$ 。

由式 (12) 的总质量关系式, 以及式 (25) 的质量分布函数, 我们可以得到:

$$\widetilde{\nu}_P = \widetilde{N}_P B_0 \frac{3}{2} \left(1 - \nu_{P,b}^{2/3}\right) . \quad (26)$$

由于  $\nu_{P,b}$  非常小, 可忽略不计, 因此, 我们得到系数  $\widetilde{N}_P B_0 = 4/3$ 。

这样, 根据式 (15), 我们可以得到总的 CE 次数:

$$\widetilde{N}_{CE} = 4\chi_N (1 - \nu_{P,0}^{1/3}) \approx 4\chi_N , \quad (27)$$

其中, 我们忽略了  $\nu_{P,0}$  项。

由图 2 和图 3 可知, 当  $\nu_P = 1$  时, 最优轨道条件下 CE 次数在  $10^4$  左右。这样, 根据式 (6) 可以算得, 在最优轨道条件下  $\chi_N = 10^4$ 。在此情况下,  $\widetilde{N}_{CE} \approx 4 \times 10^4$ 。也就是说, 在 1 Ga 内, 一个 TR 受到总质量为 2 个冥王星质量的 PL 群的近密摄动次数约为  $4 \times 10^4$ 。

我们可以进一步讨论各个质量区间对总 CE 次数的贡献, 以获得一个基本的认识。由式 (14) 可以得到, 某一质量区间  $[\nu_P - \Delta\nu_P, \nu_P]$  贡献的 CE 次数是:

$$N_{CE}(\Delta\nu_P) = 4\chi_N \left[ \nu_P^{1/3} - (\nu_P - \Delta\nu_P)^{1/3} \right] . \quad (28)$$

由此可得, 半径在 100~1 000 km 量级的 PL 对总 CE 次数的贡献约为  $3.6 \times 10^4$ , 而半径小于 100 km 的 PL 对总 CE 次数的贡献为剩余的  $4 \times 10^3$ 。这说明大质量 PL 贡献的 CE 次数占总 CE 次数的 90% 以上, 在整个 CE 的演化中起着决定性的作用。

### 6.3 碰撞次数

用类似的方法也可以计算 PL 与 TR 的碰撞次数。由计算碰撞次数的式 (20) 可以看出, 要计算  $N_{co}$ , 首先要求出与轨道性质有关的  $R_U$ 。仍然考虑轨道条件最优的情况, 也就是  $\chi_N \approx 10^4$ , 由式 (7) 可得,  $R_U \approx 0.0014 \text{ AU} \approx 2 \times 10^5 \text{ km}$ 。对实际的 PL 和 TR 来说,  $R_U \gg R_P + R_T$ 。由式 (20) 可知, 单个 PL 与 TR 的碰撞很难发生。

对于某个 TR 受到一群 PL 碰撞的情况, 不妨取 TR 半径为  $R_T = 100 \text{ km}$ , 并且 PL 的总质量仍然假设为冥王星质量的 2 倍, 也就是  $\widetilde{\nu}_P = 2$ 。由式 (23) 可得, 单个 TR 与质量分布为  $f(\nu_P)$  的一群 PL 的总碰撞次数为:

$$\widetilde{N}_{co} = \widetilde{N}_P B_0 \int_{\nu_{P,0}}^1 \left( \frac{R_{Pluto} \nu_P^{1/3} + R_T}{R_U} \right)^2 \nu_P^{-4/3} d\nu_P . \quad (29)$$

经简单计算可得:

$$\widetilde{N}_{co} = \widetilde{N}_P B_0 \left( \frac{R_{Pluto}}{R_U} \right)^2 \left[ 3 - 2\tau_T \lg \nu_{P,0} + 3\tau_T^2 \nu_{P,0}^{-1/3} \right] , \quad (30)$$

其中,  $\tau_T = R_T/R_{\text{Pluto}}$ 。考虑到  $\nu_{P,0} \ll 1$ , 我们略去了一些常数项。另外, 由总质量的归一化条件, 我们容易得到  $\widetilde{N}_P B_0 = 4/3$ 。

现在需确定积分下界。既然考虑的是半径为  $10^2$  km 量级的 TR 的碰撞, 我们不妨把碰撞的下界确定为质量分布的下界, 即  $\nu_{P,0} \approx \nu_{P,b} \approx 10^{-18}$ , 也就是在 1 m 量级左右。这样, 我们最终可以得到:

$$\widetilde{N}_{\text{co}} \gtrsim 1. \quad (31)$$

也就是说, 一个  $10^2$  km 量级的 TR 在  $10^9$  a 内与总质量为 2 倍冥王星质量的 PL 群发生约 1 次碰撞。这是一个非常小的概率, 在 TR 的演化中基本上可以忽略不计。

通过进一步计算我们还发现, 这 1 次碰撞是由半径最小的那一部分 PL, 也就是半径在  $1 \sim 10$  m 量级的 PL 引起的。这样的碰撞显然不会对 TR 的演化带来决定性影响。

实际上, 在  $\nu_{P,0} \ll 1$  的情况下, 式 (30) 可写为:

$$\widetilde{N}_{\text{co}} = 3\widetilde{N}_P B_0 \frac{\tau_T^2}{\tau_{P,0}} \left( \frac{R_{\text{Pluto}}}{R_U} \right)^2, \quad (32)$$

其中,  $\tau_{P,0} = R_{P,0}/R_{\text{Pluto}}$  是 PL 的最小半径。可以看出, 当 TR 的半径减小时, PL 的最小半径也必须减小。由于在最小半径处的 PL 对碰撞的贡献是主要的, 因此, 一个 TR 在太阳系年龄量级内基本上只可能与比它小得多的 PL 发生碰撞。考虑到式 (32) 中等式右边的系数数量级在  $1.5 \times 10^{-4}$  左右, 我们可以近似得到:

$$\tau_{P,0} = \tau_T^2 / (7 \times 10^3). \quad (33)$$

式 (33) 给出了可能与半径为  $\tau_T$  的 TR 在  $10^9$  a 内发生至少 1 次碰撞的 PL 半径的限制。

## 7 总结与讨论

我们改进了已有的数值模拟方法, 使其能更加准确而有效地捕捉冥族小天体与海王星特洛伊这两群小天体之间的近密交会。在数值模拟的基础上, 我们详细研究了各轨道参数以及小天体的大小和质量对近密交会频率的影响。我们发现, 小天体的质量是影响 CE 次数的决定性因素, 两者的量级呈线性变化。PL 和 TR 的倾角是影响 CE 次数的次要因素, 影响范围基本上是在 1 个量级以内。理论上, PL 的偏心率也是影响 CE 的决定性因素。实际观测到的 PL 的偏心率大多满足发生 CE 的基本要求 (即能使 PL 的近日点穿过 TR 轨道)。而只要保证 CE 发生, 其偏心率的具体大小对 CE 次数的影响便有限, 所以, 总体上 PL 的偏心率对 CE 的影响是较小的。另外, 只有那些偏心率很小的 TR 才能维持其轨道稳定性。实际上, 并不存在大偏心率的 TR, 因此, 本文未讨论 TR 的偏心率大小对 CE 次数的影响。最后, PL 和 TR 的共振振幅对 CE 次数的影响被证明是非常小的, 并且当振幅增大时, 这种影响还具有负效果, 这与前人<sup>[2]</sup>的推测完全不同。

在经典的碰撞截面的基础上, 我们提出了估算 CE 次数的理论公式, 并在忽略低质量小

天体之间微弱引力的前提下, 把这一公式推广到碰撞次数的估算上。当合理忽略轨道参数的影响时, 我们将该公式进一步应用到了一群小天体间的碰撞次数估算上。

最后, 我们以现有的 PL 观测数据为基础, 推导了 PL 群的质量分布函数, 并利用上述公式估算了实际情况下近密交会和碰撞次数。我们发现, 一个典型 TR 在  $10^9$  a 内与一群总质量不超过 2 倍冥王星质量的 PL 发生近密交会的次数在  $10^4$  量级, 其中大部分交会是由半径在  $10^2$  km 量级以上的 PL 贡献的。另一方面, 我们发现, 一个典型 TR 在相同时间尺度内与同一群 PL 发生约 1 次碰撞, 并且这 1 次碰撞是由半径 10 m 量级以下的 PL 引起的, 所以碰撞在典型 TR 的动力学演化中所起的作用可以忽略不计。上述分析还说明, 碰撞过程基本上是由小尺度天体引起的, 而近密交会则几乎只与大质量天体有关。

我们主要讨论了 PL 对 TR 的作用。用同样的方法也可以研究 TR 对 PL 的影响。只是由于目前 TR 的观测数据很少, 很难对实际情况下 TR 的质量分布做出计算, 所以暂时无法研究 TR 群对 PL 的动力学影响。

另外应该指出的是, 我们的分析过程完全可以应用到其他任意两群小天体之间近密交会和碰撞频率的估算上, 只要这两群小天体的轨道保持相对稳定, 比如小行星主带中分别处于与木星发生 3 : 2 和 1 : 1 轨道共振处的希尔达群 (Hilda group) 和木星特洛伊, 就是这样的例子。

#### 参考文献:

- [1] <http://https://www.minorplanetcenter.net/iau/lists/MPLists.html>
- [2] Almeida A J C, Peixinho N, Correia A C M. *A&A*, 2009, 508: 1021
- [3] Sheppard S S, Trujillo C A. *Science*, 2010, 329: 1304
- [4] Zhou L Y, Dvorak R, Sun Y S. *MNRAS*, 2009, 398: 1217
- [5] Zhou L Y, Dvorak R, Sun Y S. *MNRAS*, 2011, 410: 1849
- [6] Nesvorný D, Vokrouhlický D. *AJ*, 2009, 137: 5003
- [7] Dong C Y, Zhou L Y, Cui J. *arXiv:astro-ph/1806.10651*
- [8] Levison H F, Duncan M J. *AJ*, 2000, 120: 2117
- [9] Öpik E J. *Proc R Irish Acad*, 1951, 54: 165
- [10] Wetherill G W. *Journal of Geophysical Research*, 1967, 72: 2429

## The Frequency of Close Encounters and Collisions Between Plutinos and Neptune Trojans

DONG Cheng-yu<sup>1,2</sup> ZHOU Li-yong<sup>1,2</sup>

(1. School of Astronomy and Space Science, Nanjing University, Nanjing 210046, China 2. Key Laboratory of Modern Astrophysics in Ministry of Education, Nanjing University, Nanjing 210046, China)

**Abstract:** As a subpopulation of trans-Neptunian objects (TNO), Plutinos (PL) are located in the 2:3 mean motion resonance with Neptune, and possess high eccentricity, which allows their orbits overlap Neptune Trojans' (TR) significantly, yielding potential close encounters and collisions that influence the dynamical evolutions of these two groups of asteroids. Based on the improved numerical tools that properly handle the close encounters in the simulations, we investigate the key factors that affect the frequency of close encounters, including mass, inclination and eccentricity. Under reasonable assumptions, we build analytical formula to estimate the number of close encounters and collisions between these two groups. Together with numerical results and existing observation data of PLs, we estimate the number of close encounters and collisions that PLs bring to a typical TR in realistic cases. We find that the close encounters are frequent, but collisions are extremely rare, and planetesimals with different mass contribute differently. Our analytical tool can be applied to the evaluation of encounters between other groups of asteroids as well.

**Key words:** Neptune Trojan; close encounter; analytical and numerical methods